

考研数学

理工类

强化500题精解

恩波主编

高分的关键在于好题的训练!

- 300道经典好题贴近真题难度
- 200道原创好题预测08年考研真题

2008

学苑出版社



ENBO
ENBO EDUCATION
ENBO

2008 考研数学

强化 500 题精解

(理工类)

主 编 恩 波
编 著 余 术 陈维新
黄柏琴 李玉贞

学苑出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学强化500题精解. 理工类/恩波主编. -3版.
-北京:学苑出版社,2007.7
ISBN 978-7-5077-2357-1

I. 考… II. 恩… III. 高等学校-研究生-入学考
试-解题 IV. 013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第007185号

责任编辑:刘 涟

责任校对:张一介

封面设计:顾小平 朱 颜

出版发行:学苑出版社

社 址:北京市丰台区南方庄2号院1号楼 100079

网 址:www.book001.com

电子信箱:xueyuanyg@sina.com

xueyuan@public.bta.net.cn

销售电话:010-67674055、67675512、67678944

印 刷 厂:北京宏大印刷有限公司

开本尺寸:787×1092 1/16

印 张:24

字 数:590千字

版 次:2007年7月北京第3版

印 次:2007年7月北京第1次印刷

印 数:0001—1000册

定 价:28.00元

前 言

通过多年的考研辅导,我们认定:考研数学取得高分的关键在于好题的训练。

本书正是专门为广大考研考生所设计的强化训练平台。其内容以教育部制订的最新考研数学大纲为依据,各单元的编排次序与大纲完全一致。

本书具有以下鲜明特点:

选题经典、原创

考研数学题目浩如烟海,随处可见,但是真正的好题却并不多见。为了不让广大考生因做无用题而浪费宝贵的考研复习时间,本书作者一方面在选题上下足工夫,为考生选出了符合大纲要求、接近真题难度、体现命题规律的经典好题近300题;另一方面又以其深厚的学术功底和多年的辅导心得为基础,结合近年命题特点与热点,原创了200余道灵活性和综合性都较强的题目,其中不乏作者密押多年的看家题,其目的使得考生在做题时达到事半功倍的效果。

体例简明、科学

本书根据“导”与“练”的特点而设置体例。**方法和技巧精要**——根据考试大纲,按单元或节简单明了地列举出核心考点与技巧,重点突出,使考生在做题时有的放矢;**典型题解析**——本书以题型为主线,是国家1992年实行统考以来真题的归纳、总结与扩展,具有很强的实战意义;选题讲究,据不完全统计,约有20%~30%的例题选自考研数学最具有代表性的真题,70%~80%的例题是作者原创或长期积累的难度与考研数学真题相当,具有较高灵活性、综合性的题目。**模拟训练**——每单元配有难度与真题相当的综合练习题,让考生在训练中逐步提高解题能力,掌握解题技巧,而模拟训练的解答或提示可进一步引导考生理顺思路、开拓思维。

解析权威、详尽

本书的作者均是国内最顶尖大学的资深教授,同时又是国内考研辅导的一线名师,深谙考研数学的命题规律与命题趋势,有着丰富的辅导和写作经验。作者对典型题的解答,剖析了考试重点、热点、难点题型的解题方法与技巧,融汇了作者的相关体会或总结,

从而达到启迪考生思维,指导考生串联考点,举一反三,学会解题的目的。

本书由恩波策划,负责组织作者和全书设计。全书的分工情况是:高等数学部分理工类由余术执笔,经济类由何勇执笔;线性代数部分一、二、四单元由李玉贞执笔,三、五、六单元由陈维新执笔;概率论与数理统计部分理工类由黄柏琴执笔,经济类由刘国庆执笔。

本书在成书前,曾在全国各地的数学考研辅导班试用,获得了良好的效果。在后期修改时,作者还参考了广大学员与恩波教育在线(www.enboedu.com)上众多考生的建议,进行了大量的修订、补充、归纳与提高,其特色明显,希望能够在众多考研数学辅导书中脱颖而出。

我们相信,考生通过本书系统的强化训练,一定能将相关考点的解题方法和解题技巧娴熟于胸,达到举一反三,触类旁通之效。

本书稿承南京大学数学系姜东平教授仔细审阅、润色,作者深表谢意。

限于水平和时间,书中难免有疏漏、不当之处,读者如发现,敬请不吝赐教,以便修正完善。

编著者

目 录

高等数学

第一单元 函数·极限·连续

一、方法和技巧精要 1

二、典型题解析 1

第一单元模拟训练 28

解答或提示 29

第二单元 一元函数微分学

第一节 导数与微分 31

一、方法和技巧精要 31

二、典型题解析 32

第二节 微分中值定理 44

一、方法和技巧精要 44

二、典型题解析 45

第三节 导数的应用 55

一、方法和技巧精要 55

二、典型题解析 55

第二单元模拟训练 66

解答或提示 67

第三单元 一元函数积分学

第一节 不定积分 70

一、方法和技巧精要 70

二、典型题解析 71

第二节 定积分 84

一、方法和技巧精要 84

二、典型题解析 85

第三单元模拟训练 97

解答或提示 98

第四单元 向量代数和空间解析几何

一、方法和技巧精要 100

二、典型题解析 100

第四单元模拟训练 112

解答或提示 113

第五单元 多元函数微分学

一、方法和技巧精要 114

二、典型题解析 114

第五单元模拟训练 126

解答或提示 127

第六单元 多元函数积分学

第一节 重积分 128

一、方法和技巧精要 128

二、典型题解析 128

第二节 曲线积分与曲面积分 142

一、方法和技巧精要 142

二、典型题解析 143

第六单元模拟训练 156

解答或提示 157

第七单元 无穷级数

一、方法和技巧精要 159

二、典型题解析 160

第七单元模拟训练 182

解答或提示 184

第八单元 常微分方程

一、方法和技巧精要 186

二、典型题解析 187

第八单元模拟训练 210

解答或提示 211

线性代数

第一单元 行列式

一、方法和技巧精要 213

二、典型题解析 213

第一单元模拟训练 220

解答或提示 220

第二单元 矩阵

一、方法和技巧精要 222

二、典型题解析	223
第二单元模拟训练	230
解答或提示	231
第三单元 向量	
一、方法和技巧精要	233
二、典型题解析	233
第三单元模拟训练	252
解答或提示	253
第四单元 线性方程组	
一、方法和技巧精要	258
二、典型题解析	259
第四单元模拟训练	267
解答或提示	268
第五单元 矩阵的特征值与特征向量	
一、方法和技巧精要	270
二、典型题解析	272
第五单元模拟训练	291
解答或提示	292
第六单元 二次型	
一、方法和技巧精要	296
二、典型题解析	297
第六单元模拟训练	312
解答或提示	313
概率论与数理统计	
第一单元 事件与概率	
一、方法和技巧精要	318
二、典型题解析	319
第一单元模拟训练	322
解答或提示	322
第二单元 随机变量及其分布	
一、方法和技巧精要	324
二、典型题解析	324

第二单元模拟训练	333
解答或提示	333
第三单元 二元随机变量	
一、方法和技巧精要	335
二、典型题解析	335
第三单元模拟训练	345
解答或提示	345
第四单元 数字特征	
一、方法和技巧精要	348
二、典型题解析	349
第四单元模拟训练	355
解答或提示	355
第五单元 几个极限定理	
一、方法和技巧精要	357
二、典型题解析	357
第五单元模拟训练	360
解答或提示	360
第六单元 抽样分析	
一、方法和技巧精要	361
二、典型题解析	361
第六单元模拟训练	364
解答或提示	364
第七单元 参数估计	
一、方法和技巧精要	366
二、典型题解析	366
第七单元模拟训练	372
解答或提示	372
第八单元 假设检验	
一、方法和技巧精要	374
二、典型题解析	374
第八单元模拟训练	377
解答或提示	378

高等数学

第一单元 函数·极限·连续

一、方法和技巧精要

概述



函数、极限、连续是整个高等数学的基础,尤其是导数、定积分、级数敛散性等重要概念均是直接建立在极限理论上.本章概念众多,仅函数极限定义就有 24 种之别,故深刻理解、领会极限概念的内涵显得尤为重要,惟有如此,才能真正做到融汇贯通,举一反三.切忌死记硬背.

核心考点

- (1) 数列及函数极限的计算及证明.
- (2) 无穷小量的比较.
- (3) 函数间断点及其分类.
- (4) 极限式中参数的确定.
- (5) 极限与变限积分、中值定理、级数及曲线性态相结合的综合题.

核心技巧

处理与极限有关问题的核心技巧有

- (1) 极限存在两准则:单调有界准则,夹逼准则.
- (2) 两个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad \text{或} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

后者的变化类型尤为多样.这里 x 可以是一个复杂的函数.

- (3) 洛必达法则. 只有 $\frac{0}{0}$ 型、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型才能使用洛必达法则,其他未定式 $\infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$ 要通过设置分母或借助于 $a^b = e^{b \ln a}$ 先行转化;在使用洛必达法则前优先考虑等价无穷小替换,以达到简化计算的目的.
- (4) 等价无穷小替换. 注意在加减运算中应避免使用等价无穷小替换.
- (5) Taylor 展开式.
- (6) 定积分定义.

二、典型题解析

① 无穷小量的比较

例 1.1(填空题) 已知当 $x \rightarrow 1^+$ 时, $\sqrt{3x^2 - 2x - 1} \ln x$ 与 $(x-1)^n$ 为同阶无穷小,则 n 值为

详细解答

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{3x^2 - 2x - 1} \ln x}{(x-1)^n} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{(3x+1)(x-1)} \ln[1+(x-1)]}{(x-1)^n} \\ &\stackrel{\text{令 } t = x-1}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{(3t+4)t} \cdot \ln(1+t)}{t^n} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{3t+4}}{t^n} \quad (\text{当 } t \rightarrow 0 \text{ 时, } \ln(1+t) \sim t) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{3t+4}}{t^{n-\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

当 $x \rightarrow 1^+$ 时, $\sqrt{3x^2 - 2x - 1} \ln x$ 与 $(x-1)^n$ 为同阶无穷小, 即上述极限值为非零常数, 取 $n = \frac{3}{2}$

时, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{3x^2 - 2x - 1} \ln x}{(x-1)^n} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{3t+4}}{t^{n-\frac{3}{2}}} = 2$. 故填 $n = \frac{3}{2}$.

例 1.2 (单项选择题) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 对三个无穷小量 $\int_0^{\sin x} \sin(t^3) dt$, $(1 - \cos x) \ln(1 + x^3)$, $e^{x \tan^2 x} - 1$ 按由低阶到高阶无穷小的顺序排列为().

(A) $\int_0^{\sin x} \sin(t^3) dt$, $(1 - \cos x) \ln(1 + x^3)$, $e^{x \tan^2 x} - 1$

(B) $\int_0^{\sin x} \sin(t^3) dt$, $e^{x \tan^2 x} - 1$, $(1 - \cos x) \ln(1 + x^3)$

(C) $e^{x \tan^2 x} - 1$, $\int_0^{\sin x} \sin(t^3) dt$, $(1 - \cos x) \ln(1 + x^3)$

(D) $e^{x \tan^2 x} - 1$, $(1 - \cos x) \ln(1 + x^3)$, $\int_0^{\sin x} \sin(t^3) dt$

详细解答 当 $x \rightarrow 0$ 时

$$\left. \begin{aligned} 1 - \cos x &\sim \frac{1}{2}x^2 \\ \ln(1 + x^3) &\sim x^3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (1 - \cos x) \ln(1 + x^3) \sim \frac{1}{2}x^5.$$

$$e^{x \tan^2 x} - 1 \sim x \tan^2 x \sim x^3.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin x} \sin(t^3) dt}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin^3 x) \cos x}{n x^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{n x^{n-1}} \stackrel{n=4}{=} \frac{1}{4},$$

$$\Rightarrow \int_0^{\sin x} \sin(t^3) dt \sim \frac{1}{4}x^4.$$

故选 C.

友情提醒 要熟练掌握下列常用的等价无穷小.

当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\sin x \sim \arcsin x \sim \tan x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1 \sim x,$$

$$a^x - 1 = e^{x \ln a} - 1 \sim x \ln a,$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2,$$

$$(1+ax)^\beta - 1 \sim a\beta x \quad (\beta > 0).$$

并有传递性

$$\frac{1}{2}x^2 \sim \int_0^x \sin t dt \sim \int_0^x \arcsin t dt \sim \int_0^x \tan t dt \sim \int_0^x \arctan t dt \sim \int_0^x \ln(1+t) dt.$$

例 1.3 (单项选择题) 选择适当的参数 a, b 使当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$f(x) = \arctan x - \frac{x+ax^3}{1+bx^2}.$$

为 x 的尽可能高阶的无穷小, 阶数 N 的最大值为().

(A) $N = 4$

(B) $N = 5$

(C) $N = 6$

(D) $N = 7$

详细解答 即要求使 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^N}$ 存在且不为 0 的最大 N 值. 利用 Taylor 展开式

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + o(x^8),$$

得

$$\begin{aligned} f(x) &= \arctan x - \frac{x+ax^3}{1+bx^2} \\ &= \frac{\left(b-a-\frac{1}{3}\right)x^3 + \left(\frac{1}{5}-\frac{b}{3}\right)x^5 + \left(\frac{b}{5}-\frac{1}{7}\right)x^7 + o(x^8)}{1+bx^2}. \end{aligned}$$

从而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^N} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(b-a-\frac{1}{3}\right)x^3 + \left(\frac{1}{5}-\frac{b}{3}\right)x^5 + \left(\frac{b}{5}-\frac{1}{7}\right)x^7 + o(x^8)}{(1+bx^2)x^N}.$$

令

$$\begin{cases} b-a-\frac{1}{3} = 0, \\ \frac{1}{5}-\frac{b}{3} = 0. \end{cases}$$

解得 $a = \frac{4}{15}, b = \frac{3}{5}$. 此时分子 x^7 前的乘数 $\frac{b}{5} - \frac{1}{7} = -\frac{4}{175} \neq 0$, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^7} = -\frac{4}{175},$$

故选 D.

友情提醒 当无穷小量阶数较高时, 为避免反复使用洛必达法则, 可考虑运用 Taylor 展开式.

例 1.4 (单项选择题) 设函数 $f(x), g(x)$ 连续, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶但非等价无穷小. 令

$$F(x) = \int_0^x f(x-t) dt, \quad G(x) = \int_0^1 xg(xt) dt.$$

则当 $x \rightarrow 0$ 时, $F(x)$ 是 $G(x)$ 的().

(A) 高阶无穷小

(B) 低阶无穷小

(C) 同阶但非等价无穷小

(D) 等价无穷小

详细解答 $F(x) = \int_0^x f(x-t) dt \stackrel{u=x-t}{=} \int_x^0 f(u)(-du) = \int_0^x f(u) du,$

$$G(x) = \int_0^1 xg(xt) dt \stackrel{u=xt}{=} \int_0^x g(u) du,$$

所以,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{\int_0^x g(u) du} \stackrel{\frac{0}{0} \text{ 型}}{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = C \neq 0, 1$$

故选 C.

友情提醒 当定积分的被积(隐)函数之变元较复杂时, 首先应作变量代换, 简化处理.

2 函数的间断点及其类型判别

例 1.5 求下列函数的间断点并判别其类型

$$(1) f(x) = \frac{\ln|x|}{x^2 + 2x - 3};$$

$$(2) f(x) = \lim_{t \rightarrow x} \left(\frac{\sin x}{\sin t} \right)^{\frac{x}{\sin x - \sin t}}.$$

详细解答 (1) $f(x) = \frac{\ln|x|}{(x+3)(x-1)}$ 在 $x = -3, 0, 1$ 处无定义, 由于

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\ln(-x)}{(x+3)(x-1)} = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln|x|}{(x+3)(x-1)} = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{(x+3)(x-1)} \stackrel{\frac{0}{0} \text{ 型}}{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2x+2} = \frac{1}{4},$$

故 $x = -3, x = 0$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点(属第二类间断点), $x = 1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点(属第一类间断点).

$$(2) f(x) = \lim_{t \rightarrow x} \left(\frac{\sin x}{\sin t} \right)^{\frac{x}{\sin x - \sin t}} \quad (1^\infty \text{ 型})$$

$$= \lim_{t \rightarrow x} \left[\left(1 + \frac{\sin x - \sin t}{\sin t} \right)^{\frac{\sin x}{\sin x - \sin t}} \right]^{\frac{x}{\sin t}}$$

$$= e^{\frac{x}{\sin x}},$$

$x = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 处函数 $f(x) = e^{\frac{x}{\sin x}}$ 没有定义.

当 $k = 0$ 时, 即在 $x = 0$ 处

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{x}{\sin x}} = e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = e.$$

故 $x = 0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点(属第一类间断点).

当 $k \neq 0$ 时, 在 $x = k\pi$ 处

$$\lim_{x \rightarrow k\pi} f(x) = \lim_{x \rightarrow k\pi} e^{\frac{x}{\sin x}} \text{ 不存在,}$$

故 $x = k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) 为 $f(x)$ 的第二类间断点.

例 1.6 讨论函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1} & x \neq 0 \text{ 时,} \\ 1 & x = 0 \text{ 时,} \end{cases}$$

在 $x = 0$ 处的连续性,若不连续请说明它的类型.

详细解答

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1} = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1} = 1,$$

即 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 均存在. 但 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, 故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续, $x = 0$ 为其跳跃间断点(属第一类间断点).

友情提醒 极限式中含有 e^x (一般指数函数 a^x) 当 $x \rightarrow \infty$, 或含有 $e^{\frac{1}{x}}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时, 要分 $x \rightarrow \pm \infty$ 或左右极限 $x \rightarrow 0^\pm$ 来处理.

3 极限式中参数的确定

例 1.7(填空题) 设 $\alpha > 0$, $\beta \neq 0$ 且满足极限式

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x^{2\alpha} + x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} - x^2] = \beta,$$

则 $(\alpha, \beta) =$ _____.

详细解答

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x^{2\alpha} + x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} - x^2] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[\left(1 + \frac{1}{x^\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - 1 \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\alpha} \frac{1}{x^\alpha} \quad ((1+at)^\beta - 1 \sim \alpha\beta t, \text{ 当 } t \rightarrow 0 \text{ 时})$$

$$= \frac{1}{\alpha} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^\alpha}$$

$$= \begin{cases} 0, & \alpha > 2 \text{ 时,} \\ \frac{1}{2}, & \alpha = 2 \text{ 时,} \\ \infty, & 0 < \alpha < 2 \text{ 时.} \end{cases}$$

又由题设 $\beta \neq 0$ 故 $(\alpha, \beta) = \left(2, \frac{1}{2}\right)$.

例 1.8(单项选择题) 设 a, b 为两实常数, 且有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left[\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt + a \right] = b,$$

则 a, b 值分别为().

(A) $a = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}, b = 0$

(B) $a = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, b = 0$

$$(C) a = 0, b = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$(D) a = 0, b = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

详细解答 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left[\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt + a \right] = b$ 知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt + a \right] = 0,$$

即

$$a = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt = -\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

借助于二重积分的极坐标形式

$$\begin{aligned} \left[\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \right]^2 &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr \\ &= \frac{\pi}{2} \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right) \Big|_{r=0}^{+\infty} = \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

所以 $a = -\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 而

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left[\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt + a \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt + a}{e^{-x}}$$

$$\stackrel{\frac{0}{0} \text{ 型}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{-x}}{-e^{-x}} = 0.$$

故选 A.

例 1.9 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3-1} + \lambda x + \mu) = 0$, 试确定 λ, μ 之值.

详细解答 由 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3-1} + \lambda x + \mu) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^3}} + \lambda + \frac{\mu}{x} \right) = 0$,

知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^3}} + \lambda + \frac{\mu}{x} \right) = 0$, 即 $1 + \lambda = 0, \lambda = -1$.

而 $\mu = -\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3-1} + \lambda x)$

$$= -\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^3}} + \lambda \right)$$

$$= -\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^3}} - 1 \right)$$

$$\stackrel{(1+at)^\beta - 1 \sim \beta at, \text{ 当 } t \rightarrow 0 \text{ 时}}{=} -\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{x^3} \right)$$

$$= 0,$$

即有 $\lambda = -1, \mu = 0$.

例 1.10 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax + \sin x}{\int_{\beta}^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt} = \gamma$ ($\gamma \neq 0$), 试确定 a, β, γ 之值.

详细解答

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \int_{\beta}^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt &= \lim_{x \rightarrow 0} (\alpha x + \sin x) \cdot \int_{\beta}^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (\alpha x + \sin x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\beta}^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt}{\alpha x + \sin x} \\ &= 0 \cdot \frac{1}{\gamma} = 0, \end{aligned}$$

注意到被积函数 $\frac{\ln(1+t^3)}{t} > 0$, 故 $\beta = 0$.

$$\begin{aligned} \gamma &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha x + \sin x}{\int_0^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt} \stackrel{\frac{0}{0} \text{ 型}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha + \cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}} \\ &\stackrel{\ln(1+x^3) \sim x^3, x \rightarrow 0 \text{ 时}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha + \cos x}{x^2}, \end{aligned}$$

故由 $\lim_{x \rightarrow 0} (\alpha + \cos x) = \alpha + 1 = 0$ 得 $\alpha = -1$.

$$\gamma = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

综上 $\alpha = -1, \beta = 0, \gamma = -\frac{1}{2}$.

例 1.11 设函数

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + ax + b}{1 + x^{2n}}$$

处处连续, 试确定 a, b 之值.

详细解答

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + ax + b}{1 + x^{2n}} = \begin{cases} ax + b, & |x| < 1 \text{ 时}; \\ \frac{1}{x}, & |x| > 1 \text{ 时}; \\ -\frac{1}{2}(1 + a - b), & x = -1 \text{ 时}; \\ \frac{1}{2}(1 + a + b), & x = 1 \text{ 时}. \end{cases}$$

由 $f(x)$ 处处连续知 $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$. 即

$$\begin{cases} -1 = b - a = -\frac{1}{2}(1 + a - b), \\ a + b = 1 = \frac{1}{2}(1 + a + b), \end{cases}$$

解得 $a = 1, b = 0$.

例 1.12 试确定常数 b , 使极限

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{-a}^a \frac{1}{a} \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) \cos(b-x) dx$$

存在, 并求此极限.

详细解答

$$\begin{aligned} I &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-a}^a \frac{1}{a} \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) \cos(b-x) dx \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\int_{-a}^a (a - |x|) \cos(b-x) dx}{a^2} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a \int_{-a}^a \cos(b-x) dx - \int_{-a}^a |x| \cos(b-x) dx}{a^2} \\ &\stackrel{\frac{0}{0} \text{ 型}}{=} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\int_{-a}^a \cos(b-x) dx + a \cos(b-a) + a \cos(b+a) - |a| \cos(b-a) - |a| \cos(b+a)}{2a} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\int_{-a}^a \cos(b-x) dx + 2(a - |a|) \cos a \cos b}{2a}. \end{aligned}$$

考虑左右极限

$$\begin{aligned} &\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{\int_{-a}^a \cos(b-x) dx + 2(a - |a|) \cos a \cos b}{2a} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{\int_{-a}^a \cos(b-x) dx}{2a} \stackrel{\frac{0}{0} \text{ 型}}{=} \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{\cos(b-a) + \cos(b+a)}{2} = \cos b; \\ &\lim_{a \rightarrow 0^-} \frac{\int_{-a}^a \cos(b-x) dx + 2(a - |a|) \cos a \cos b}{2a} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^-} \frac{\int_{-a}^a \cos(b-x) dx + 4a \cos a \cos b}{2a} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^-} \frac{\int_{-a}^a \cos(b-x) dx}{2a} + \lim_{a \rightarrow 0^-} 2 \cos a \cos b \\ &= \cos b + 2 \cos b = 3 \cos b. \end{aligned}$$

要使极限 I 存在, 其充要条件是 $3 \cos b = \cos b$, 故 $\cos b = 0$, 即 $b = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1,$

$\pm 2, \dots$), 且此时 $I = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-a}^a \frac{1}{a} \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) \cos(b-x) dx = 0$.

4 未定式的定值法

例 1.13 求下列函数极限

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}};$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x} - \sqrt{\cos x}};$

(5) $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \varphi \sqrt{\cos 2\varphi} \sqrt[3]{\cos 3\varphi} \cdots \sqrt[n]{\cos n\varphi}}{\ln(1+\varphi) - \varphi};$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\tan x}}{e^x - 1};$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan \frac{1}{x} + e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x} \int_0^{\frac{1}{x}} e^t dt};$

(6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin^2 x + e^x) - x}{\ln(x^2 + e^{2x}) - 2x}.$

详细解答

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}} \stackrel{t = \frac{1}{x^2}}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{50}}{e^t} \stackrel{\frac{\infty}{\infty} \text{型}}{\text{洛必达法则}} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{50t^{49}}{e^t}$

$$\stackrel{\frac{\infty}{\infty} \text{型}}{\text{洛必达法则}} \cdots = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{50!}{e^t} = 0.$$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\tan x}}{e^x - 1}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\tan x}}{x} \quad (e^x - 1 \sim x, \text{当 } x \rightarrow 0 \text{ 时})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x}{x(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1-\tan x})} \quad (\text{分子有理化})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1-\tan x}} \quad (\tan x \sim x, \text{当 } x \rightarrow 0 \text{ 时})$$

 $= 1.$

(3) 法 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x} - \sqrt{\cos x}}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sqrt{1+x\sin x} + \sqrt{\cos x})}{1+x\sin x - \cos x} \quad (\text{分母有理化})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sqrt{1+x\sin x} + \sqrt{\cos x})}{x\sin x + 2\sin^2 \frac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x} + \sqrt{\cos x}}{\frac{\sin x}{x} + \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}}$$

$$= \frac{1+1}{1+\frac{2}{4} \cdot 1^2} = \frac{4}{3}.$$

法 2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x} - \sqrt{\cos x}}$

$$\begin{aligned}
 & \frac{0}{0} \text{ 型} \\
 & \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\frac{\sin x + x \cos x}{2\sqrt{1+x \sin x}} - \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}} \\
 & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{\frac{1}{\sqrt{1+x \sin x}} \left(\frac{\sin x}{x} + \cos x \right) + \frac{1}{\sqrt{\cos x}} \frac{\sin x}{x}} \\
 & = \frac{4}{3}.
 \end{aligned}$$

法3 利用等价无穷小替换. 当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\sqrt{1+x \sin x} - 1 \sim \frac{1}{2} x \sin x \sim \frac{1}{2} x^2,$$

$$\sqrt{\cos x} - 1 = \sqrt{1 + (\cos x - 1)} - 1 \sim \frac{1}{2} (\cos x - 1) \sim -\frac{1}{4} x^2,$$

即有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x^2} = -\frac{1}{4}$, 从而

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}} \\
 & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{(\sqrt{1+x \sin x} - 1) - (\sqrt{\cos x} - 1)} \\
 & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sqrt{1+x \sin x} - 1}{x^2} - \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x^2}} \\
 & = \frac{1}{\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{4}{3}.
 \end{aligned}$$

友情提醒 等价无穷小替换仅适合于乘积中的因子, 加减运算中的项不宜使用.

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan \frac{1}{x} + e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x} \int_0^{\frac{1}{x}} e^{t^2} dt} \stackrel{u = \frac{1}{x}}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\arctan u + e^u}{u \int_0^u e^{t^2} dt}$$

$$\frac{\infty}{\infty} \text{ 型} \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{\int_0^u e^{t^2} dt + u e^{u^2}}$$

$$= \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{\int_0^u e^{t^2} dt + u e^{u^2}} + \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{2u e^{u^2}}{\int_0^u e^{t^2} dt + u e^{u^2}}$$

$$= \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{2u e^{u^2}}{\int_0^u e^{t^2} dt + u e^{u^2}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty} \text{ 型}}{\xrightarrow{\text{洛必达法则}}} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{2e^{u^2} + 4u^2 e^{u^2}}{2e^{u^2} + 2u^2 e^{u^2}}$$