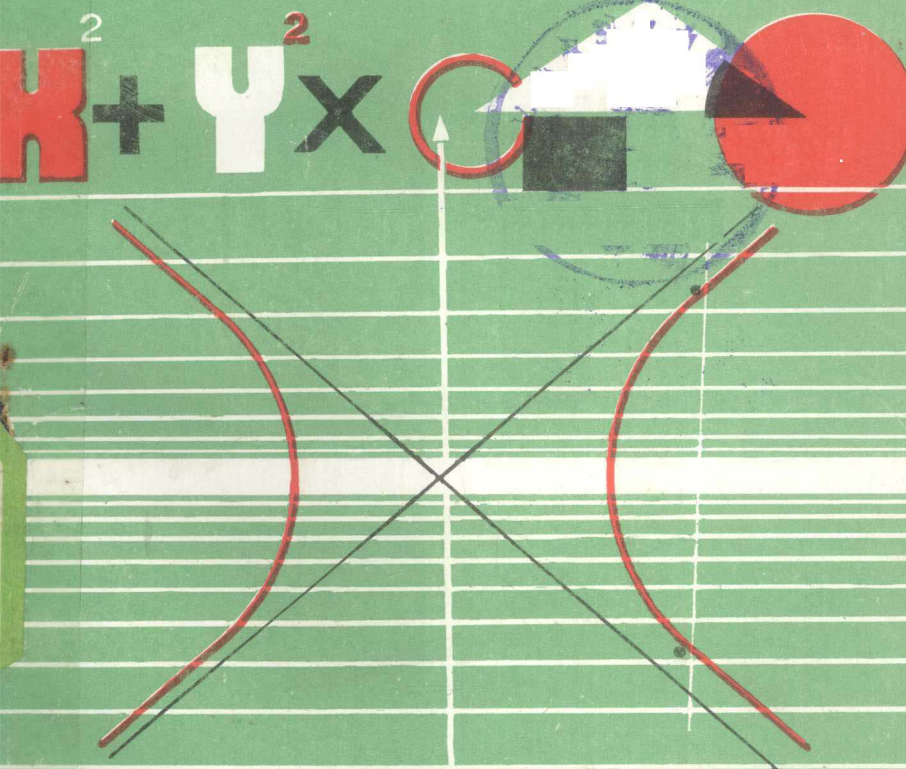


中学数学精讲

• 平面几何



人民日报出版社

中学数学精讲

(平面几何)

主编 烟学敏 刘玉翹

编者 (以下按姓氏笔划为序)

王连笑	尹继民	余凤冈	李果民
李淑慧	吴家珠	张温慈	郁林生
郁昌盛	唐玉铎	高淑馨	梁汝芳
窦广生	阙士刚	蔡锡弟	戴宏祥

人民日报出版社

前 言

本书是根据现行中学数学教学大纲的要求和教材的编排顺序分单元编写而成的。全书共分六册，其中初中两册，高中四册，各册分若干单元。每个单元包括《解题方法精讲》、《练习题精选》、《练习题精解》三个部分，进度和课堂教学同步。为了沟通知识的纵横联系和加强对综合运用能力的培养，各册之后都设了专题，因此，这套书不仅可以供各年级学生日常学习使用，而且也可以供初、高中毕业和升学复习使用。

练习题的题型分 A、B、C 三类，A 类为选择题，B 类为填空题，C 类为解答题。各类题都给出了精辟的解答，供练习时使用。

这套书的点睛之笔在于一个“精”字，通过对例题的精讲，试图总结和剖析知识规律和解题方法，以期达到提高广大中学生分析和解决问题的能力。大家知道，数学题之多被人们喻之为海，不会驾驭大海的人，就会被海水淹没。因此，广大中学生要想解脱题海所带来的困扰，就必须学会在大海中游泳。为此，必须具备两点：(1)能从题海中找出那些带规律性的、最典型的问题；(2)学会处理和解决问题的方法，提高解决问题的能力。为了帮助广大中学生具备以上两项能力，并逐渐学会在题海中游泳的本事，我们在广泛阅读了大量数学资料的基础上“精选”出那些基础性强，有一定递进性、规律性、典型性，并达到一定能力高度的题目供练习使用。

因为考虑到在练习中，广大中学生都希望找到一个简捷

目 录

第一单元	基本概念、相交线、平行线	1
第二单元	三角形	23
第三单元	四边形、面积、勾股定理	61
第四单元	相似形	115
第五单元	圆	170
第六单元	怎样证明比例式或等积式专题	248
第七单元	成比例线段转化问题研究专题	264
第八单元	几何中的定值和最值专题	274
第九单元	几何中的综合题和杂题专题	284

第一单元

基本概念、相交线、平行线

— 解题方法精讲

例 1. 什么叫做线段? 什么叫做平角?

这两个问题是名词的定义或概念的定义.

当我们给某个概念下定义时, 总是用已知的概念. 例如线段这个概念, 它是用直线概念来定义的. “直线上两点间的部分叫做线段”. 那么直线用什么来定义呢? 我们只好把它作为原始的不定义的概念. 任何一门科学都必须选择一些不定义的概念, 作为对其他概念下定义的起点. 这样的概念叫做原始概念. 譬如, 我们几何中的“点”、“线”、“面”都是一些不定义的概念, 这些概念的含义在课题中只是形象地加以描述.

平角的定义: 一条射线由原来的位置 OA , 绕着它的端点 O 旋转至位置 OB , 当 OB 和 OA 成一条直线时, 所成的角叫做平角.

这是一种描述概念的发生过程, 给概念下定义的方法, 它叫做发生式定义, 如周角等不少概念也采用了这种定义方法.

例 2 (1) 如图 1-1

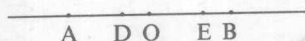


图1-1

在直线 AB 上有三个点 D, O, E , 将直线分为多少条线段? 怎样表示.

(2) 如图 1-2

在 $\angle AOB$ 的内部有三条射线 OC, OD, OE , 将 $\angle AOB$ 分为多少个角? 怎样表示.

这是两个视图题. 下面我们介绍一种简捷的解题方法:

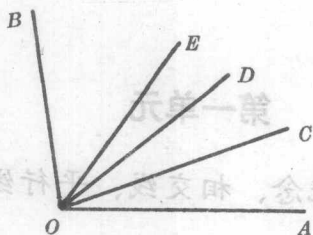


图 1-2

如(1), 先从第一个点 A, 数与其他各点构成的线段, 即线段 AD, AO, AE, AB;

再从第二个点 D, 数与其他各点构成的线段, 即线段 DO, DE, DB;

.....

以此类推

所以, 此题的图上共有 10 条线段, 即 AD, AO, AE, AB, DO, DE, DB, OE, OB, EB.

第(2)题角的视图, 也是如此.

先以射线 OA 为角的一边, 与其他射线构成的角有 $\angle AOC$, $\angle AOD$, $\angle AOE$, $\angle AOB$.

再以射线 OC 为角的一边, 与其他射线构成的角有 $\angle COD$, $\angle COE$, $\angle COB$;

.....

以此类推

此题图上共有 10 个角, 即 $\angle AOC$, $\angle AOD$, $\angle AOE$, $\angle AOB$, $\angle COD$, $\angle COE$, $\angle COB$, $\angle DOE$, $\angle DOB$, $\angle EOB$.

三角形章节中, 数图上有 多少个三角形, 方法亦然.

例 3. 已知: 如图 1-3, M 是线段 AB 的中点, P 是 BM 上的一点.

求证: (1) $PM = \frac{1}{2} (PA - PB)$; 而不



图 1-3

$$(2) PA^2 - PB^2 = 2AB \cdot PM.$$

线段的中点和角的平分线是这章的两个重要概念，除正确掌握其各种表示方法外，更重要的着眼点是这两个概念的灵活运用。在灵活运用时，还要注意它们都是对称图形的特性。

此题分析如下：

$$(1) \text{ 因为 } MB = PM + PB,$$

$$AM = PA - PM,$$

又已知 M 是 AB 的中点，即 $MB = AM$ 。

$$\text{所以, } PM + PB = PA - PM.$$

$$\text{故, } 2PM = PA - PB.$$

$$\text{即 } PM = \frac{1}{2} (PA - PB).$$

利用(1)的结果。

$$(2) PA^2 - PB^2 = (PA + PB)(PA - PB)$$

$$= AB \cdot 2PM = 2AB \cdot PM.$$

例 4 如图 1-4,

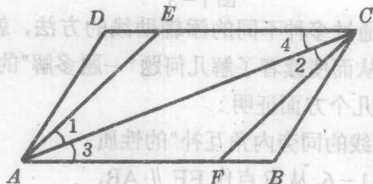


图 1-4

(1) 如果要判定 $AB \parallel CD$, 需要的条件是 _____.

(2) 如果要判定 $AD \parallel BC$, 需要的条件是_____、_____、_____.

(3) 如果要判定 $AE \parallel CF$, 需要的条件是_____、_____、_____.

此题目的目的是训练多向思维, 判断两直线平行的各种条件.

(1) 满足的条件为: $\angle 3 = \angle 4$; $\angle EAB = \angle AED$; $\angle FCE = \angle CFB$; $\angle BAD + \angle D = 180^\circ$; $\angle DCB + \angle B = 180^\circ$; $\angle BAE + \angle AEC = 180^\circ$; $\angle ECF + \angle CFA = 180^\circ$.

(2) 满足的条件为: $\angle DAC = \angle BCA$; $\angle DAB + \angle B = 180^\circ$; $\angle BCD + \angle D = 180^\circ$.

(3) 满足的条件为: $\angle 1 = \angle 2$; $\angle EAB = \angle CFB$; $\angle FCD = \angle AED$; $\angle EAF + \angle CFA = 180^\circ$; $\angle FCE + \angle AEC = 180^\circ$.

例 5 已知: 如图 $AB \parallel CD$,

求证: $\angle B + \angle BED + \angle D = 360^\circ$.

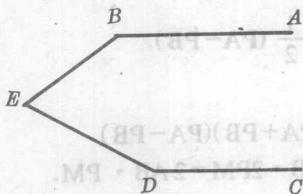


图 1-5

以此题为例, 通过多种不同的添辅助线的方法, 就可以得到多种不同的证明方法, 从而使读者了解几何题“一题多解”的普遍性.

本题可从以下几个方面证明:

(1) 利用“平行线的同旁内角互补”的性质

证法一: 如图 1-6, 从 E 点作 $EF \parallel AB$,

又 $\because AB \parallel CD$,

$\therefore EF \parallel CD$. (如果两条直线都和第三条直线平行, 那么这两条直线也平行)

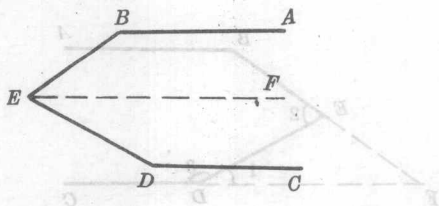


图 1-6

则 $\angle B + \angle BEF = 180^\circ$;

$\angle D + \angle DEF = 180^\circ$;

$\therefore \angle B + \angle BED + \angle D = 360^\circ$.

(2) 利用“周角等于 360° ”证明.

证法二: 如图 1-7, 从 E 点作 $EF \parallel AB$.

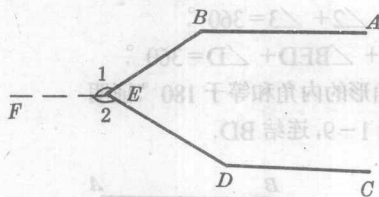


图 1-7

又 $\because AB \parallel CD$,

$\therefore EF \parallel CD$.

则 $\angle B = \angle 1$, $\angle D = \angle 2$.

$\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle BED = 360^\circ$,

$\therefore \angle B + \angle BED + \angle D = 360^\circ$.

(3) 利用“平角等于 180° ”证明

证法三: 如图 1-8, 延长 BE 与 CD 的延长线相交于 F 点.

$\because AB \parallel CD$,

$\therefore \angle B + \angle F = 180^\circ$;

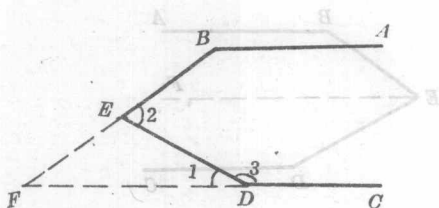


图 1-8

又 $\because \angle FDC$ 为平角,

$$\therefore \angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 3 + \angle B + \angle F = 360^\circ$$

又 $\because \angle 2 = \angle 1 + \angle F$, (三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和)

$$\therefore \angle B + \angle 2 + \angle 3 = 360^\circ$$

$$\text{即 } \angle B + \angle BED + \angle D = 360^\circ$$

(4) 利用“三角形的内角和等于 180° ”证明

证法四: 如图 1-9, 连结 BD .

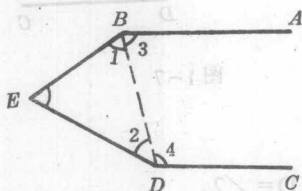


图 1-9

$\because AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$$

又 $\because \angle 1 + \angle 2 + \angle E = 180^\circ$ (三角形三个内角和等于 180°)

$$\therefore \angle 1 + \angle 3 + \angle E + \angle 2 + \angle 4 = 360^\circ$$

$$\text{即 } \angle B + \angle BED + \angle D = 360^\circ$$

(5) 利用“多边形内角和等于 $(n-2) \cdot 180^\circ$ ”证明

证法五：如图 1-10，任作一条直线交 AB 于 M，交 CD 于 N。

则五边形 MBEDN 的内角和为

$$(5-2) \cdot 180^\circ = 540^\circ$$

又 $\because AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$$

$$\text{故 } \angle B + \angle BED + \angle D = 360^\circ$$

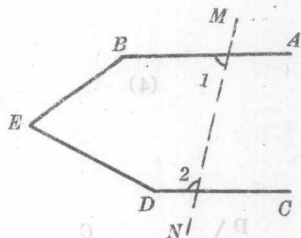


图 1-10

通过以上几种证法可以归纳出：有关平行线问题，常用角的关系及两直线同时平行（或垂直）于另一条直线等性质来证明；常用的添辅助线的方法：① 添已知直线的平行线；② 添两条平行线的截线。

例 6 如图 1-11，已知 $AB \parallel CD$ ，
 $\angle 1 = \angle B$ ， $\angle 2 = \angle D$ 。

求证： $BE \perp DE$ 。

证明两条直线垂直，是几何证明的一类常见题型，为了读者更好的掌握这类题目的证明方法，这里先介绍满足两条直线垂直的各种条件。

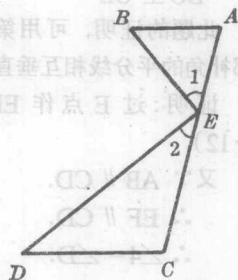
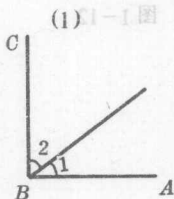
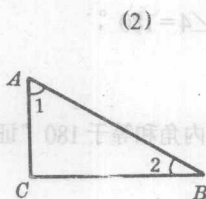


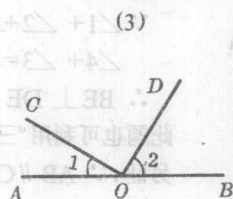
图 1-11



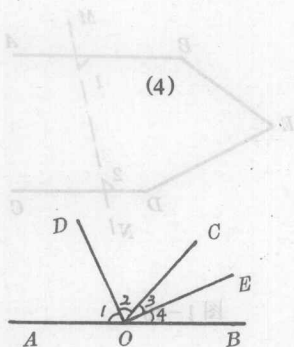
若 $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$ ，
则 $AB \perp BC$ 。



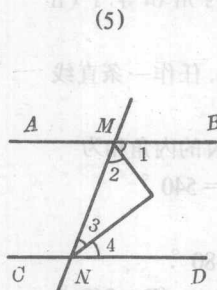
若 $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$ ，
则 $AC \perp BC$ 。



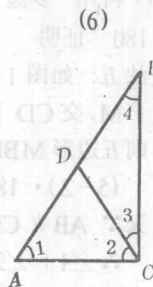
若 $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$ ，
则 $CO \perp DO$ 。



(4)



(5)



(6)

若 AOB 为一直线

且 $\angle 1 = \angle 2$ $\angle 3 = \angle 4$

则 $\angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$

$DO \perp OE$

此题的证明, 可用第 (4) 种情况

“邻补角的平分线相互垂直”.

证明: 过 E 点作 $EF \parallel AB$ (图

1-12),

又 $\because AB \parallel CD$.

$\therefore EF \parallel CD$.

$\therefore \angle 4 = \angle D$.

又 $\because \angle 2 = \angle D, \therefore \angle 2 = \angle 4$.

同理可证 $\angle 1 = \angle 3$.

$\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$;

$\angle 4 + \angle 3 = 90^\circ$;

$\therefore BE \perp DE$.

此题也可利用“三角形内角和等于 180° ”证明.

另证: $\because AB \parallel CD$

$\therefore \angle A + \angle C = 180^\circ$;

又 $\because \triangle ABE$ 和 $\triangle CDE$ 的内角和为 360° ;

$\therefore \angle 1 + \angle B + \angle 2 + \angle D = 180^\circ$;

若 $AB \parallel CD$

且 $\angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4$

则 $\angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$

$MP \perp NP$

若 $\angle 1 = \angle 2$

$\angle 3 = \angle 4$

则 $\angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$

$AC \perp BC$

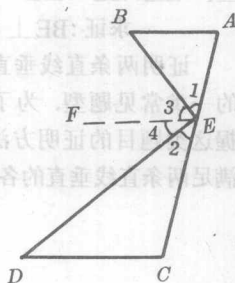


图 1-12

又 $\because \angle 1 = \angle B, \angle 2 = \angle D,$

$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$

故 $BE \perp DE$.

二 练习题精选

A 选择题

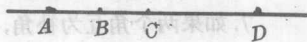
1. 下列说法正确的是 ()

(A) 延长直线 AB 到 C.

(B) 反向延长直线 AB 到 C.

(C) 延长射线 OC 到 D.

(D) 反向延长射线 OC 到 D.



2. 如图, 在直线上有 A、B、C、D

四点, 图上共有几条线段 ()

(A) 3 条.

(B) 4 条.

(C) 5 条.

(D) 6 条.

(第 2 题)

3. 图形中属于线段的是 ()

(A) 线段的垂直平分线. (B) 角平分线.

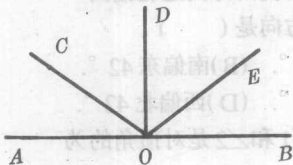
(C) 三角形的角平分线. (D) 直线外一点向直线引的斜线.

4. 如图所示, 共有角 ()

(A) 4 个

(B) 5 个. (C) 9 个.

(D) 10 个.



第 4 题

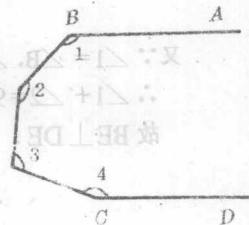
5. 如图, 若 $AB \parallel CD$

则 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4$ 等于

()

(A) 180° (B) 360°

(C) 540° (D) 720°



第5题

6. 下列正确的概念是 ()

(A) 90° 的角叫做直角.

(B) 180° 的角叫做平角.

(C) 360° 的角叫做周角.

(D) 平角的二倍是周角.

7. 如果两个角互为补角, 那么这两个角可能是 ()

(A) 都是锐角.

(B) 都是钝角.

(C) 一个锐角, 另一个是直角.

(D) 一个锐角, 另一个是钝角.

8. 一个角等于它的补角的 5 倍, 那么这个角的补角的余角是 ()

(A) 30°

(B) 60°

(C) 45°

(D) 以上答案都不对.

9. 如果 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是邻补角, 且 $\angle 1 > \angle 2$, 那么 $\angle 2$ 的余角是 ()

(A) $\frac{1}{2}(\angle 1 + \angle 2)$.

(B) $\frac{1}{2}\angle 1$.

(C) $\frac{1}{2}(\angle 1 - \angle 2)$.

(D) 不能确定.

10. 如图, 由 B 测 A 的方向是北偏西

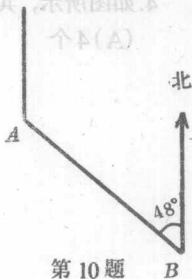
48° ; 则由 A 测 B 的方向是 ()

(A) 南偏东 48° (B) 南偏东 42°

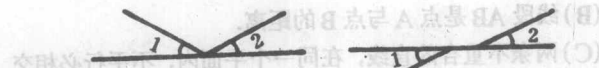
(C) 北偏西 48° (D) 西偏北 42°

11. 下列图中, $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是对顶角的为

()



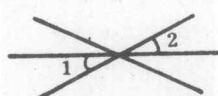
第10题



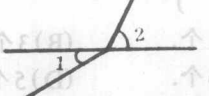
(A)



(B)



(C)



(D)

12. 一条直线和两条平行线的关系是 ()
- (A) 一定和两条平行线都平行.
- (B) 可能和两条平行线中一条直线平行与另一条相交.
- (C) 一定和两条平行线都相交.
- (D) 和两条平行线或都相交或都平行.
13. 两条平行线与第三条直线相交, 那么一组内错角的平分线 ()
- (A) 互相垂直. (B) 互相平行.
- (C) 互相垂直或平行.
- (D) 相交于一点.
14. 如果两个角的两边分别平行, 那么这两角互补的条件是 ()
- (A) 两组对应边平行.
- (B) 两组对应边同向平行.
- (C) 两组对应边反向平行.
- (D) 一组对应边同向平行, 另一组对应边反向平行.
15. 两条不平行的直线被第三条直线所截, 这三条直线把平面分成的部分是 ()
- (A) 5. (B) 6.
- (C) 7. (D) 8.
16. 下列正确语句是 ()
- (A) 在所有连结两点的线中, 直线最短.

(B) 线段 AB 是点 A 与点 B 的距离.

(C) 两条不重合的直线, 在同一个平面内, 不平行必相交.

(D) 三条直线两两相交, 必有三个交点.

17. 三条直线两两相交, 且不过同一点, 那么到这三条直线距离相等的点有 ()

(A) 1 个. (B) 3 个.

(C) 4 个. (D) 5 个.

18. 如果两个角的两边分别平行, 而其中一个角比另一个角的 4 倍少 30° ; 那么这两个角是 ()

(A) 42° 和 138° . (B) 都是 10° .

(C) 42° 和 138° 或都是 10° .

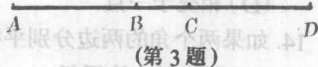
(D) 以上答案都不对.

B 填空题

1. 不在同一直线上的 A、B、C 三点, 经过其中每两个点画一条直线, 这样的直线可画 _____ 条.

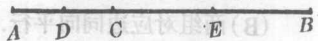
2. 已知 $CB = 4\text{cm}$, $DB = 7\text{cm}$, 且 D 是 AC 的中点, 则 $AB =$ _____ cm , $AC =$ _____ cm .

3. 如图, 如果 $AC = BD$, 那么 $AB =$ _____.



(第 3 题)

4. 如图, 已知 D 是 AC 的中点, E 是 BC 的中点, 则 $DE =$ _____.



(第 4 题)

5. 一个角比它的余角大 36° , 这个角的度数是 _____, 它的余角的度数是 _____.

6. 一个角的余角和它的补角互为补角, 这个角的度数是 _____.

7. 互为余角的两个角都是 _____ 角, 互补且相等的两个角是 _____ 角, 两个锐角的和一定小于 _____ 角, 钝角小于 _____ 角而大于 _____ 角.

8. $135^\circ =$ _____ 平角, $22.5^\circ =$ _____ 周角, $\frac{5}{9}$ 平角 = _____ $^\circ$.