考研丛书

KAO YAN CONG SHU

数学(一)

考研教案

——透讲硕士研究生入学考试数学基础

主编：张贵海

西北工業大學出版社

名师考案丛书
MINGSHIKAOANCONGSHU

数学(一)考研教案

——透讲硕士研究生入学考试数学基础

主　编　张贵海
主　审　封建湖
编著者(按姓氏笔画为序)
马　良　任建辉　刘元会
张凤银　胡志涛　姜根明
董安国

西北工業大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学(一)考研教案/张贵海主编. —西安:西北工业大学出版社,2009.3
ISBN 978-7-5612-2512-7

Ⅰ. 数…　Ⅱ. 张…　Ⅲ. 高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料　Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 022027 号

出版发行:西北工业大学出版社
通信地址:西安市友谊西路 127 号　**邮编**:710072
电　　话:(029)88493844　88491757
网　　址:www.nwpup.com
印 刷 者:陕西向阳印务有限公司
开　　本:787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张:25.5
字　　数:750 千字
版　　次:2009 年 3 月第 1 版　　2009 年 3 月第 1 次印刷
定　　价:40.00 元

前　言

以硕士研究生入学考试为契机，把高等数学、线性代数和概率统计这三门数学基础课进行认真复习与总结，为今后工作打下坚实的数学基础是十分有益的。硕士研究生入学考试是“具有选拔功能的水平考试”，其以考查基本概念、基本理论、基本方法为主线，以六类题型，即选择题、填空题、计算题、证明题、综合题和应用题来考查考生的数学综合能力。即对理论、概念的理解能力，有关运算的计算能力，逻辑的推理分析能力和综合应用的创见能力，进行全面考察。这些能力的培养和增强绝非是一朝一夕所能完成的，考生务必早作准备，不抱侥幸心里，不迷信个人权威，在日复一日的踏踏实实的学习中增长才智。笔者从事大学基础数学教学 20 余年，一直关注着研究生入学考试题型的变化与动向，尤其是在越来越重视基础考查的今天，为了使考生打好数学基础，手中有本比较全面、系统的对入学考试数学基本概念、基本理论、基本方法点评、总结的资料。笔者依据教育部最新入学考试大纲的各项要求及入学试题的命题特点，结合学生实际、考生要求，综合多年的教学心得与多年辅导考生的体会，并与编者们进行反复的讨论、推敲，终于于近日完成本书的编写。本书的出版，希望能帮助广大考生高效、有序、全面地做好考前复习，力争在入学考试中取得满意的成绩。

本书的核心内容是对各门数学课程中的主要概念、重要结论和做题方法的归类与总结，其目的是加深考生对内容的理解与掌握，在尽短的时间内把书读薄。本书的内容编排具有以下特点：

(1)以题型、方法归类为主线，突出解题方法与技巧，以主代次，用重点渗透和提挈整个考试内容。为加强考生基础，甚至把有些重要的数学结论与定理以例题的形式进行讲解。解题思路清晰，方法技巧归纳全面、到位，讲解透彻，所选例题与考研命题相吻合。

(2)把考试内容与例题进行了有机地结合，是通过对具体例题的讲解达到对基本概念、基本理论、基本方法的理解与掌握。即内容与例题不分离，什么样的知识点，就选择相应的题目进行讲解，而所有例题的选取，决不是简单题目的堆积，都是对所讲内容最恰当的诠释与说明。对知识点的分析可以说是一针见血，直通要害，使读者读起来有骨有肉，容易理解与掌握，

(3)书中的例题是作者对历年考题的认真研究和分析后精心挑选出来的，有些例题具有一定的代表性和典型性，从中可以折射出考题的特点和命题的思路及规律。也有不少例题的解答是一题多解，其目的是为了开拓视野，启发考生的解题思路，从而达到提高考生的应变能力与应试能力，使考生对所学内容真正达到融会贯通。

另外，为便于考生真正掌握考试内容，检验、巩固复习效果，本书还在所讲内容后及时地设置了部分思考题，编录了 2005—2009 年硕士研究生入学考试的部分真题与答案，供考生思考

与练习。

在本书的编写过程中，我们参阅了不少的教材与资料，受到不少的启发和教益，谨向有关的作者表示诚挚的谢意！同时，封建湖教授、马江洪教授、李之后老师和西北工业大学出版社的傅高明先生对本书的出版都给予了热情的支持与指导，付出了很大的努力，在此一并致谢！

由于编者水平有限，书中难免有不妥与错误之处，欢迎使用者多提宝贵意见，恳请读者批评指正。

编　者
2009 年 1 月

目 录

高等数学

线性代数

概率论与数理统计

第一讲 函数的极限与连续

一、 主要概念及重要结论

1. 数列的极限

$$\lim_{n\to\infty}x_n = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists N,\text{当 } n>N \text{ 时,总有 } |x_n - A| < \varepsilon.$$

【例 1-1】 证明极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+10}}=1$.

证明 由于$\left|\dfrac{n}{\sqrt{n^2+10}}-1\right|=\dfrac{10}{\sqrt{n^2+10}(n+\sqrt{n^2+10})}<\dfrac{10}{n}$,所以 $\forall\varepsilon>0$,只要$\dfrac{10}{n}<\varepsilon$,即 $n>\dfrac{10}{\varepsilon}$,便有$\left|\dfrac{n}{\sqrt{n^2+10}}-1\right|<\varepsilon$,因此 $\forall\varepsilon>0$,只须取 $N=\left[\dfrac{10}{n}\right]$. 当 $n>N$ 时,总有$\left|\dfrac{n}{\sqrt{n^2+10}}-1\right|<\varepsilon$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+10}}=1$.

【例 1-2】 设 $a>1$,求证$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

证明 由于$|\sqrt[n]{a}-1|=\dfrac{a-1}{a^{\frac{n-1}{n}}+a^{\frac{n-2}{n}}+\cdots+1}<\dfrac{a-1}{n}$,只要取 $N=\left[\dfrac{a-1}{\varepsilon}\right]$,那么 $\forall\varepsilon>0$,当 $n>N$,即 $n>\left[\dfrac{a-1}{\varepsilon}\right]$时,便有$|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$,因此$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

【例 1-3】 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,$y_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$,证明$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$.

证明 由于$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,所以 $\forall\varepsilon>0$,存在正整数 N_1,当 $n>N_1$ 时,$|x_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$,此时有

$$\begin{aligned}|y_n-a| &= \frac{1}{n}|(x_1-a)+(x_2-a)+\cdots+(x_{N_1}-a)+(x_{N_1+1}-a)+\cdots+(x_n-a)|\\ &< \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1}|x_k-a|+\frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1}|x_k-a|+\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

又$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{N_1}|x_k-a|=0$,故存在正整数 N_2,当 $n>N_2$ 时,有$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{N_1}|x_k-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.
今取 $N=\max\{N_1,N_2\}$,那么当 $n>N$ 时,总有 $|y_n-a|<\varepsilon$,故$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$.

思考题

(1) 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,且 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$,证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=a$.

(2) 设 $a_n>0(n=0,1,2,\cdots)$,且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\rho$,证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho$.

(3) 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}}$.

(4) 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

2. 函数的极限

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists X>0$,当$|x|>X$时,总有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当$0<|x-x_0|<\delta$,总有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

【例 1-4】 设$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,证明存在$X>0$,使得当$x\geqslant X$时,$f(x)$有界.

证明 由于$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,所以对$\varepsilon_0=1$,存在$X>0$,使得当$x\geqslant X$时,有$|f(x)-A|<1$,此时便有$|f(x)|\leqslant|f(x)-A|+|A|<1+|A|$,即当$x\geqslant X$时,$f(x)$有界.

【例 1-5】 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$,证明存在$\delta>0$,使得当$x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$时,有$\dfrac{A}{2}<f(x)<\dfrac{3}{2}A$.

证明 由于$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,因此对$\varepsilon_0=\dfrac{A}{2}>0$,存在$\delta>0$,使得当$0<|x-x_0|<\delta$时,$|f(x)-A|<\dfrac{A}{2}$,即当$x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$时,$\dfrac{A}{2}<f(x)<\dfrac{3}{2}A$.

自然,当$x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$时,便有$f(x)>0(x\in\mathring{U}(x_0,\delta))$,这正是极限的保号性质.

3. 极限的保号性(局部包容性)

(1) 若$f(x)>0$,则$\lim f(x)\geqslant 0$(极限存在).

(2) 若$\lim f(x)>0$,则$f(x)>0$(局部性质).

(3) 若$\lim f(x)=A>0$,则对任意的$0<k<1$,有$f(x)>kA$(局部性质).

【例 1-6】 设$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{(x-1)^2}=2$,问$f(1)$是否为$f(x)$的极值.

解 依题设知存在$\delta>0$,使得当$x\in\mathring{U}(1,\delta)$时,$\dfrac{f(x)-f(1)}{(x-1)^2}>0$,从而有$f(x)-f(1)>0,x\in\mathring{U}(1,\delta)$,可见$f(1)$是$f(x)$的极小值.

4. 极限为 A 的等价性

$$\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha.\text{其中}\lim\alpha=0.$$

【例 1-7】 已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=1$,求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$.

解 设$\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=1+\alpha$,其中$\lim\limits_{x\to 0}\alpha=0$.则$xf(x)=x^3+\alpha x^3-\sin 6x$,所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{6x+x^3+\alpha x^3-\sin 6x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}+1+\lim_{x\to 0}\alpha=\lim_{x\to 0}\frac{(6x)^3}{6x^3}+1=37.$$

评注 本题用 Taylor(泰勒)中值定理来做才是合理做法.

思考题 设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x+f(x)}{x^4}=1$,则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{f(x)}=(\quad)$.

A. ∞ B. 0 C. 6 D. -6

【例 1-8】 设 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，则 $(0,0)$ 点是 $f(x,y)$ 的________.

A. 极大值点　　B. 极小值点　　C. 不是极值点　　D. 不能确定

解 设 $\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1+\alpha$，其中 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\alpha=0$，则

$$f(x,y)=xy+(x^2+y^2)^2+\alpha(x^2+y^2)^2=xy+(x^2+y^2)^2+o(\rho)(\rho=x^2+y^2),$$

因此存在邻域 $U(0,\delta)$，使得当 $x\in U(0,\delta)$ 时，有

$$f(x,x)=x^2+4x^4+o(x^4)>0,\quad f(x,-x)=-x^2+4x^4+o(x^4)<0,$$

可见 $(0,0)$ 点不是 $f(x,y)$ 的极值点，故应选 C.

5. 极限为 A 的充要性

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A,\ \lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=A.$$

【例 1-9】 研究下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$.　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-x\arctan x}{e^x+x}$.

解 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}{x}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}{x}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故原极限不存在.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-x\arctan x}{e^x+x}=1$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-x\arctan x}{e^x+x}=\dfrac{\pi}{2}$，故原极限不存在.

【例 1-10】 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$，则 $f(x)$ 有几个间断点，并指出它的类别.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\infty$，所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第二类无穷型间断点. 又 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=-1$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=0$，所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的第一类跳跃型间断点.

6. 无穷小的阶及其运算

设 α,β 为同一极限过程的无穷小，即 $\lim\alpha=\lim\beta=0$.

(1) 若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0(\beta\neq 0)$，则称 α 是比 β 更高阶的无穷小，记为 $\alpha=o(\beta)$.

(2) 若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty(\beta\neq 0)$，则称 α 是比 β 低阶的无穷小.

(3) 若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta^k}=c\neq 0(k>0)$，则称 α 是 β 的 k 阶无穷小，特别当 $k=1$ 时，称 α 与 β 是同阶无穷小，记为 $\alpha=0(\beta)$. 当 $k=1$，且 $c=1$ 时，称 α 与 β 是等价无穷小，记为 $\alpha\sim\beta$.

(4) 设当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)$，$\beta(x)$ 分别为 x 的 k 阶和 l 阶无穷小 $(k>0,l>0)$，则当 $k\neq l$ 时，$\alpha(x)\pm\beta(x)$ 是 $\min\{k,l\}$ 阶无穷小；当 $k=l$ 且 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 同号时，$\alpha(x)+\beta(x)$ 仍为 k 阶无穷小，而 $\alpha(x)-\beta(x)$ 的阶数大于等于 k.

(5) 设当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)$，$\beta(x)$ 分别为 x 的 k 阶和 l 阶无穷小 $(k>0,l>0)$，则 $\alpha(x)\beta(x)$ 当 $x\to 0$ 时为 x 的 $k+l$ 阶无穷小.

(6) 设当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)$，$\beta(x)$ 分别为 x 的 k 阶和 l 无穷小，且 $k>l$，则 $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 当 $x\to 0$ 时为 x 的

$k-l$ 阶无穷小.

(7) 设当 $x\to 0$ 时,$\alpha(x)$ 为 x 的 k 阶($k>1$) 无穷小,且 $\alpha(x)$ 可导,则 $\alpha'(x)$ 当 $x\to 0$ 时为 x 的 $k-1$ 阶无穷小,设 $\alpha(x)$ 当 $x\to 0$ 时为 x 的 k 阶($k>0$) 无穷小,且 $\alpha(x)$ 可积,则 $\int_0^x \alpha(x)\mathrm{d}x$ 当 $x\to 0$ 时为 x 的 $k+1$ 阶无穷小.

【例 1-11】 设 $\alpha=\int_0^x \cos t^2\mathrm{d}t$,$\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\mathrm{d}t$,$r=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\mathrm{d}t$. 当 $x\to 0^+$ 时,请将无穷小量 α,β,γ 排列起来,使排在后面的是前一个的高阶无穷小,则正确的排列次序是________.

A. α,β,γ　　B. α,γ,β　　C. β,α,γ　　D. β,γ,α

解 由于 $\alpha'=\cos x^2$,$\beta'=2x\tan x$,$\gamma'=\dfrac{\sin\sqrt{x^3}}{2\sqrt{x}}$,当 $x\to 0^+$ 时分别是 x 的 0 阶、2 阶和 1 阶无穷小,因此 α,β,γ 当 $x\to 0^+$ 分别是 x 的 1 阶、3 阶和 2 阶无穷小,故应选 B.

7. 无穷大、无界和无穷小的关系

无穷大一定无界,但无界未必是无穷大.

无穷大的倒数为无穷小,但无穷小的倒数未必就是无穷大.

【例 1-12】 问当 $x\to 0^+$ 时,函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 是否为无穷大?在区间$(0,1]$内是否有界?

解 当 $x\to 0^+$ 时 $f(x)$ 不是无穷大,在区间$(0,1]$内也无界. 因为当 $x=x_n=\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)^{-1}$ 时,$f(x_n)=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$,显然 $x_n\to 0^+$ $(n\to\infty)$,但 $f(x_n)$ 可大于任给的正数 M,故 $f(x)$ 在$(0,1]$内无界. 又当 $x=y_n=(2n\pi)^{-1}\to 0(n\to\infty)$ 时,$f(y_n)=0$,因此 $f(x)$ 当 $x\to 0^+$ 时也不是无穷大,即 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\neq\infty$.

8. 数列与子列、数列与函数的极限关系

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,则对任何子列 x_{n_k} 总有 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=A$. 特别若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=A$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

(2) 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$,则对任意数列 x_n,只要 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0(\infty)$,便有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

【例 1-13】 (1) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.　　(2) 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin x$ 不存在.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}=1$.

(2) 设 $f(x)=x\sin x$,$x_n=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\to\infty(n\to\infty)$,由于 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$,所以原极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin x$ 不存在.

9. 函数的连续性与间断点的分类

(1) 连续. $f(x)$ 在 x_0 点连续 $\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)=f(\lim\limits_{x\to x_0}x)$($f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 内有定义). 类似有左、右连续的概念,可见函数连续的实质就是函数运算与极限运算可交换运算次序.

(2) 间断点的分类:

第一类间断点是指 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$,$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 都存在的间断点($f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义),其中有

可去型　　$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq f(x_0)$.

跳跃型　　$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$(注意:有可能单侧连续).

第二类间断点是指$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 至少有一个不存在的间断点,特别地当$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$时,称 x_0 是 $f(x)$ 的无穷型间断点,当 $f(x)$ 在 x_0 近旁无限次振荡,且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在时,称 x_0 为 $f(x)$ 的振荡型间断点.

(3) 连续函数的运算性质及初等函数的连续性.连续函数的和、差、积、商(分母不为零)仍为连续函数;连续函数的复合函数仍为连续函数,并且若

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\varphi(x)=u_0,\quad \lim_{u\to u_0}f(u)=f(u_0),$$

则

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f[\varphi(x)]=f[\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\varphi(x)]=f(u_0)=\lim_{u\to u_0}f(u).$$

这正是用变量代换求极限的依据,例如

$$\lim_{x\to3}\sqrt{\frac{x^2-9}{x-3}}=\sqrt{\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}}=\sqrt{6},\quad \lim_{x\to\infty}e^{x\sin\frac{1}{x}}=\exp\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=e.$$

注意　基本初等函数在它们的定义域内都是连续的,而一切初等函数在其定义区间内都是连续的,因而初等函数的间断点一定是它的非定义域内的点或孤立定义点.

【例 1-14】　设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(x^2-4)}{\sin\pi x},x<0,\\ \dfrac{x(x+1)}{x^2-1},\ x\geqslant0.\end{cases}$ 试确定 $f(x)$ 的间断点并讨论其类型.

解　由于

$$\lim_{x\to-2}f(x)=\lim_{x\to-2}\frac{x(x+2)(x-2)}{\sin\pi x}=\lim_{x\to-2}\frac{x(x+2)(x-2)}{\sin\pi(x+2)}=\frac{8}{\pi}.$$

故 $x=-2$ 为 $f(x)$ 的第一类可去型间断点.又

$$\lim_{x\to-n}f(x)=\lim_{x\to-n}\frac{x(x^2-4)}{\sin\pi x}=\infty(n\in N^+,且\ n\neq2).$$

故 $x=-1,-3,-4,\cdots$ 为 $f(x)$ 的第二类无穷型间断点.而

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x(x+1)}{x^2-1}=0,\quad \lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{x(x^2-4)}{\sin\pi x}=-\frac{4}{\pi}.$$

所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类跳跃型间断点.由

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x(x+1)}{x^2-1}=\infty.$$

可知,$x=1$ 也是 $f(x)$ 的第二类无穷型间断点.

10. 闭区间上连续函数的性质

性质 1　闭区间上的连续函数一定有最大值与最小值.

性质 2　闭区间上的连续函数一定有界.

性质 3　闭区间上的连续函数必能取得介于最小值与最大值之间的任何值(介值定理).

推论(零点定理)　设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,且 $f(a)f(b)<0$,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使 $f(\xi)=0$.

注意　以上性质都是充分而不必要的,但作为充分性的定理,闭区间上连续的条件不能减弱.

【例 1-15】　设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,且 $f(0)=f(1)$,求证

(1) 存在 $\xi \in (0,1)$，使 $f(\xi) = f(\xi + \frac{1}{2})$.

(2) 对任意自然数 n，存在 $\xi \in (0,1)$ 使 $f(\xi) = f(\xi + \frac{1}{n})$.

证明 (1) 令 $F(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{2})$，$x \in [0, \frac{1}{2}]$，则 $F(0)F(\frac{1}{2}) = -[f(0) - f(\frac{1}{2})]^2 \leqslant 0$，显然 $F(x)$ 在 $[0, \frac{1}{2}]$ 上连续，由连续函数的介值定理知存在 $\xi \in (0, \frac{1}{2}] \subset (0,1)$，使

$$F(\xi) = 0, \text{即 } f(\xi) = f(\xi + \frac{1}{2}).$$

(2) 令 $G(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{n})$，$x \in [0, \frac{n-1}{n}]$，依题设 $G(x)$ 连续，且

$$G(0) + G(\frac{1}{n}) + \cdots + G(\frac{n-1}{n}) = f(0) - f(1) = 0.$$

若 $G(0) = G(\frac{1}{n}) = \cdots = G(\frac{n-1}{n}) = 0$，此时结论显然成立，若 $G(0), G(\frac{1}{n}), \cdots, G(\frac{n-1}{n})$ 不全为零，那么其中必然是有正有负，不妨设 $G(\frac{k}{n})G(\frac{l}{n}) < 0$ ($k < l$；$k = 0,1,2,\cdots,n-1$；$l = 0,1,2,\cdots,n-1$)，由连续函数的介值定理知存在 $\xi \in (\frac{k}{n}, \frac{l}{n}) \subset (0,1)$，使 $G(\xi) = 0$，即 $f(\xi) = f(\xi + \frac{1}{n})$.

二、 求极限的方法

1. 运用极限的运算法则求极限

四则运算法则：

(1) $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$.

(2) $\lim f(x)g(x) = \lim f(x) \lim g(x) = AB$.

(3) $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0)$.

复合运算法则：

设 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \varphi(x) = u_0(\infty)$，$\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = A$，则 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f[\varphi(x)] = \lim\limits_{u \to u_0} f(u) = A$.

【例 1-16】 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x \to 1}(1 - x)\tan\frac{\pi x}{2}$.

(2) $\lim\limits_{x \to 0}\frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} (\alpha > 0)$.

(3) $\lim\limits_{x \to +\infty}\frac{\ln(x^2 + 1)}{\ln(x^3 - 1)}$.

(4) $\lim\limits_{x \to -\infty}\frac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}}$.

(5) $\lim\limits_{n \to +\infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x + 2} - 2\sqrt{x + 1} + \sqrt{x})$.

解 (1) $\lim\limits_{x \to 1}(1 - x)\tan\frac{\pi x}{2} \xlongequal{t = 1 - x} \lim\limits_{t \to 0}\frac{t}{\tan(\pi t/2)} = \frac{2}{\pi}$.

(2) $\lim\limits_{x \to 0}\frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} \xlongequal{(1 + x)^\alpha = 1 + t} \lim\limits_{x \to 0}\frac{t}{\ln(1 + t)}\frac{\ln(1 + t)}{x} = \lim\limits_{t \to 0}\frac{t}{\ln(1 + t)}\lim\limits_{x \to 0}\frac{\alpha\ln(1 + x)}{x} = \alpha$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x^2+1)}{\ln(x^3-1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\ln x+\ln(1+x^{-2})}{3\ln x+\ln(1-x^{-3})}=\dfrac{2}{3}.$

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+1+\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{\sin x}{x^2}}}=1.$

(5) $$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}x^{+}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})&=\lim_{x\to+\infty}x^{+}\frac{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})^2-4(x+1)}{\sqrt{x+2}+2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^{+}[\sqrt{x(x+2)}-x-1]}{\sqrt{x+2}+2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^{+}}{(\sqrt{x+2}+2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x(x+2)}+x+1)}\\&=-\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

评注 极限的运算法则是每道题都要运用的最基本的求极限方法，运用四则运算法则时除要注意其条件外，重在对原题进行代数变形，其中变量代换也是常用手段，求极限常用的代换主要有平移代换、倒变换等.

2. 运用两边夹准则求极限

(1) 数列形式. 若 $x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$.

(2) 函数形式. 若 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$ 且 $\lim g(x)=\lim h(x)=a$，则 $\lim f(x)=a$.

【例 1-17】 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right).$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n)^{\frac{1}{n}}$，其中 $a_k>0,k=1,2,\cdots,m.$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x^2\sin\frac{1}{x})}{x}.$

(4) $\lim\limits_{x\to0^+}x[\dfrac{1}{x}]$（其中，$[\dfrac{1}{x}]$ 为取整函数）.

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$

解 (1) 由于 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+n+n}<\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+n+k}<\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+n+1}$，而 $\sum\limits_{k=1}^{n}k=\dfrac{n(n+1)}{2}$，故

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+1}=\frac{1}{2}，所以\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+k}=\frac{1}{2}.$$

(2) 设 $\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}=a$，由于 $a<(a_1^n+a_2^n+\cdots a_m^n)^{\frac{1}{n}}<m^{\frac{1}{n}}a\xrightarrow{n\to\infty}a$，故

$$\lim_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n)^{\frac{1}{n}}=a.$$

(3) 当 $x\neq0$ 时，由于 $|\sin(x^2\sin\frac{1}{x})|\leqslant|x^2\sin\frac{1}{x}|\leqslant x^2$；$0\leqslant\left|\frac{1}{x}\cdot\sin(x^2\sin\frac{1}{x})\right|\leqslant|x|$ $\xrightarrow{x\to0}0$，故 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x^2\sin\frac{1}{x})}{x}=0.$

评注 $\sin(x^2\sin\frac{1}{x})$ 并不等价于 $x^2\sin\frac{1}{x}$，因此本题不适合用等价无穷小代换解答.

(4) 当 $x>0$ 时，由于 $\frac{1}{x}-1<[\frac{1}{x}]\leqslant\frac{1}{x}$，$1-x<x[\frac{1}{x}]\leqslant 1$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}x[\frac{1}{x}]=1$.

(5) 由于 $\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(\ln k-\ln n)$，而 $\ln k<\int_k^{k+1}\ln x\mathrm{d}x<\ln(k+1)(k=1,2,\cdots,n)$，所以

$$\sum_{k=1}^{n}\ln k<\int_1^{n+1}\ln x\mathrm{d}x,\quad \int_1^n\ln x\mathrm{d}x<\sum_{k=1}^{n-1}\ln(k+1)=\sum_{k=2}^{n}\ln k=\sum_{k=1}^{n}\ln k,$$

即 $\int_1^n\ln x\mathrm{d}x<\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k<\int_1^{n+1}\ln x\mathrm{d}x$. 从而 $\dfrac{\int_1^n\ln x\mathrm{d}x-n\ln n}{n}<\ln\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}<\dfrac{\int_1^{n+1}\ln x\mathrm{d}x-n\ln n}{n}$，而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_1^n\ln x\mathrm{d}x-n\ln n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\int_1^{n+1}\ln x\mathrm{d}x-n\ln n}{n}=-1,\text{所以}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\mathrm{e}^{-1}.$$

思考题

(1) 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有几个不可导点?

(2) 设 $x_n\leqslant a\leqslant y_n(n\in\mathrm{N}^+)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$.

(3) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[na_n]}{n}=a$.

3. 利用单调有界原理确定数列的极限

若数列 $\{x_n\}$ 单调($x_n\leqslant x_{n+1}$ 或 $x_n\geqslant x_{n+1}$)且有界，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 一定存在.

【例 1-18】 设 $x_1>0$，$x_{n+1}=\frac{3(1+x_n)}{3+x_n}$，证明此数列有极限，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证明 (1) $x_1=\sqrt{3}$ 时，由 $x_{n+1}-x_n=\frac{3-x_n^2}{3+x_n}$ 得 $x_n\equiv\sqrt{3}$，此时 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{3}$.

(2) 当 $0<x_1<\sqrt{3}$ 时，$x_2-x_1>0$，又由 $x_{n+1}-x_n=\frac{6(x_n-x_{n-1})}{(3+x_n)(3+x_{n-1})}$，知 $x_{n+1}-x_n>0(n=1,2,\cdots)$，故 $\{x_n\}$ 单增且有上界 $\sqrt{3}$.

(3) 当 $x_1>\sqrt{3}$ 时，由 $x_2-x_1<0$，知 $x_{n+1}-x_n<0(n=1,2,\cdots)$，从而 $\{x_n\}$ 单减且有下界 $\sqrt{3}$.

由以上讨论可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，在 $x_{n+1}=\frac{3(1+x_n)}{3+x_n}$ 两边令 $n\to\infty$ 便得 $a=\frac{3(1+a)}{3+a}$，解得 $a=\pm\sqrt{3}$，由 $a>0$ 知道 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{3}$.

评注 ① 数列的单调性与数列的变化范围密切相关，请研究数列 $x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$，$x_1=\sqrt{a}(a>0,n=1,2,\cdots)$. ② 单调有界原理仅是一个充分性的结论，例如 $x_n=\frac{(-1)}{n}(n=1,2,\cdots)$ 不单调，但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

4. 运用基本极限求极限

(1) 基本形式：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\mathrm{e}$.

(2) 一般形式：$\lim\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$，其中 $\varphi(x)\neq 0$，$\lim\varphi(x)=0$.

$$\lim(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\mathrm{e}\text{，其中 }\varphi(x)\neq 0,\lim\varphi(x)=0.$$

(3) 推广形式：$\lim(1+\varphi(x))^{\psi(x)}=\exp[\lim\varphi(x)\psi(x)]$，其中 $\lim\varphi(x)=0,\lim\psi(x)=\infty$.

【例 1－19】 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+\sqrt[n]{3}}{2}\right)^n$.　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_m^x}{m}\right)^{\frac{1}{x}}$，其中 $a_k>0,k=1,2,\cdots$.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+\sqrt[n]{3}}{2}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{\sqrt[n]{3}-1}{2}\right)^n=\exp\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2}(3^{\frac{1}{n}}-1)=\exp\dfrac{\ln 3}{2}=\sqrt{3}$.

$$(2)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_m^x}{m}\right)^{\frac{1}{x}}=\exp\lim_{x\to 0}\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_m^x-m}{mx}$$

$$=\exp\lim_{x\to 0}\frac{a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_m^x\ln a_m}{m}=\sqrt[m]{a_1a_2\cdots a_m}.$$

评注 由本例(2)可得$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\cdots+\sqrt[n]{a_m}}{m}\right)^n=\sqrt[m]{a_1a_2\cdots a_m}$. 可见本例(1)是(2)的特例，又如$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n=\sqrt[3]{abc}\,(a>0,b>0,c>0)$等都是(2)的特例.

思考题

(1) 设数列$\{x_n\}$满足 $0<x_1<\pi,x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$.

(Ⅰ) 证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求之；(Ⅱ) 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

(2) 设 $f(x)$ 在原点二阶可导，且$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$.

(Ⅰ) 求 $f(0),f'(0),f''(0)$；(Ⅱ) 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

5. 运用等价无穷小代换求极限

设$\lim\alpha=\lim\beta=0,\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta',\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$存在，则$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$，其中 $\alpha',\beta',\beta\neq 0$.

常用到的等价无穷小有

$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\mathrm{e}^x-1\sim\ln(1+x)\sim\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\,(x\to 0)$；

$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$；$a^x-1\sim x\ln a(a>0,a\neq 1)$；$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x(\alpha>0$ 为常数$)$，$(x\to 0)$.

特别有 $\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{1}{n}x(n\to\infty)$；$x-\sin x\sim\dfrac{1}{6}x^3(x\to 0)$.

【例 1－20】 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{(2^x-1)(1-\cos x)}$.　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{\ln(2-\cos x+\sin x)}$.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}})(a>0,a\neq 1)$.　　(4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln n}(\sqrt[n]{n}-1)$.　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\mathrm{e}^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x})-\sin x}{\arctan(4\sqrt[3]{1-\cos x})}$.

(7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-1}{(2^x-1)(1-\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3}{x^3\ln 2}=\dfrac{2}{\ln 2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{\ln(2-\cos x+\sin x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{3\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x+\sin x)}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\cos x}{x}+\dfrac{\sin x}{x}\right)^{-1}=\dfrac{2}{3}$.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}})=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2(a^{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}-1)a^{\frac{1}{x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\ln a}{x(x+1)}=\ln a$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2\times(1-\cos x)}{x^2(1+\sqrt{\cos x})}=\dfrac{1}{2}$.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln n}(\sqrt[n]{n}-1)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n}{\ln n}(e^{\frac{\ln n}{n}}-1)=1$.

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(e^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x})-\sin x}{\arctan(4\sqrt[3]{1-\cos x})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sqrt[3]{1-\cos x}e^{-\sin x})}{4\sqrt[3]{1-\cos x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\sin x}}{4}=\dfrac{1}{4}$.

(7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{2}\times(1-x)\times\frac{1}{3}\times(1-x)\cdots\frac{1}{n}(1-x)}{(1-x)^{n-1}}=\dfrac{1}{n!}$.

评注 等价无穷小代换只有出现在乘除因子时才能使用,作为加减项而不能够代换,如遇见和的极限,可将和的极限转化为极限的和(但必须保证分开后每项极限都存在)方可使用等价无穷小代换,例如

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=2,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{2x}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}=1+2=3.$$

6. 运用洛比塔法则求极限

设$\lim f(x)=\lim g(x)=0(\infty)$,且$\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在($\infty$),则$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

【例 1-21】 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$. (2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)$. (3) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x-e\right]$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sin^2 x}$. (5) $\lim\limits_{n\to\infty}(n\tan\dfrac{1}{n})^{n^2}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2x}=\dfrac{1}{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x-x^2}{x^2\tan^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x+x}{x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\dfrac{2}{3}$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[(1+\dfrac{1}{x})^x-e\right]=\lim\limits_{x\to\infty}ex\left[e^{x\ln(1+\frac{1}{x})-1}-1\right]=\lim\limits_{x\to\infty}ex\left[x\ln(1+\dfrac{1}{x})-1\right]$

$$\xlongequal{t=\frac{1}{x}}e\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}=e\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}=e\lim_{t\to 0}\frac{-1}{2(1+t)}=-\frac{e}{2}.$$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+\sin x}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{12}$.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}(n\tan\dfrac{1}{n})^{n^2}\xlongequal{t=\frac{1}{n}}\lim\limits_{t\to 0^+}\left(\dfrac{\tan t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}}=\exp\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\tan t-t}{t^3}=e^{\frac{1}{3}}$.