山东省省级精品课程教材
面向21世纪高等学校教材
《香樟书库》系列立项校本教材

香樟书库

概率论与数理统计

王建民 江兆林 主编

中国矿业大学出版社
China University of Mining and Technology Press

山东省省级精品课程教材
面向21世纪高等学校教材
《香樟书库》系列立项校本教材

概率论与数理统计

王建民　江兆林　主编

中国矿业大学出版社

内容提要

本书是山东省省级精品课程配套教材。本书着重介绍了概率论与数理统计的基本概念、基本原理、基本方法，强调直观性、准确性，表述从具体问题入手，由浅入深，使难点分散，便于组织教学。除每节都配有适量习题外，各章之后还配有综合性课外训练题，有利于培养学生应用意识。

本书结构严谨，逻辑清晰，例题丰富，习题量较大，注重可读性，突出概率论与数理统计的基本思想和应用背景。可供高等学校数学系各专业学生使用，也可供理工科学生选用或参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/王建民，江兆林主编. —徐州：中国矿业大学出版社，2008.8

ISBN 978-7-5646-0013-6

Ⅰ.概… Ⅱ.①王…②江… Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 120833 号

书　　名 概率论与数理统计
主　　编 王建民　江兆林
责任编辑 吴学兵　姜　华
出版发行 中国矿业大学出版社
（江苏省徐州市中国矿业大学内　邮编 221008）
网　　址 http//www.cumtp.com　**E-mail**:cumtpvip@cumtp.com
印　　刷 徐州中矿大印发科技有限公司
经　　销 新华书店
开　　本 787×960 1/16　**印张** 18.75　**字数** 355 千字
版次印次 2008 年 8 月第 1 版　2008 年 8 月第 1 次印刷
定　　价 29.80 元

《香樟书库》总序

临沂师范学院院长　韩延明

2006年8月，由我校教师主编的首批立项资助教材《香樟书库》系列校本教材由山东大学出版社正式出版。在此基础上，根据教学计划和课程建设的实际需要，我们又很快启动了第二批立项教材的编撰工作。在学校教材建设指导委员会的组织、指导与协调下，教材编著者们夜以继日地辛勤劳作，如今已顺利完成了第二批教材的编撰工作，即将付梓面世。这批教材的编撰出版，既是我校校本教材建设工作步入规范化、系统化、科学化轨道的一种重要标志，也是我校认真贯彻落实国家教育部、山东省教育厅高等院校质量建设工程、促进学校内涵发展的一项重大举措。

我认为，对今日之高校而言，思路决定出路，就业决定专业，能量决定质量，质量决定力量。办学质量始终是一所学校的声誉之源、立校之本、拓展之基，是高等学校可持续发展的一条生命线。提高教学质量，理应是高校矢志不渝所追寻的永恒主题和永远高奏的主旋律，这就是我们常讲的"教学为本，质量立校"。而众所瞩目的高校办学质量又始终贯穿于实现"人才培养、知识创新和服务社会"三大职能的各个具体环节之中，其中既有人才培养的质量问题，也有科技成果和社会服务的质量问题，但人才培养质量是核心和旨归。孔子曰："君子务本，本立而道生"。培养高质量人才始终是大学责无旁贷的神圣使命，而人才培养的主渠道又相对集中于课堂教学。课堂教学的基本要素是教师、学生和教材。

教材即教学材料的简称。细言之，它是指依据教学大纲和教学实际需要为教师、学生选编的教科书、讲义、讲授提纲、参考书目、网络课程、图片、教学影片、唱片、录音、录像以及计算机软件等。古人云："书山有路勤为径，学海无涯苦作舟"。在漫漫求学路途上，千辛苦、万劳累，呕心沥血、夜以继日，书总会一直忠诚地陪伴着学习者，承前启后、继往开来，输送知识、启迪智慧，成为学习者解疑释难的知心朋友和指点迷津的人生导师，而学生之"书"的主体是教材。教材是教学内容和教学方法的知识载体，是教师实施课堂教学的依据和工具，是学生最基本的学习参考材料，是师生互动、教

学相长、顺利完成教学任务的必要基础。“教本教本，教学之本”。教材建设水平，是衡量一所高校教学质量与学术水平的重要标志之一。临沂师范学院历来十分重视教材建设工作，曾多次对教材建设工作进行专题研究。几年前，为了督导教师选用优质教材，提高教学质量，强化教学管理，优化教学环境，学校曾严格规定：全部本科教材均使用教育部、教育厅统编教材或获奖教材，禁止使用教师自编教材，从而保证了教材质量，为规范、完善本科教学工作奠定了良好的基础。

近年来，伴随着我国高等教育大众化的迅速推进和高校本科教学工作水平评估的深入进行，临沂师范学院实现了超常规、跨越式发展，其中之一是卓有成效地开展了“四大建设”，即“深化课程建设，优化专业建设，亮化学科建设，强化师资队伍建设”，使专业学科建设水平与教师教学水平不断提高，课程体系建设与课程开出能力不断增强，课堂教学改革与课外活动革新不断深入，相继涌现出一批质量上乘、优势明显、特色突出的优质课程和爱岗敬业、授课解惑、教书育人的优秀教师，因而启动自编教材工作的条件日臻成熟。古人云：“临渊羡鱼，不如退而织网”。2006 年，学校正式启动了首批立项教材建设工作，紧紧围绕人才培养目标，密切联系教学改革及课程建设实际，配合学校课程体系构建、教学内容改革及系列选修课程建设，在确保质量的基础上，正式出版了第一批校本教材，并于当年投入使用，得到了师生的普遍认可和同行专家的高度评价。在认真总结第一批立项教材建设经验的基础上，2007 年，学校又启动了第二批立项教材的编撰与出版工作。

我校的教材建设是有计划有组织有步骤进行的，经过教材建设指导委员会专家们的精心论证和严格审核，确定了校本教材建设的重点和选题范围：一是解决教学急需的，填补学科、专业、课程空白的新教材；二是体现我校教师在某一学科、专业领域独具优势、特色和应用型人才的国际化培养模式所需要的专业基础课和选修课教材；三是针对我校作为区域性院校特点，结合地方社会政治、经济、科技、文化需求所开设的地方课程教材。

常言道：意识决定形态，细节决定成败。在教材编撰原则上，我们强调：一是注重知识性与思想性相辅相成；二是注重学术性与可读性融为一体；三是注重科学性与学科性彼此糅合；四是注重理论性与实践性相得益彰；五是注重统一性与多样性有机结合；六是注重现实性与前瞻性有效拓展。记得我国著名教育家张楚廷教授曾提出了教材编写的“五最”准则，即最佳容量准则、最广泛效用准则、最持久效应准则、最适于发展准则、最宜于传授准则，我深表赞同。

在教材编写内容上，我们要求：既重视对国内外该领域经典的基本理论问题进行透彻的解析，又对当前教育现实中所面临的新现象、新理论、新方

法给予必要的回应；既考虑到如何有利于教师的课堂讲授与辅导，又顾及到如何有助于学生的课后复习和思考；既能反映我校教学内容和课程体系改革的基本方向，又要展示我校教材建设及学术研究的最新成果，适应我校创建精品课程、优质课程和品牌课程的实际需要。在教材教法改革上，我们倡导：秉持素质教育理念，坚持课堂讲授与课堂讨论相结合、教师讲授与学生自学相结合、理论学习与案例分析相结合、文本学习与网络学习相结合，“优化课内，强化课外”，重视教师启发式、研讨式、合作式、个案式等教学方式方法的科学运用，重视学生思维能力、创新能力、实践能力与创业能力的培养和训练，力图为学生知识、能力、素质的协调发展创设坚实的基础和有利的条件。可喜的是，这些方面都在教材编写中得到了充分体现。同时，所有教材均是在试用多年的成熟讲义的基础上经编著者精心修改和委员会严格审定后出版的，保证了教材的思想性、科学性、系统性、适用性、启发性和相对稳定性。作者所撰章节，都是自己多年来多次授教与潜心研究的内容，在阐述上颇有真知灼见，能够引领和推动学生对有关基本理论和基本技能问题产生独特的理解和感悟，最终进入学与习、学与辑、学与思、学与行、学与创相结合的学人境界。学校对所有立项出版教材均给予经费资助。

临沂师范学院《香樟书库》系列立项校本教材的编撰出版，饱含了编著者们的辛勤劳动和指导委员会成员的热情支持。“香樟”为常绿乔木，树冠广展，枝叶茂密，香气浓郁，长势雄伟，乃优质行道树及庭荫树。我们之所以命名为《香樟书库》，乃在于香樟树根系发达，材质上乘，耐贫瘠，能抗风，适应性广，生命力强。它茁壮、清新、芳香，代表健康、温馨、希望，寓意我们的校本教材建设一定也会像 2001 年首批由南方移植于我校校园，如今已是根深叶茂、枝繁冠阔的香樟树一样，郁郁葱葱，生机勃勃，充满希望和力量。然而，由于此项工作尚处于尝试、探索阶段，疏漏、偏颇甚或错误之处在所难免，正所谓“始生之物，其形必丑”，敬请各位同仁和同学批评指正，以期再版时予以修订。

最后，摘录俄国著名文学家托尔斯泰的一句名言与同学们共勉：“选择你爱的，爱你选择的！”

2008 年 6 月 26 日

草于羲之故里

前　言

《概率论与数理统计》是一门研究随机现象数量规律的学科。它的理论与方法已被广泛地应用于自然科学、社会科学、工业、农业、医学、军事、经济、金融、管理等领域。目前,《概率论与数理统计》已成为高等学校许多专业重要的基础课程。

我校于2003年开展的"课程建设年"活动，要求对现有课程体系与教学内容进行清理与重构，增加与时代同步的新知识、新思想，提高课程内容的技术含量。本着这一精神，经过几年努力，我们主持的《概率论与数理统计》于2007年被评为山东省高等学校省级精品课程。

作为精品课程建设的重要内容，我们编写本教材时，尽量吸收国内外《概率论与数理统计》方面的最新研究成果和课程改革的先进经验，体现创新教学理念。编写过程中，根据多年的教学经验精选内容，注重思维开发，内容深入浅出，让学生了解问题产生的背景。立足于激发学生自主学习，有利于综合素质和创新能力的提高。

因此，与同类教材相比，本教材体现了四大特点：第一，淡化某些繁杂形式，注重核心内容，但简而不略；第二，加强了理论与实际的联系，注重了该学科知识在社会生活，特别是在经济与工程技术方面的具体应用；第三，尽量避免使用偏深的数学知识，只要具备《数学分析》和《线性代数》基本知识即可，教材所有推理论证都是在这一范围内进行的；第四，将数学建模思想融入教材中，通过对实际问题处理，加强学生建模思维训练，培养学生解决实际问题能力。

鉴于《概论与数理统计》密切联系实际，思维方法独特，同时又是高校学生普遍感到难学的课程，本书除每节相应配备适量习题之外，还在各章之后增设题材广泛的"课外训练题"。这些题目有的是现实问题中的数学模型，有的是对基本理论的有益补充，还有的是近年来硕士研究生入学试题。目的是帮助学生开阔视野，加强解题能力训练。

在学校大力支持下，本教材作为我校《香樟书库》系列立项校本教材出版，这对我们是一个巨大鼓舞。正是学校领导和数学系领导的鼓励和帮助，才使我们有信心有精力完成此书编写。

本书除作为普通师范类院校数学系的教材外，还可以作为高等学校理工科及经济类各专业和其他有关专业相应课程的教材或教学参考书，以及准备报考研究生的学生与工程技术人员的参考书。

限于编者水平，加之时间仓促，书中的疏漏与错误之处在所难免，敬请读者批评指正。

编者　于临沂师范学院

2008 年 6 月

目　　录

第 1 章　随机事件与概率

概率论与数理统计是研究随机现象及其规律的一门数学学科. 随机事件与概率是概率论的两个基本概念. 本章从随机现象出发,引入了随机事件的关系与运算,讨论了它们的性质,给出了概率的统计定义、古典定义和几何定义,以及三个重要的概率公式——乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式,建立了公理化结构.

本章重点是古典概型、伯努利概型的概率计算及三大公式的运用,难点是古典概型的概率计算.

1.1　随机事件与样本空间

一、随机现象与随机试验

观察自然现象、社会经济现象以及在工程技术中,不外乎有两类现象:一类称决定性现象(或称必然现象). 如带电小球有"同性相斥,异性相吸"的特性,又如"密闭容器内的气体随着温度升高其压力增大"等,这些现象实际上是事前可以预言结果的现象,在一定条件下,结果完全肯定或完全否定,没有其他结果. 另一类现象称非决定性现象(或称偶然现象). 如一个孕妇在分娩之前不知她孕育的是男孩还是女孩,又如向桌上任意抛掷一枚均匀硬币,落下后是"正面朝上"还是"正面朝下",在抛之前完全不能决定,可能是"正面朝上",也可能"正面朝下",这种只有在事后才能知道它所发生的结果的现象在概率论里称为随机现象.

随机现象并不是杂乱无章、无序可循的,有其自身的规律性. 研究随机现象是通过随机试验来进行的.

(1) 抛掷一枚硬币,观察正、反面出现的情况.

(2) 抛掷一颗骰子,观察出现的点数.

(3) 记录某电话交换台一分钟内接到呼唤的次数.

(4) 在一批灯泡中任意抽取一只,测试它的寿命.

在上述各例中,我们发现它们具有共同的特点:

(1) 在相同的条件下,试验可重复地进行;

(2) 每次试验前,试验的所有可能结果是明确的,且不止一个;

(3) 每次试验出现什么结果事前不能确定.

定义1 具有上述(1) ~ (3) 三个特点的试验称为**随机试验**(简称试验),一般用 E 表示.

二、样本空间

对于一个试验,我们关心的是它可能出现的各种结果. 比如抛一颗骰子,它出现"1"、"2"、"3"、"4"、"5"、"6" 点都是可能的;又如抛两枚均匀硬币的试验,则可能出现的结果有(正,正)、(正,反)、(反,正)、(反,反) 四种. 因此,对于不同的试验, 结果不相同.

定义2 随机试验的每一个可能的基本结果称为**样本点**(或**基本事件**),一般用 ω 及带有下标的 $\omega_0,\omega_1,\omega_2,\cdots$ 表示.

定义3 随机试验的样本点的全体称为**样本空间**,用 Ω 表示. 由于随机试验的所有结果在试验前是明确的,所以基本事件(或样本点) 也是明确的,故样本空间也是确定的.

例如上面所举的各种例子的样本空间为

例1 $\omega_1 = \{出现正面\}$, $\omega_2 = \{出现反面\}$,

$\Omega = \{\omega_1,\omega_2\}$.

例2 $\omega_i = \{出现\ i\ 点\}, i = 1,2,3,4,5,6,$

$\Omega = \{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$.

例3 $\omega_i = \{一分钟接到\ i\ 次呼唤\}, i = 0,1,\cdots$

$\Omega = \{\omega_0,\omega_1,\cdots\}$.

例4 设灯泡的寿命为 t,

$\Omega = \{t : t \geqslant 0\}$.

可见,样本空间中的元素是由试验的内容确定的. 对于同一试验,样本空间有不同的表示方法. 如例1中,若用"0" 表示"出现正面","1" 表示"出现反面",则 $\Omega = \{0,1\}$;"0" 和"1" 还可描述射击中"没击中" 与"击中". 所以同一个样本空间可以描述不同的随机试验.

三、随机事件

由基本事件定义知,试验的每一个可能结果是基本事件. 为更明确随机事件的概念,下面再举一例说明.

例5 设 E 为掷骰子试验,其样本空间 $\Omega = \{出现1,2,3,4,5,6点\}$,共有6个样本点. 令 A = "出现6点",B = "出现偶数点",C = "出现的点数小于4",则

A,B,C 均为 E 的结果,A 是 E 的一个样本点,所以 A 也是一个基本事件. 而 B 却含有三个样本点"2"、"4"、"6",是由"出现 2 点"、"出现 4 点"、"出现 6 点"三个基本事件结合而成的. 同理,C 也是由"出现 1 点"、"出现 2 点"、"出现 3 点"三个基本事件组成的. 故称 B,C 为**复杂事件**,即由若干个基本事件(样本点)组成的事件.

定义 4 不管是基本事件,还是复杂事件,在一次试验中出现与否都带有随机性,都称为**随机事件**(简称事件),常用大写字母 A,B,C 等表示.

所谓试验中**某个事件发生**,是指该事件所含的样本点之一在试验时发生. 如例 5 中,若做一次试验,掷出的是 2 点,则称 B 发生;若掷出的是 5 点,则 A,B,C 均不发生. 如果某事件在一次试验中一定发生,则称这事件为**必然事件**,如样本空间 Ω 为必然事件. 如果某事件在一次试验中一定不发生,则称这事件为**不可能事件**,用 $\varnothing$ 表示. 实际上,必然事件、不可能事件都不是随机事件,但为方便讨论问题,我们也把它们算作随机事件.

四、随机事件的运算和性质

由于样本空间是一个以样本点为元素的集合,所以,从集合论的观点来看,事件可定义为集合 Ω 的某些子集. 因此,事件之间的关系及运算与集合间的关系及运算相似. 下面就在给定的同一样本空间中讨论事件之间的关系和事件之间的一些运算,有助于将复杂事件分解成简单事件,对以后复杂事件的概率计算是非常有益的.

1. **包含** 如果事件 A 发生,必然导致事件 B 发生,则称事件 B 包含了事件 A,记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$. 如例 5,若 A 发生,则 B 也发生,所以,$B \supset A$. 用维恩(Venn)图给以直观的解释:如图 1-1 所示,用方框代表必然事件 Ω,A 和 B 是两个事件,有 $A \subset \Omega$,$B \subset \Omega$ 对于"A 发生必然导致 B 发生",其含义就是"属于 A 的 ω 必属于 B",A 中的每一个样本点全包含在 B 内,所以事件 $A \subset B$ 的含义与集合论中的集合 $A \subset B$ 的含义是一致的. 显然,不可能事件 $\varnothing$ 对于任何事件 A 均有 $\varnothing \subset A$.

2. **相等** 如果事件 $A \subset B$,$B \subset A$ 同时成立,则称事件 A 与事件 B 相等,记作 $A = B$. 这表示若 A 发生 B 必然发生;反之,B 发生必然 A 发生. 在例 5 中,如果令 A = "出现 2,4,6 点",B = "出现偶数点",显然,$A = B$.

3. **和(并)** 如果事件 A 与 B 中至少有一个发生导致另一个事件 C 发生,则称 C 为事件 A 与 B 的和,记作 $C = A \cup B$. 如例 5 中,$A \cup B$ = "出现偶数点",如图 1-1 所示.

4. **积(交)** 如果事件 A 与 B 同时发生才能导致事件 C 发生,则称 C 为 A 与 B 的积(或交),记作 $C = A \cap B$ 或 $C = AB$. 如例 5 中,$A \cap B$ = "出现 6 点",$B \cap C$ = "出现 2 点".

5. **差**　如果事件A发生而B不发生才导致事件C发生,则称事件C为A与B的差,记作$C = A - B$. 如图1-1所示. 在例5中,$B - C$ = “出现4点,6点”.

6. **互不相容(互斥)**　如果事件A与B不能同时发生,称A与B互不相容,记$A \cap B = \varnothing$是不可能事件. 如例5中,$A \cap C = \varnothing, A \cap \bar{A} = \varnothing$.

7. **对立(逆)**　如果A是一事件,令$\bar{A} = \Omega - A$,称$\bar{A}$是A的逆,或称$\bar{A}$是A的对立事件,即A发生,则$\bar{A}$不发生;反之,若$\bar{A}$不发生,则A发生. 如例5中,令A = “出现奇数点”,则$\bar{A}$ = “出现偶数点”,如图1-1所示.

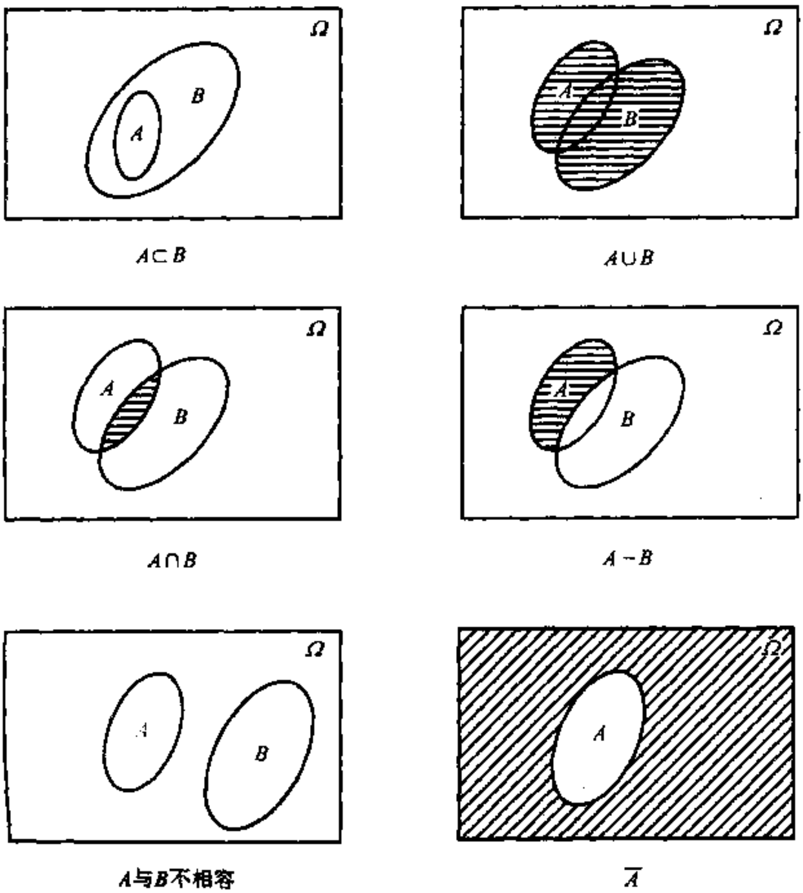

图1-1

注:以上定义和与积关系可推广到有限多个事件的场合,事件与集合之间对应关系(略).

下面再举一例帮助我们理解事件间的关系.

例 6 设 A,B,C 是 Ω 中的随机事件,则

(1) 事件"A 与 B 发生,C 不发生" 可表示成 $AB\overline{C}$ 或 $AB-C$.

(2) 事件"三个事件 A,B,C 中至少有一个发生" 可表示成 $A\cup B\cup C$.

(3) 事件"三个事件 A,B,C 中恰有一个发生" 可表示成 $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$.

(4) 事件"三个事件 A,B,C 中有不多于一个事件发生" 可表示为

$$\overline{A}\,\overline{B}C\cup\overline{A}B\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}.$$

(5) 事件"三个事件 A,B,C 都发生" 可表示为 $A\cap B\cap C$ 或 ABC.

事件运算满足下列规则:

(1) 交换律 $A\cup B=B\cup A,AB=BA$;

(2) 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,

$(AB)C=A(BC)$;

(3) 分配律 $(A\cup B)\cap C=AC\cup BC$,

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

(4) 德·莫根(De morgan) 定理

$$\overline{A_1\cup A_2}=\overline{A_1}\cap\overline{A_2},\ \overline{A_1\cap A_2}=\overline{A_1}\cup\overline{A_2},$$

更一般地有 $\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\ \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$

证明从略.

顺便指出,事件是由样本空间 Ω 中的某些样本点构成的,所以它是 Ω 的子集. 若把 Ω 中所有事件的子集归结在一起组成一个集合,这个集合称为**事件域**,记为 $\mathscr{F}$,即 $\mathscr{F}=\{A\mid A\subset\Omega,A\text{ 是事件}\}$.

习 题 1.1

1. 填空

(1) 随机事件是样本空间的________;

(2) 样本空间是随机试验的________;

(3) 掷两枚均匀硬币,设 A = "两个都出现正面",B = "出现一正一反",则 $A\cup B$ = ________,AB = ________.

2. 判断是非

(1) 两事件对立就一定不相容; ( )

(2) 两事件互不相容一定能推出对立; ( )

(3) 两事件相容就一定不对立; ( )

(4) 若 $A\subset B$,那么 $A=AB$. ( )

3. 箱中装有编号为 1,2,3,4,5 的 5 本书,现从中任取 2 本书. 请写出试验的样本空间. 若令 A = "2 本书中有一本编号为 1",则 A 包含几个样本点,怎样表示?

4. 在数学系的学生中任意选取一名学生,令事件 A 表示被选学生是男生,事件 B 表示该生是二年级的学生,事件 C 表示该生是运动员.

(1) 叙述事件$AB\overline{C}$的意义;

(2) 在什么条件下,$ABC = C$成立;

(3) 在什么时候,关系式$C \subset B$是正确的;

(4) 在什么时候,$\overline{A} = B$成立.

5. 设A,B,C,D是四个事件,试用这四个事件表示下列各事件.

(1) 这四个事件至少发生一个;

(2) 这四个事件恰好发生两个;

(3) A,B都发生而C,D都不发生;

(4) 这四个事件都不发生;

(5) 这四个事件中至多发生一个.

6. 试问$(A \cup B) - B = A$是否一定成立?

7. 袋中有红、黄、白色球各一个,每次任取一个,有放回地取三次,A = "全红",B = "颜色全同",C = "颜色全不同",D = "颜色不全同". 分析A,B,C,D是否相容,是否对立?

8. A,B,C三事件互不相容与$ABC = \varnothing$是不是一回事?

1.2 随机事件与概率

一、频率与概率

我们在研究随机现象时最关心的是所有可能发生的结果在试验中发生的可能性的大小,这个大小是客观存在的,能否用一个数学模型去描述随机事件发生的大小和规律呢?例如,在抛掷一枚均匀硬币时,"正面朝上"还是"反面朝上"预先不能作出正确的判断,但是如果在条件不变的情况下做大量重复试验,发现"正面朝上"的次数与"反面朝上"的次数几乎相等. 历史上有不少人做过这个试验,其结果见表1-1.

表1-1

试验者	掷硬币次数n	出现正面次数μ_n	频率μ_n/n
De mongan	2 048	1 061	0.518
Buffon	4 040	2 048	0.506 9
Pearson	24 000	12 012	0.500 5

设试验的次数为n,事件A出现的次数为μ_n,则称$f_n(A) = \dfrac{\mu_n}{n}$为事件$A$在$n$次试验中出现的**频率**. 从上面掷硬币的试验中发现"正面出现"的频率稳定在0.5左右,频率的这种性质叫做频率的稳定性. 大量的随机试验表明随机事件具有频率稳定性——这也就是统计规律性.