成人高等教育学习指导书

GAODENG DAISHU XUEXI ZHIDAO

高等代数学习指导

钟祥贵 主编

GUANGXI NORMAL UNIVERSITY PRESS
广西师范大学出版社

成人高等教育学习指导书

高等代数学习指导

广西课程教材发展中心组编
主　　编　钟祥贵
编写人员　唐金玉　钟祥贵　廖贻华

GUANGXI NORMAL UNIVERSITY PRESS
广西师范大学出版社
·桂林·

图书在版编目（CIP）数据

高等代数学习指导 / 钟祥贵主编．—桂林：广西师范大学出版社，2004.7

成人高等教育学习指导书

ISBN 7-5633-4768-2

Ⅰ．高…　Ⅱ．钟…　Ⅲ．高等代数—成人教育：高等教育—教学参考资料　Ⅳ．O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 065293 号

广西师范大学出版社出版发行

（广西桂林市育才路 15 号　邮政编码：541004
网址：http://www.bbtpress.cn）

出版人：肖启明

全国新华书店经销

广西区计委印刷厂印刷

（南宁市民族大道东段 91 号　邮政编码：530022）

开本：787 mm × 960 mm　1/16

印张：12.5　　字数：241 千字

2004 年 7 月第 1 版　　2004 年 7 月第 1 次印刷

印数：0 001~2 000 册　　定价：14.30 元

CONTENTS

目录

第一章　基本概念

一、内容提要及学习要求……1
二、难点与重点……3
三、例题与分析……3
四、习题……6
五、习题参考答案……6
六、思考题参考答案……7

第二章　多项式

一、内容提要及学习要求……10
二、难点与重点……15
三、例题与分析……15
四、习题……25
五、习题参考答案……26
六、思考题参考答案……29

第三章　行列式

一、内容提要及学习要求……33
二、难点与重点……36
三、例题与分析……36
四、习题……41
五、习题参考答案……43
六、思考题参考答案……44

第四章 线性方程组

一、内容提要及学习要求……48
二、难点与重点……51
三、例题与分析……51
四、习题……54
五、习题参考答案……55
六、思考题参考答案……56

第五章 矩阵

一、内容提要及学习要求……59
二、难点与重点……66
三、例题与分析……66
四、习题……70
五、习题参考答案……72
六、思考题参考答案……75

第六章 向量空

一、内容提要及学习要求……79
二、难点与重点……85
三、例题与分析……85
四、习题……93
五、习题参考答案……94
六、思考题参考答案……97

第七章 矩阵的对角化

一、内容提要及学习要求……101
二、难点与重点……103
三、例题与分析……103
四、习题……108
五、习题参考答案……108
六、思考题参考答案……111

第八章　线性变换

一、内容提要及学习要求……114
二、难点与重点……117
三、例题与分析……117
四、习题……122
五、习题参考答案……123
六、思考题参考答案……125

第九章　欧氏空间

一、内容提要及学习要求……130
二、难点与重点……135
三、例题与分析……135
四、习题……142
五、习题参考答案……144
六、思考题参考答案……147

第十章　二次型

一、内容提要及学习要求……151
二、难点与重点……155
三、例题与分析……155
四、习题……163
五、习题参考答案……164
六、思考题参考答案……167

测试题

一、模拟试题 I……172
二、模拟试题 II……174
三、模拟试题 III……176
四、模拟试题 I 参考答案……179
五、模拟试题 II 参考答案……181
六、模拟试题 III 参考答案……183

参考文献 ……192

第一章 基本概念

一、内容提要及学习要求

1. **基本概念**

（1）有限集、无限集　如果一个集合只含有有限个元素，则称这个集合为有限集；如果一个集合含有无穷多个元素，就称这个集合为无限集.

（2）子集　A、B 是两个集合，如果 A 的每一个元素都是 B 的元素，那么就称 A 是 B 的子集．记作 $A\subseteq B$.

（3）集合的并　设 A、B 是两个集合，由 A 的一切元素和 B 的一切元素组成的集合称为 A、B 的并．记为 $A\cup B$.

（4）集合的交　由集合 A、B 的公共元素所组成的集合叫做 A、B 的交，记作 $A\cap B$.

（5）余集　设 A、B 是两个集合，令 $A-B=\{x|x\in A,\ 但\ x\notin B\}$，称为 B 在 A 中的余集，或者称为 A 与 B 的差.

（6）集合的积　设 A、B 是两个集合，令 $A\times B=\{(a,b)|a\in A,b\in B\}$，称为 A 与 B 的积.

（7）映射　设 A、B 是两个集合，f 是 A 到 B 的一个对应法则，如果对 A 中的每一个元素 x，在对应法则 f 下都有 B 中唯一确定的元素 y 与之对应，则称 f 是 A 到 B 的一个映射；y 叫做 x 在 f 下的像，x 叫做 y 在 f 下的一个原像；A 的所有元素在 f 下的像组成的集合称为 A 在 f 下的像，或者叫做映射 f 的像，记为 $f(A)$，即 $f(A)=\{f(x)|\forall x\in A\}$，显然 $f(A)\subseteq B$.

（8）单射　设 f 是 A 到 B 的一个映射，如果对于 A 中的任意两个不同的元素 x_1 和 x_2，都有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，那么称 f 是一个单射.

（9）满射　设 f 是 A 到 B 的一个映射，如果 $f(A)=B$，就称 f 是一个满射.

（10）双射（一一映射）　f 是 A 到 B 的一个映射，如果 f 既是单射，又是满射，就称 f 是一个双射（一一映射）.

（11）映射相等　设 f 和 g 都是 A 到 B 的一个映射，如果对 $\forall x\in A$，都有

$f(x)=g(x)$，那么称映射f和g相等.

（12）恒等映射　设f是A到A的一个映射，如果对于$\forall x\in A$，都有$f(x)=x$，那么就称f是集合A的恒等映射，记为j_A.

（13）映射的合成　设f是A到B的一个映射，g是B到C的一个映射，规定h是A到C的一个映射，使每一个$x\in A$，有$h(x)=g(f(x))$，称h为f与g的合成，记为$g\circ f$.

（14）逆映射　设f是A到B的一个映射，若存在B到A的映射g，使$g\circ f=j_A, f\circ g=j_B$，则称映射$g$为$f$的逆映射.

（15）置换　设A为有限集，A到A自身的双射叫做A的一个置换.

（16）代数运算　设A是一个非空集合，把$A\times A$到A的一个映射称为A的一个代数运算.

（17）数域　设K是复数集的一个非空子集，若K中含有不等于零的数，且K关于复数的加、减、乘、除法（除数不为零）封闭，即K中任意两个数的和、差、积、商都还在K中，则称K为数域. 常见的数域有实数域、有理数域、复数域等，而全体整数的集合对除法不封闭，所以不是数域.

2. 主要结论

（1）A到B的映射f是单射的充分必要条件是：对于$\forall x_1$、$x_2\in A$，如果$f(x_1)=f(x_2)$，就有$x_1=x_2$.

（2）A到B的映射f是满射的充分必要条件是：对$\forall y\in B$，$\exists x\in A$，使$f(x)=y$.

（3）映射的乘法满足结合律，即若f：$A\to B$，g：$B\to C$，h：$C\to D$是映射，则$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$.

（4）设f是A到B的映射，下列说法等价：

（ⅰ）f有逆映射；

（ⅱ）f是双射；

（ⅲ）存在映射g：$B\to A$，使$g\circ f=j_A$，$f\circ g=j_B$.

如果f的逆映射存在，则逆映射唯一，记为f^{-1}，且$f\circ f^{-1}=j_B$，$f^{-1}\circ f=j_A$.

（5）f是A到B的一个映射，则$f\circ j_A=f$，$j_B\circ f=f$.

（6）最小数原理：自然数集的任意一个非空子集必含有一个最小数.

（7）数学归纳法原理：设有一个与自然数n有关的命题，如果

（ⅰ）当$n=1$时，命题成立；

（ⅱ）假设$n=k$时命题成立，则$n=k+1$时命题也成立；那么这个命题对于一

切自然数都成立.

（8）第二数学归纳法原理：设有一个与自然数 n 有关的命题，如果

（ⅰ）当 $n=1$ 时命题成立；

（ⅱ）假设命题对于一切小于 k 的自然数成立，则命题对于 k 也成立；那么命题对于一切自然数 n 来说都成立.

（9）全体复数的集合，全体实数的集合，全体有理数的集合都是数域，分别叫复数域，实数域，有理数域.

（10）任何数域都包含有理数域. 即有理数域是最小的数域.

3. **学习要求**

（1）集合是数学最基本的概念之一，应该理解集合、子集、集合的交、集合的并、集合的差、集合的积的含义. 特别注意在 $A-B$ 的定义里，并没有要求 B 是 A 的子集. $A\times B$ 并不是新的东西，如取定一个坐标系后，平面上所有点的坐标的集合就是 $\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{R}$ 的积：

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{R}\}.$$

（2）映射的概念必须理解好，要掌握好单射、满射、双射这三类重要的映射，还要能在具体问题中作出正确的判断. 要注意并不是任意两个映射都是可以合成的，即使两个映射可以合成，也不满足交换律.

（3）数学归纳法是常用的一种证明方法，要熟练掌握.

（4）理解数域的概念，会判断一个数集是否是数域.

二、 难点与重点

1. 重点： 映射、单射、满射、双射的概念，数域的概念及数学归纳法.

2. 难点： 单射、满射的判断，数学归纳法的应用.

三、 例题与分析

例 1 下列对应法则是否是映射，是单射还是满射？

（1）设 A 是全体整数的集合，B 是全体偶数的集合，规定：

$$f\colon A\to B,\ n\mapsto 2n,\ \forall n\in A.$$

（2）设 A 是全体复数的集合，B 是非负实数的集合，规定：

$$f\colon A\to B,\ x\mapsto |x|,\ \forall x\in A.$$

（3）设 A 是自然数的集合，规定：$f\colon A\to A,\ n\mapsto n+1,\ \forall n\in A$.

分析 判断一个对应法则是否是映射，用映射的定义判断，集合 A 到 B 的对应法则 f 是否是映射关键看三条：

（ⅰ）f 是否给 A 的每一个元素都规定了对应的像；

（ⅱ）f 给 A 的每一个元素规定的像是否都在 B 中；

（ⅲ）f 给 A 的每一个元素的像是否唯一确定.

在（1）中，对每一个整数 n，f 都规定了对应的像 $2n\in B$，每一个整数 n 的像是唯一确定的. 所以（1）中的对应法则 f 是映射；同理可对（2）、（3）作出判断. 要判断一个映射是否是单射或满射，用单射或满射的定义或者充分必要条件判断.

解 （1）f 是一个映射，且对于不同的整数有不同的偶数与之对应，所以 f 是单射；又对于每一个偶数总可以找到一个整数为原像，故 f 也是满射.

（2）f 是映射，但对于 A 中的不同元素 1 和 -1，在 f 下的像都是 1，所以 f 不是单射；对于每一个非负实数，都可以找到原像，所以 f 是满射.

（3）f 是映射，且是单射，非满射；因为 $1\in A$ 没有原像.

例 2 设 f：$A\to B$，g：$B\to C$ 是映射，证明：

（1）如果 $g\circ f$ 是单射，那么 f 也是单射；

（2）如果 $g\circ f$ 是满射，那么 g 也是满射；

（3）如果 g、f 都是双射，那么 $g\circ f$ 也是双射，且 $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

分析 用单射、满射的充分必要条件及双射的定义证明.

证明 （1）任取 x_1、$x_2\in A$，如果 $f(x_1)=f(x_2)$，那么 $g(f(x_1))=g(f(x_2))$ 即 $(g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)$，而 $g\circ f$ 是单射，所以 $x_1=x_2$，因此，f 是单射.

（2）任取 $c\in C$，则由 $g\circ f$ 是满射知，存在 $a\in A$，使 $g\circ f(a)=c$，即 $g(f(a))=c$，令 $f(a)=b$，则 $g(b)=c$，故 g 是 A 到 B 的满射.

（3）先证 $g\circ f$ 是单射. 任取 x_1、$x_2\in A$，若 $g\circ f(x_1)=g\circ f(x_2)$，即 $g(f(x_1))=g(f(x_2))$，因 g 是双射，故 g 是单射，从而有 $f(x_1)=f(x_2)$，而 f 也是单射，故有 $x_1=x_2$，所以 $g\circ f$ 是单射；再证 $g\circ f$ 是满射. 任取 $c\in C$，因 g 是满射，故存在 $b\in B$，使 $g(b)=c$，而 f 也是满射，故存在 $a\in A$，使 $f(a)=b$，于是 $g\circ f(a)=g(f(a))=g(b)=c$，所以 $g\circ f$ 也是满射. 因此 $g\circ f$ 是双射.

因 $(g\circ f)\circ(f^{-1}\circ g^{-1})=g\circ(f\circ f^{-1})\circ g=g\circ j_B\circ g^{-1}=g\circ g^{-1}=j_C$，

$(f^{-1}\circ g^{-1})\circ(g\circ f)=f^{-1}\circ(g^{-1}\circ g)\circ f=f^{-1}\circ j_B\circ f=f^{-1}\circ f=j_A$，

所以 $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

例 3 下列数集是否是数域？若是，则给出证明，若不是，则给出反例.

(1) $A=\left\{a+b\sqrt{3}\,\mathrm{i}\,\middle|\,a,\ b\in\mathbb{Q}\right\}$；

(2) $B=\left\{a+b\mathrm{i}\,\middle|\,a\in\mathbb{Q},b\in\mathbb{R}\right\}$.

解（1）A 是数域．这是因为存在非零数$1=1+0\sqrt{3}\mathrm{i}\in A$，且对任意的

$$a_1+b_1\sqrt{3}\mathrm{i},\ a_2+b_2\sqrt{3}\mathrm{i}\in A,$$

其中$a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{Q}$，因$\mathbb{Q}$对加、减、乘、除法均封闭，所以，

$$(a_1+b_1\sqrt{3}\mathrm{i})\pm(a_2+b_2\sqrt{3}\mathrm{i})=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)\sqrt{3}\mathrm{i}\in A,$$

$$(a_1+b_1\sqrt{3}\mathrm{i})(a_2+b_2\sqrt{3}\mathrm{i})=(a_1a_2-3b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{3}\mathrm{i}\in A,$$

当$a_2+b_2\sqrt{3}\mathrm{i}\neq 0$时，有$a_2{}^2+3b_2{}^2\neq 0$，$\dfrac{a_1a_2+3b_1b_2}{a_2{}^2+3b_2{}^2}\in\mathbb{Q}$，$\dfrac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2{}^2+3b_2{}^2}\in\mathbb{Q}$，于是

$$\frac{a_1+b_1\sqrt{3}\mathrm{i}}{a_2+b_2\sqrt{3}\mathrm{i}}=\frac{a_1a_2+3b_1b_2}{a_2{}^2+3b_2{}^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2{}^2+3b_2{}^2}\sqrt{3}\mathrm{i}\in A,$$

所以 A 是数域.

（2）B 不是数域．例如，取$\mathrm{i}=0+1\mathrm{i}\in B,\sqrt{2}\mathrm{i}=0+\sqrt{2}\mathrm{i}\in B$，但$\mathrm{i}\times\sqrt{2}\mathrm{i}\notin B$，即 B 对乘法不封闭．所以 B 不是数域.

例 4　证明 Fibonacci 序列$a_1=1$，$a_2=2$，$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$，$n=3,4,\cdots$的通项公式为

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

证明　直接验算，可知$n=1$时，

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)=1,$$

结论成立；

$n=2$时，

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}-1+\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)=2,$$

结论成立.

假设$n<k$时结论成立．现证$n=k$时结论成立．此时，

$$a_k = a_{k-1} + a_{k-2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right),$$

即结论成立. 于是，结论对任意的自然数成立.

四、 习题

1. 设 $A=\{x|x\in\mathbb{R},-1\le x\le 1\}$，$B=\{x|x\in\mathbb{R},x\ge 0\}$. 写出 $A\cap B$，$A\cup B$，$A-B$.

2. 规定：$f:(-\infty,+\infty)\to[0,+\infty)$，$f: x\mapsto|x|+1$，问 f 是不是映射，是单射还是满射?

3. 规定：$f:(-\infty,0]\to[0,+\infty)$，$f: x\mapsto|x|+1$，问 f 是不是映射，是单射还是满射?

4. 规定：$f:(-\infty,0]\to[1,+\infty)$，$f: x\mapsto|x|+1$，问 f 是不是映射，是单射还是满射?

5. 设 $f: A\to B$，$g: B\to C$ 是映射，试证：

（ⅰ）如果 f、g 都是单射，则 $g\circ f$ 也是单射；

（ⅱ）如果 f、g 都是满射，则 $g\circ f$ 也是满射.

6. 判断下列数集是否是数域，并加以证明.

（ⅰ）$A=\{a+b\sqrt{2}|a, b\in\mathbb{Q}\}$；（ⅱ）$B=\{a+b\sqrt[3]{2}|a, b\in\mathbb{Q}\}$.

7. 用数学归纳法证明：含有 n 个元素的一切子集的个数等于 2^n.

五、 习题参考答案

1. $A\cap B=\{x|x\in\mathbb{R},0\le x\le 1\}$，$A\cup B=\{x|x\in\mathbb{R},-1\le x\}$，

$A-B=\{x|x\in\mathbb{R},-1\le x<0\}$.

2. 是映射，非单射非满射.

3. 是映射，是单射，非满射.

4. 是映射，是单射，满射.

5.（ⅰ）对任意 $a, b \in A$，如果 $g \circ f(a) = g \circ f(b)$，即 $g(f(a)) = g(f(b))$，因 g 是单射，故 $f(a) = f(b)$，又因 f 也是单射，所以 $a = b$．从而 $g \circ f$ 是单射．

（ⅱ）因 f 是满射，所以 $f(A) = B$，又因为 g 是满射，所以

$$g(B) = g(f(A)) = (g \circ f)(A) = C,$$

所以 $g \circ f$ 也是满射．

6. A 是数域，证明方法类似例题 3，B 不是数域.例如,取 $\sqrt[3]{2} \in B$，但 $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \notin B$，即 B 对乘法不封闭.

7. 对 n 进行归纳．设 $A_n = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，当 $n = 1$ 时，它有两个子集，即空集和 A_1，故结论成立.

假设 $n = k$ 时命题成立，下面证明 $n = k + 1$ 时命题也成立.

$A_{k+1} = \{a_1, a_2, \cdots, a_k, a_{k+1}\}$，将 A_{k+1} 的子集分为两类，一类为不含 a_{k+1} 的子集，此类子集的个数与 A_k 的子集个数相同，为 2^k 个；另一类为含 a_{k+1} 的子集，这类子集的全体相当于将 a_{k+1} 添加到 A_k 的子集中，故也为 2^k 个，所以 A_{k+1} 的所有子集的个数为 $2^k + 2^k = 2^{k+1}$，故命题成立.

六、思考题参考答案

§1.1 1. 对于任意的 $x \in A \cap B$，依定义，$x \in A$，即 $A \cap B \subseteq A$．反之，对于任意的 $x \in A$，由于 $A \subseteq B$，所以 $x \in B$，即 $x \in A$ 且 $x \in B$，从而 $x \in A \cap B$，即 $A \subseteq A \cap B$．所以 $A \cap B = A$．同样地，可以证明 $A \cup B = B$．

2.（1）在对应法则 $f: A \to B; x \mapsto \dfrac{x}{1+x}$ 之下，由于 $x \geq 0$ 时，$0 \leq \dfrac{x}{1+x} < 1$，所以对于 A 的一个非负数 x，存在 B 中唯一的一个数 $\dfrac{x}{1+x}$ 与之对应，所以 f 是 A 到 B 的一个映射.

（2）首先，证明映射 $f: A \to B$ 是满射．事实上，对于 B 中任意的一个数 y，$0 \leq y < 1$,取

$$x = \frac{y}{1-y},\text{那么 } x \geq 0\text{，即 } x \in A\text{，且 } f(x) = \frac{x}{1+x} = \frac{\dfrac{y}{1-y}}{1+\dfrac{y}{1-y}} = y,\text{ 这就是说，}$$

$f: A \to B$ 是满射.

其次，证明映射 $f: A \to B$ 是单射. 事实上，设 x_1、$x_2 \in A$，而 $f(x_1) = f(x_2)$. 我们有 $\dfrac{x_1}{1+x_1} = \dfrac{x_2}{1+x_2}$，即 $x_1 = x_2$，这就是说，$f: A \to B$ 是单射;

（3）由于映射 $f: A \to B$ 是满射，我们可以令 $g: B \to A,\quad x \mapsto \dfrac{x}{1-x}$. 从而，对于 A 中任意的一个数 x，有 $g\circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\dfrac{x}{1+x}\right) = \dfrac{\frac{x}{1+x}}{1-\frac{x}{1+x}} = x = j_A(x)$，即 $g\circ f = j_A$. 另一方面，可以得到 $f\circ g = j_B$. 所以，$g = f^{-1}$.

3. 由于存在 $x=0$，使

$$f\circ g(0) = f(g(0)) = f(1) = \mathrm{e},$$
$$g\circ f(0) = g(f(0)) = g(1) = 2,$$

这说明，$f\circ g$ 与 $g\circ f$ 在 $x=0$ 时不相等，所以一般来说它们都是不相等的.

4.（1）不是，（2）是，（3）不是.

§1.2 1. 用数学归纳法原理证明.

当 $n=1$ 时，结论显然成立.

假设 $n=k$ 时，结论成立. 而当 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}(1+h)^{k+1} &= (1+h)(1+h)^k \ge (1+h)(1+kh)\\ &= 1+(k+1)h+kh^2 > 1+(k+1)h.\end{aligned}$$

可见，当 $n=k+1$ 时，结论也成立. 根据数学归纳法原理，就有：对于正整数 h 和任意自然数 n，$(1+h)^n \ge 1+nh$ 成立.

2. 用第二数学归纳法原理.

首先，直接计算，有 $a_0 = a_1 = 1$，即命题对 $n=0$、1 成立.

其次，假设命题对一切小于 $k(k\ge 2)$ 的自然数成立，那么 a_{k-1}, a_{k-2} 均为整数.

考虑 $n=k$ 的情形：

设 $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，则 $\lambda_1+\lambda_2 = 1,\ \lambda_1\lambda_2 = -1$. 注意到

$$\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} = (\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1^{n} - \lambda_2^{n}) - (\lambda_1\lambda_2)(\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1}).$$

我们有：$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, n\ge 1$. 由归纳假设，我们有 $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$ 也是整数.

根据第二数学归纳法原理知，对一切自然数 n，a_n 恒为整数.

§1.3 1. 是的. 因为 S 是复数集的一个子集，其中包含一个不等于零的数（比如说 x），那么 $1=\frac{x}{x}\in S$, $0=x-x\in S$. 依定义，S 一定是一个数域.

2. 令 $\mathbb{Q}(\mathrm{i})=\{a+b\mathrm{i}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$. 首先，$0=0+0\mathrm{i}\in\mathbb{Q}(\mathrm{i})$, $1=1+0\mathrm{i}\in\mathbb{Q}(\mathrm{i})$.

其次，对于 $\mathbb{Q}(\mathrm{i})$ 中的任意两个数来说，

$$(a+b\mathrm{i})\pm(c+d\mathrm{i})=(a\pm c)+(b\pm d)\mathrm{i}\in\mathbb{Q}(\mathrm{i}),$$

并且 $(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}$，

因为 a、b、c、d 都是有理数，所以 $ac-bd$, $ad+bc$ 都是有理数，这就是说，$(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})$ 还在 $\mathbb{Q}(\mathrm{i})$ 内. 又设 $a+b\mathrm{i}\neq 0$，于是 $a-b\mathrm{i}\neq 0$，因此，

$$\frac{c+d\mathrm{i}}{a+b\mathrm{i}}=\frac{(c+d\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})}{(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})}=\frac{ac+bd}{a^2+b^2}+\frac{ad-bc}{a^2+b^2}\mathrm{i}.$$

因为 a、b、c、d 是有理数，所以 $\frac{ac+bd}{a^2+b^2}$, $\frac{ad-bc}{a^2+b^2}$ 也是有理数，这就证明了 $\frac{c+d\mathrm{i}}{a+b\mathrm{i}}\in\mathbb{Q}(\mathrm{i})$.

综上所述，$\mathbb{Q}(\mathrm{i})$ 是一个数域.

3. (a) 设 $W_1=\{$奇数$\}$. 由于“奇数+奇数=偶数”，这就是说，W_1 对加法不封闭，所以 W_1 不是数域.

(b) 设 $W_2=\left\{n\sqrt{2}\,\middle|\,n\in\mathbb{Z}\right\}$. 由于 $n_1\sqrt{2}\cdot n_2\sqrt{2}=2n_1n_2$，这就是说，$W_2$ 对乘法不封闭，所以 W_2 不是数域.

第二章 多项式

一、内容提要及学习要求

1. 基本概念

（1）多项式　设 K 是一个数域，x 是一个文字，n 是一个非负整数，$a_0,a_1,\cdots,a_n\in K$，形如 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的表达式称为数域 K 上的一个关于文字 x 的一元多项式（简称多项式），通常用 $f(x),g(x),\cdots$ 表示. 其中 a_ix^i 称为 i 次项，a_i 称为 i 次项系数；如果 $a_n\neq 0$，则称 a_nx^n 为首项，a_n 称为首项系数，n 称为多项式的次数，多项式 $f(x)$ 的次数记为 $\deg f(x)$ 或者 $\deg f$；首项系数为 1 的多项式称为首一多项式；系数全为 0 的多项式称为零多项式，记为 0，零多项式没有次数. 数域 K 上的所有多项式的集合记为 $K[x]$.

（2）多项式相等　$K[x]$ 中的两个多项式 $f(x)$、$g(x)$，如果它们各项的系数相等，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相等，记为 $f(x)=g(x)$.

（3）多项式的运算

设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，　$g(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$ 是两个多项式，规定：

加法　$f(x)+g(x)=(a_n+b_n)x^n+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}+\cdots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)$.

数乘　$kf(x)=ka_nx^n+ka_{n-1}x^{n-1}+\cdots+ka_1x+ka_0$，其中 $k\in K$.

乘法　设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,\ g(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

定义 $f(x)g(x)=c_{n+m}x^{n+m}+c_{n+m-1}x^{n+m-1}+\cdots+c_1x+c_0$，

其中 $c_k=a_kb_0+a_{k-1}b_1+\cdots+a_1b_{k-1}+a_0b_k$，$k=0,1,2,\cdots,n+m$.

（4）整除　设 $f(x)$、$g(x)\in K[x]$，如果存在 $h(x)\in K[x]$，使 $g(x)=f(x)h(x)$，则称 $f(x)$ 整除 $g(x)$，记为 $f(x)|g(x)$，此时 $f(x)$ 称为 $g(x)$ 的因式. $\forall c\in K,c\neq 0$，$cf(x)$ 都是 $f(x)$ 的因式，称为 $f(x)$ 的平凡因式.

（5）公因式　设 $f(x)$、$g(x)$、$d(x)\in K[x]$，如果 $d(x)|f(x)$，$d(x)|g(x)$，那么就称 $d(x)$ 为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的一个公因式.