恩波考研

ENBO

考研数学

理工类

强化500题精解

恩波 主编

高分的关键在于好题的训练！

- 300道经典好题贴近真题难度
- 200道原创好题预测08年考研真题

2008

学苑出版社

恩波考研
ENBO

2008考研数学
强化500题精解
(理工类)

主编 恩 波
编著 余 术 陈维新
黄柏琴 李玉贞

学苑出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学强化500题精解．理工类/恩波主编．－3版．－北京:学苑出版社,2007.7
ISBN 978－7－5077－2357－1

Ⅰ．考…　Ⅱ．恩…　Ⅲ．高等学校－研究生－入学考试－解题　Ⅳ．O13－44

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第007185号

责任编辑:刘　涟
责任校对:张一介
封面设计:顾小平　朱　颜
出版发行:学苑出版社
社　　址:北京市丰台区南方庄2号院1号楼　100079
网　　址:www.book001.com
电子信箱:xueyuanyg@sina.com
xueyuan@public.bta.net.cn
销售电话:010－67674055、67675512、67678944
印 刷 厂:北京宏大印刷有限公司
开本尺寸:787×1092　1/16
印　　张:24
字　　数:590千字
版　　次:2007年7月北京第3版
印　　次:2007年7月北京第1次印刷
印　　数:0001—1000册
定　　价:28.00元

前　言

通过多年的考研辅导，我们认定：考研数学取得高分的关键在于好题的训练。

本书正是专门为广大考研考生所设计的强化训练平台。其内容以教育部制订的最新考研数学大纲为依据，各单元的编排次序与大纲完全一致。

本书具有以下鲜明特点：

选题经典、原创

考研数学题目浩如烟海，随处可见，但是真正的好题却并不多见。为了不让广大考生因做无用题而浪费宝贵的考研复习时间，本书作者一方面在选题上下足工夫，为考生选出了符合大纲要求、接近真题难度、体现命题规律的经典好题近300题；另一方面又以其深厚的学术功底和多年的辅导心得为基础，结合近年命题特点与热点，原创了200余道灵活性和综合性都较强的题目，其中不乏作者密押多年的看家题，其目的使得考生在做题时达到事半功倍的效果。

体例简明、科学

本书根据"导"与"练"的特点而设置体例。方法和技巧精要——根据考试大纲，按单元或节简单明了地列举出核心考点与技巧，重点突出，使考生在做题时有的放矢；典型题解析——本书以题型为主线，是国家1992年实行统考以来真题的归纳、总结与扩展，具有很强的实战意义；选题讲究，据不完全统计，约有20%～30%的例题选自考研数学最具有代表性的真题，70%～80%的例题是作者原创或长期积累的难度与考研数学真题相当，具有较高灵活性、综合性的题目。模拟训练——每单元配有难度与真题相当的综合练习题，让考生在训练中逐步提高解题能力，掌握解题技巧，而模拟训练的解答或提示可进一步引导考生理顺思路、开拓思维。

解析权威、详尽

本书的作者均是国内最顶尖大学的资深教授，同时又是国内考研辅导的一线名师，深谙考研数学的命题规律与命题趋势，有着丰富的辅导和写作经验。作者对典型题的解答，剖析了考试重点、热点、难点题型的解题方法与技巧，融汇了作者的相关体会或总结，

从而达到启迪考生思维，指导考生串联考点，举一反三，学会解题的目的。

本书由恩波策划，负责组织作者和全书设计。全书的分工情况是：高等数学部分理工类由余术执笔，经济类由何勇执笔；线性代数部分一、二、四单元由李玉贞执笔，三、五、六单元由陈维新执笔；概率论与数理统计部分理工类由黄柏琴执笔，经济类由刘国庆执笔。

本书在成书前，曾在全国各地的数学考研辅导班试用，获得了良好的效果。在后期修改时，作者还参考了广大学员与恩波教育在线（www.enboedu.com）上众多考生的建议，进行了大量的修订、补充、归纳与提高，其特色明显，希望能够在众多考研数学辅导书中脱颖而出。

我们相信，考生通过本书系统的强化训练，一定能将相关考点的解题方法和解题技巧娴熟于胸，达到举一反三，触类旁通之效。

本书稿承南京大学数学系姜东平教授仔细审阅、润色，作者深表谢意。

限于水平和时间，书中难免有疏漏、不当之处，读者如发现，敬请不吝赐教，以便修正完善。

编著者

目　录

高等数学

线性代数

概率论与数理统计

高等数学

第一单元　函数·极限·连续

一、方法和技巧精要

概述

函数、极限、连续是整个高等数学的基础，尤其是导数、定积分、级数敛散性等重要概念均是直接建立在极限理论上.本章概念众多，仅函数极限定义就有 24 种之别，故深刻理解、领会极限概念的内涵显得尤为重要，惟有如此，才能真正做到融汇贯通，举一反三.切忌死记硬背.

核心考点

(1) 数列及函数极限的计算及证明.

(2) 无穷小量的比较.

(3) 函数间断点及其分类.

(4) 极限式中参数的确定.

(5) 极限与变限积分、中值定理、级数及曲线性态相结合的综合题.

核心技巧

处理与极限有关问题的核心技巧有

(1) 极限存在两准则：单调有界准则，夹逼准则.

(2) 两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}\quad 或\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$$

后者的变化类型尤为多样.这里 x 可以是一个复杂的函数.

(3) 洛必达法则.只有 $\frac{0}{0}$ 型、$\frac{\infty}{\infty}$ 型才能使用洛必达法则，其他未定式 $\infty-\infty$，$0\cdot\infty$，0^0，∞^0，1^∞ 要通过设置分母或借助于 $a^b=\mathrm{e}^{b\ln a}$ 先行转化；在使用洛必达法则前优先考虑等价无穷小替换，以达到简化计算的目的.

(4) 等价无穷小替换.注意在加减运算中应避免使用等价无穷小替换.

(5) Taylor 展开式.

(6) 定积分定义.

二、典型题解析

1 无穷小量的比较

例 1.1(填空题)　已知当 $x\to 1^+$ 时，$\sqrt{3x^2-2x-1}\ln x$ 与 $(x-1)^n$ 为同阶无穷小，则 n 值为

________.

详细解答 $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{3x^2-2x-1}\ln x}{(x-1)^n}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{(3x+1)(x-1)}\ln[1+(x-1)]}{(x-1)^n}$

$$\xlongequal{令\ t=x-1}\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{(3t+4)t}\cdot\ln(1+t)}{t^n}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{t^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{3t+4}}{t^n}\quad（当\ t\to0\ 时,\ln(1+t)\sim t）$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{3t+4}}{t^{n-\frac{3}{2}}},$$

当 $x\to1^+$ 时，$\sqrt{3x^2-2x-1}\ln x$ 与 $(x-1)^n$ 为同阶无穷小，即上述极限值为非零常数，取 $n=\dfrac{3}{2}$ 时，$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{3x^2-2x-1}\ln x}{(x-1)^n}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\sqrt{3t+4}}{t^{n-\frac{3}{2}}}=2$. 故填 $n=\dfrac{3}{2}$.

例 1.2（单项选择题） 当 $x\to0$ 时，对三个无穷小量 $\int_0^{\sin x}\sin(t^3)\,dt$，$(1-\cos x)\ln(1+x^3)$，$e^{x\tan^2x}-1$ 按由低阶到高阶无穷小的顺序排列为（　　）.

(A) $\int_0^{\sin x}\sin(t^3)\,dt$，$(1-\cos x)\ln(1+x^3)$，$e^{x\tan^2x}-1$

(B) $\int_0^{\sin x}\sin(t^3)\,dt$，$e^{x\tan^2x}-1$，$(1-\cos x)\ln(1+x^3)$

(C) $e^{x\tan^2x}-1$，$\int_0^{\sin x}\sin(t^3)\,dt$，$(1-\cos x)\ln(1+x^3)$

(D) $e^{x\tan^2x}-1$，$(1-\cos x)\ln(1+x^3)$，$\int_0^{\sin x}\sin(t^3)\,dt$

详细解答 当 $x\to0$ 时

$$\left.\begin{aligned}&1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2\\&\ln(1+x^3)\sim x^3\end{aligned}\right\}\Rightarrow(1-\cos x)\ln(1+x^3)\sim\frac{1}{2}x^5.$$

$$e^{x\tan^2x}-1\sim x\tan^2x\sim x^3.$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{\sin x}\sin(t^3)\,dt}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin^3x)\cos x}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to0}\frac{x^3}{nx^{n-1}}\xlongequal{n=4}\frac{1}{4},$$

$$\Rightarrow\int_0^{\sin x}\sin(t^3)\,dt\sim\frac{1}{4}x^4.$$

故选 C.

友情提醒 要熟练掌握下列常用的等价无穷小量.

当 $x\to0$ 时，

$$\sin x\sim\arcsin x\sim\tan x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1\sim x,$$

$$a^x-1=e^{x\ln a}-1\sim x\ln a,$$

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,$$

$$(1+\alpha x)^{\beta}-1\sim\alpha\beta x \qquad (\beta>0).$$

并有传递性

$$\frac{1}{2}x^2\sim\int_0^x \sin t\mathrm{d}t\sim\int_0^x \arcsin t\mathrm{d}t\sim\int_0^x \tan t\mathrm{d}t\sim\int_0^x \arctan t\mathrm{d}t\sim\int_0^x \ln(1+t)\mathrm{d}t.$$

例 1.3(单项选择题) 选择适当的参数 a, b 使当 $x\to 0$ 时,

$$f(x)=\arctan x-\frac{x+ax^3}{1+bx^2}.$$

为 x 的尽可能高阶的无穷小,阶数 N 的最大值为( ).

(A) $N=4$ (B) $N=5$ (C) $N=6$ (D) $N=7$

详细解答 即要求使$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^N}$存在且不为 0 的最大 N 值. 利用 Taylor 展开式

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+o(x^8),$$

得

$$f(x)=\arctan x-\frac{x+ax^3}{1+bx^2}$$

$$=\frac{\left(b-a-\frac{1}{3}\right)x^3+\left(\frac{1}{5}-\frac{b}{3}\right)x^5+\left(\frac{b}{5}-\frac{1}{7}\right)x^7+o(x^8)}{1+bx^2},$$

从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^N}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(b-a-\frac{1}{3}\right)x^3+\left(\frac{1}{5}-\frac{b}{3}\right)x^5+\left(\frac{b}{5}-\frac{1}{7}\right)x^7+o(x^8)}{(1+bx^2)x^N}.$$

令

$$\begin{cases}b-a-\dfrac{1}{3}=0,\\[2mm] \dfrac{1}{5}-\dfrac{b}{3}=0.\end{cases}$$

解得 $a=\dfrac{4}{15}$, $b=\dfrac{3}{5}$. 此时分子 x^7 前的乘数 $\dfrac{b}{5}-\dfrac{1}{7}=-\dfrac{4}{175}\neq 0$, 且

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^7}=-\frac{4}{175},$$

故选 D.

友情提醒 当无穷小量阶数较高时,为避免反复使用洛必达法则,可考虑运用 Taylor 展开式.

例 1.4(单项选择题) 设函数 $f(x)$, $g(x)$连续,当 $x\to 0$ 时,$f(x)$与 $g(x)$是同阶但非等价无穷小. 令

$$F(x)=\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t,\quad G(x)=\int_0^1 xg(xt)\mathrm{d}t.$$

则当 $x\to 0$ 时,$F(x)$是 $G(x)$的( ).

(A) 高阶无穷小 (B) 低阶无穷小

(C) 同阶但非等价无穷小　　　　　　　　(D) 等价无穷小

详细解答　$F(x)=\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t \xlongequal{u=x-t} \int_x^0 f(u)(-\mathrm{d}u)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$,

$$G(x)=\int_0^1 xg(xt)\mathrm{d}t \xlongequal{u=xt} \int_0^x g(u)\mathrm{d}u,$$

所以,

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{\int_0^x g(u)\mathrm{d}u} \xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{0}{0}\text{型}} \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=C\neq 0,1$$

故选 C.

友情提醒　**当定积分的被积(隐)函数之变元较复杂时,首先应作变量代换,简化处理.**

2 函数的间断点及其类型判别

例 1.5　求下列函数的间断点并判别其类型

(1) $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{x^2+2x-3}$;　　　　(2) $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin x}{\sin t}\right)^{\frac{x}{\sin x-\sin t}}$.

详细解答　(1) $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{(x+3)(x-1)}$ 在 $x=-3,0,1$ 处无定义,由于

$$\lim_{x\to -3}f(x)=\lim_{x\to -3}\frac{\ln(-x)}{(x+3)(x-1)}=\infty,$$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{(x+3)(x-1)}=\infty,$$

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{(x+3)(x-1)} \xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{0}{0}\text{型}} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{2x+2}=\frac{1}{4},$$

故 $x=-3$, $x=0$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点(属第二类间断点), $x=1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点(属第一类间断点).

$$(2)\ f(x)=\lim_{t\to x}\left(\frac{\sin x}{\sin t}\right)^{\frac{x}{\sin x-\sin t}}\qquad (1^{\infty}\text{ 型})$$

$$=\lim_{t\to x}\left[\left(1+\frac{\sin x-\sin t}{\sin t}\right)^{\frac{\sin t}{\sin x-\sin t}}\right]^{\frac{x}{\sin t}}$$

$$=\mathrm{e}^{\frac{x}{\sin x}},$$

$x=k\pi\ (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 处函数 $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{\sin x}}$ 没有定义.

当 $k=0$ 时,即在 $x=0$ 处

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{x}{\sin x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}}=\mathrm{e}.$$

故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点(属第一类间断点).

当 $k\neq 0$ 时,在 $x=k\pi$ 处

$$\lim_{x\to k\pi}f(x)=\lim_{x\to k\pi}\mathrm{e}^{\frac{x}{\sin x}}\text{ 不存在},$$

故 $x=k\pi\ (k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点.

例 1.6 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1} & x\neq 0\text{ 时},\\ 1 & x=0\text{ 时},\end{cases}$$

在 $x=0$ 处的连续性,若不连续请说明它的类型.

详细解答

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=-1,$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=1,$$

即 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ 均存在. 但 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$, 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续, $x=0$ 为其跳跃间断点(属第一类间断点).

友情提醒 **极限式中含有 e^x(一般指数函数 a^x)当 $x\to\infty$,或含有 $e^{\frac{1}{x}}$ 当 $x\to 0$ 时,要分 $x\to\pm\infty$ 或左右极限 $x\to 0^{\pm}$ 来处理.**

3 极限式中参数的确定

例 1.7(填空题) 设 $\alpha>0$, $\beta\neq 0$ 且满足极限式

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(x^{2\alpha}+x^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}-x^2\right]=\beta,$$

则 $(\alpha,\beta)=$____________.

详细解答

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left[(x^{2\alpha}+x^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}-x^2\right]&=\lim_{x\to+\infty}x^2\left[\left(1+\frac{1}{x^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}-1\right]\\&=\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\frac{1}{\alpha}\,\frac{1}{x^{\alpha}}\quad\left((1+\alpha t)^{\beta}-1\sim\alpha\beta t,\ \text{当 } t\to 0\text{ 时}\right)\\&=\frac{1}{\alpha}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^{\alpha}}\\&=\begin{cases}0, & \alpha>2\text{ 时},\\ \dfrac{1}{2}, & \alpha=2\text{ 时},\\ \infty, & 0<\alpha<2\text{ 时}.\end{cases}\end{aligned}$$

又由题设 $\beta\neq 0$ 故 $(\alpha,\beta)=\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$.

例 1.8(单项选择题) 设 a, b 为两实常数,且有

$$\lim_{x\to+\infty}e^x\left[\int_0^{\sqrt{x}}e^{-t^2}\,dt+a\right]=b,$$

则 a, b 值分别为(   ).

(A) $a=-\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, $b=0$ (B) $a=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, $b=0$

(C) $a=0$，$b=-\frac{\sqrt{\pi}}{2}$　　　　(D) $a=0$，$b=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

详细解答　由 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}\left[\int_0^{\sqrt{x}}e^{-t^2}\,dt+a\right]=b$ 知

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\int_0^{\sqrt{x}}e^{-t^2}\,dt+a\right]=0,$$

即

$$a=-\lim_{x\to+\infty}\int_0^{\sqrt{x}}e^{-t^2}\,dt=-\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,dt.$$

借助于二重积分的极坐标形式

$$\left[\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,dt\right]^2=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,dx\cdot\int_0^{+\infty}e^{-y^2}\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{+\infty}e^{-r^2}\,rdr$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Big|_{r=0}^{+\infty}=\frac{\pi}{4},$$

所以　$a=-\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,dt=-\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 而

$$b=\lim_{x\to+\infty}e^{x}\left[\int_0^{\sqrt{x}}e^{-t^2}\,dt+a\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^{\sqrt{x}}e^{-t^2}\,dt+a}{e^{-x}}$$

$$\xlongequal{\frac{0}{0}\text{型}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot e^{-x}}{-e^{-x}}=0.$$

故选 A.

例 1.9　设 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3-1}+\lambda x+\mu)=0$，试确定 λ，μ 之值.

详细解答　由 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3-1}+\lambda x+\mu)=\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}+\lambda+\frac{\mu}{x}\right)=0$，

知　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}+\lambda+\frac{\mu}{x}\right)=0$，即 $1+\lambda=0$，$\lambda=-1$.

而

$$\mu=-\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3-1}+\lambda x)$$

$$=-\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}+\lambda\right)$$

$$=-\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}-1\right)$$

$$\xlongequal{(1+\alpha t)^{\beta}-1\sim\alpha\beta t\text{，当 }t\to0\text{ 时}}-\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{x^3}\right)$$

$$=0,$$

即有　$\lambda=-1$，$\mu=0$.

例 1.10　设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\alpha x+\sin x}{\int_{\beta}^{x}\frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=\gamma$　$(\gamma\neq0)$，试确定 α，β，γ 之值.

详细解答 $$\lim_{x\to0}\int_\beta^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t = \lim_{x\to0}(\alpha x+\sin x)\cdot\frac{\int_\beta^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}{\alpha x+\sin x}$$

$$= \lim_{x\to0}(\alpha x+\sin x)\cdot\lim_{x\to0}\frac{\int_\beta^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}{\alpha x+\sin x}$$

$$= 0\cdot\frac{1}{\gamma}=0,$$

注意到被积函数 $\frac{\ln(1+t^3)}{t}>0$，故 $\beta=0$.

$$\gamma=\lim_{x\to0}\frac{\alpha x+\sin x}{\int_0^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}\xlongequal{\frac{0}{0}\text{型}}\lim_{x\to0}\frac{\alpha+\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}}$$

$$\xlongequal{\ln(1+x^3)\sim x^3,\ x\to0\text{时}}\lim_{x\to0}\frac{\alpha+\cos x}{x^2},$$

故由 $\lim\limits_{x\to0}(\alpha+\cos x)=\alpha+1=0$ 得 $\alpha=-1$.

$$\gamma=\lim_{x\to0}\frac{-1+\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

综上 $\alpha=-1$，$\beta=0$，$\gamma=-\frac{1}{2}$.

例 1.11 设函数

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax+b}{1+x^{2n}}$$

处处连续，试确定 a，b 之值.

详细解答

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax+b}{1+x^{2n}}=\begin{cases}ax+b, & |x|<1\text{时};\\ \frac{1}{x}, & |x|>1\text{时};\\ -\frac{1}{2}(1+a-b), & x=-1\text{时};\\ \frac{1}{2}(1+a+b), & x=1\text{时}.\end{cases}$$

由 $f(x)$ 处处连续知 $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=f(-1)$，$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=f(1)$. 即

$$\begin{cases}-1=b-a=-\frac{1}{2}(1+a-b),\\ a+b=1=\frac{1}{2}(1+a+b),\end{cases}$$

解得 $a=1$，$b=0$.

例 1.12 试确定常数 b，使极限

$$\lim_{a\to0}\int_{-a}^{a}\frac{1}{a}\left(1-\frac{|x|}{a}\right)\cos(b-x)\mathrm{d}x$$

存在，并求此极限.

详细解答

$$I=\lim_{a\to0}\int_{-a}^{a}\frac{1}{a}\left(1-\frac{|x|}{a}\right)\cos(b-x)\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{a\to0}\frac{\int_{-a}^{a}(a-|x|)\cos(b-x)\mathrm{d}x}{a^2}$$

$$=\lim_{a\to0}\frac{a\int_{-a}^{a}\cos(b-x)\mathrm{d}x-\int_{-a}^{a}|x|\cos(b-x)\mathrm{d}x}{a^2}$$

$$\xlongequal{\frac{0}{0}\text{型}}\lim_{a\to0}\frac{\int_{-a}^{a}\cos(b-x)\mathrm{d}x+a\cos(b-a)+a\cos(b+a)-|a|\cos(b-a)-|a|\cos(b+a)}{2a}$$

$$=\lim_{a\to0}\frac{\int_{-a}^{a}\cos(b-x)\mathrm{d}x+2(a-|a|)\cos a\cos b}{2a}.$$

考虑左右极限

$$\lim_{a\to0^+}\frac{\int_{-a}^{a}\cos(b-x)\mathrm{d}x+2(a-|a|)\cos a\cos b}{2a}$$

$$=\lim_{a\to0^+}\frac{\int_{-a}^{a}\cos(b-x)\mathrm{d}x}{2a}\xlongequal{\frac{0}{0}\text{型}}\lim_{a\to0^+}\frac{\cos(b-a)+\cos(b+a)}{2}=\cos b;$$

$$\lim_{a\to0^-}\frac{\int_{-a}^{a}\cos(b-x)\mathrm{d}x+2(a-|a|)\cos a\cos b}{2a}$$

$$=\lim_{a\to0^-}\frac{\int_{-a}^{a}\cos(b-x)\mathrm{d}x+4a\cos a\cos b}{2a}$$

$$=\lim_{a\to0^-}\frac{\int_{-a}^{a}\cos(b-x)\mathrm{d}x}{2a}+\lim_{a\to0^-}2\cos a\cos b$$

$$=\cos b+2\cos b=3\cos b.$$

要使极限 I 存在，其充要条件是 $3\cos b=\cos b$，故 $\cos b=0$，即 $b=k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，且此时 $I=\lim\limits_{a\to0}\int_{-a}^{a}\frac{1}{a}\left(1-\frac{|x|}{a}\right)\cos(b-x)\mathrm{d}x=0$.

4 未定式的定值法

例 1.13 求下列函数极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{e^x-1}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\arctan\dfrac{1}{x}+e^{\frac{1}{x^2}}}{\dfrac{1}{x}\int_0^{\frac{1}{x}}e^{t^2}\,dt}$;

(5) $\lim\limits_{\varphi\to 0}\dfrac{1-\cos\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}\sqrt[3]{\cos 3\varphi}\cdots\sqrt[n]{\cos n\varphi}}{\ln(1+\varphi)-\varphi}$;

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin^2 x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}$.

详细解答

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}\xlongequal{t=\frac{1}{x^2}}\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t^{50}}{e^t}\xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{\infty}{\infty}\text{型}}\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{50t^{49}}{e^t}$

$$\xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{\infty}{\infty}\text{型}}\cdots=\lim_{t\to+\infty}\frac{50!}{e^t}=0.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{e^x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{x}$ ($e^x-1\sim x$,当 $x\to 0$ 时)

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\tan x}{x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x})}$ (分子有理化)

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x}}$ ($\tan x\sim x$,当 $x\to 0$ 时)

$=1$.

(3) **法 1** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{1+x\sin x-\cos x}$ (分母有理化)

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{x\sin x+2\sin^2\dfrac{x}{2}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}}$

$=\dfrac{1+1}{1+\dfrac{2}{4}\cdot 1^2}=\dfrac{4}{3}$.

法 2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$

$$\xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{0}{0}\text{型}} \lim_{x\to 0}\frac{2x}{\dfrac{\sin x + x\cos x}{2\sqrt{1+x\sin x}}-\dfrac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4}{\dfrac{1}{\sqrt{1+x\sin x}}\left(\dfrac{\sin x}{x}+\cos x\right)+\dfrac{1}{\sqrt{\cos x}}\dfrac{\sin x}{x}}$$

$$=\frac{4}{3}.$$

法 3 利用等价无穷小替换. 当 $x\to 0$ 时，

$$\sqrt{1+x\sin x}-1\sim\frac{1}{2}x\sin x\sim\frac{1}{2}x^2,$$

$$\sqrt{\cos x}-1=\sqrt{1+(\cos x-1)}-1\sim\frac{1}{2}(\cos x-1)\sim-\frac{1}{4}x^2,$$

即有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}=\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}=-\dfrac{1}{4}$，从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{(\sqrt{1+x\sin x}-1)-(\sqrt{\cos x}-1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}-\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}}$$

$$=\frac{1}{\dfrac{1}{2}-\left(-\dfrac{1}{4}\right)}=\frac{4}{3}.$$

友情提醒 等价无穷小替换仅适合于乘积中的因子，加减运算中的项不宜使用.

(4) $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan\dfrac{1}{x}+e^{\frac{1}{x^2}}}{\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{x}}e^{t^2}\,dt}\xlongequal{u=\frac{1}{x}}\lim_{u\to+\infty}\frac{\arctan u+e^{u^2}}{u\displaystyle\int_0^u e^{t^2}\,dt}$$

$$\xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{\infty}{\infty}\text{型}}\lim_{u\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{1+u^2}+2ue^{u^2}}{\displaystyle\int_0^u e^{t^2}\,dt+ue^{u^2}}$$

$$=\lim_{u\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{1+u^2}}{\displaystyle\int_0^u e^{u^2}\,dt+ue^{u^2}}+\lim_{u\to+\infty}\frac{2ue^{u^2}}{\displaystyle\int_0^u e^{t^2}\,dt+ue^{u^2}}$$

$$=\lim_{u\to+\infty}\frac{2ue^{u^2}}{\displaystyle\int_0^u e^{t^2}\,dt+ue^{u^2}}\xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{\infty}{\infty}\text{型}}\lim_{u\to+\infty}\frac{2e^{u^2}+4u^2e^{u^2}}{2e^{u^2}+2u^2e^{u^2}}$$