



# 胡海昌院士文集

中国宇航出版社

·北京·

ISBN 978-7-80218-305-6

9 787802 183056 >

## 内 容 简 介

本文集精选了胡海昌院士有代表性的 22 篇论文全文,收录了胡海昌院士 141 篇论文目录和 5 部专著、2 部译著的书目,并附有胡海昌院士的传略。希望本文集的出版有助于广大科技工作者,特别是年轻科技人员对胡海昌院士的科学精神、成就和贡献的了解,也希望能启迪和激励大家为祖国的繁荣昌盛、民族富强努力工作。

版 权 所 有 侵 权 必 究

## 图书在版编目(CIP)数据

胡海昌院士文集/胡海昌著. —北京:中国宇航出版社,2008. 1

ISBN 978 - 7 - 80218 - 305 - 6

I . 胡... II . 胡... III . ①力学—文集②航天—文集 IV . O3 - 53 V4 - 53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 004202 号

责任编辑 刘亚静 装帧设计 03 工舍 责任校对 祝延萍

出 版 中国宇航出版社  
发 行

社 址 北京市阜成路 8 号 邮 编 100830  
(010)68768548

版 次 2008 年 1 月第 1 版  
2008 年 1 月第 1 次印刷

网 址 [www.caphbook.com](http://www.caphbook.com)/[www.caphbook.com.cn](http://www.caphbook.com.cn)

规 格 787 × 1092

经 销 新华书店

开 本 1/16

发行部 (010)68371900 (010)88530478(传真)  
(010)68768541 (010)68767294(传真)

印 张 17.25 彩 插 4 面

零售店 读者服务部 北京宇航文苑  
(010)68371105 (010)62529336

字 数 448 千字

承 印 北京智力达印刷有限公司

书 号 ISBN 978 - 7 - 80218 - 305 - 6

定 价 98.00 元

本书如有印装质量问题,可与发行部联系调换



**胡海昌**——1928年4月生。浙江省杭州市人。1950年7月毕业于浙江大学土木系，分配到中国科学院数学所。1956年调力学所。1965年调中国科学院651设计院，1968年转为国防科委五院501部。1993年后任航天工业总公司科技委顾问兼委员、中国空间技术研究院技术顾问、中国空间技术研究院总体设计部科技委名誉主任。第八届、第九届全国政协委员，北京市第八届政协常委。中国振动工程学会理事长、中国力学学会副理事长。北京大学、浙江大学、吉林大学兼职教授、青岛大学名誉教授。中国科学院院士。

在力学研究方面，首创弹性力学中的三类变量广义变分原理并推广应用。1966年起参加空间飞行器的研究与设计。参与筹建651设计院。负责东方红一号卫星早期的总体和结构设计，负责东方红二号卫星早期的总体和结构设计。先后培养了20多名硕士、博士研究生。

弹性力学变分原理及应用1982年获国家自然科学二等奖，为第一完成人。1990年起享受政府特殊津贴。1991年被航空航天工业部批准为有突出贡献的老专家。



▲ 第十二届全国振动技术交流会祝胡海昌院士70寿辰（1998年10月8日于清华大学）



▲ 胡海昌院士在中国空间技术研究院总体设计部博士、硕士研究生毕业典礼上（1996年）  
此为试读，需要完整PDF请访问：[www.ertongbook.com](http://www.ertongbook.com)



▶ 胡海昌院士在北京大学教师学术讨论班上（1981年）



▶ 胡海昌院士在中国振动工程学会成立大会上，与全体理事合影（1987年）



▶ 胡海昌院士在浙江大学作学术报告（1999年9月）



▲ 胡海昌院士在北京航空航天大学博士论文答辩会上（1996年）



▲ 胡海昌院士与家人在一起（1998年）

# 序

胡海昌先生是国际著名力学家,他对力学的多个分支都有深入研究和丰硕成果。最突出的成就是在1954年建立了弹性力学中以位移、应变和应力三类函数为自变函数的广义变分原理。由于该变分原理在理论上和在求近似解中的重要性,国际上将该原理称为胡-鹫津原理,将其中的泛函称为胡-鹫津泛函。胡先生在20世纪50年代得到了横观各向同性弹性体的空间问题的一般解,这在国际上常被称为胡海昌解。80年代,胡先生提出并建立了边界积分方程和原微分方程边值问题等价性的理论框架,在此基础上又陆续建立了与平面调和函数的边值问题、平面双调和函数的边值问题和弹性力学平面问题等价的边界积分方程。胡先生的这些重要学术贡献在国际力学界产生了重要影响并享有盛誉。

胡先生除了用毕生精力在力学多个分支领域获得多项创造性研究成果外,从1965年以来,他还用相当精力关心和参加中国空间技术的研究发展工作。1965年国家下达研制第一颗人造卫星重要任务。当时中国科学院力学研究所领导决定由胡先生和我负责立即组建一个卫星技术研究室,主持卫星结构和热控制分系统的研制,并参加卫星总体工作。他曾是我国第一颗人造地球卫星“东方红一号”总体组第一任组长。在中国早期卫星研究、设计和试验过程中,他就十分重视和强调动力学分析、结构静力与动力计算以及力学环境试验。在他的关心、指导下,组建和培养了卫星结构设计及其动力学分析队伍。进入80年代以来,在我国复杂航天器动力学的研究发展过程中,胡先生始终积极热情地给予关心、支持和指导。早在1980年,我国开展新型通信广播卫星和地球资源卫星预研阶段,为开展这类复杂航天器动力学分析设计的预研工作,在他的倡议下,我们决定组建了“卫星动力学与控制组”。多年来,胡先生对我国复杂航天器动力学方面的研究、发展和应用倾注了大量心血和精力,他作为著名力学家,以他雄厚坚实的理论基础和深入宽广的力学专长,在复杂航天器动力学的理论与方法等研究中给予了多方面的指导。

胡先生在长年孜孜不倦从事科学的同时,还热心教育事业,重视培养年青一代,几十年来培养出许多人才。他数十年在北京大学兼任教师,讲授过多门力学课程;1980年后胡先生作为北京大学博士生导师,指导博士生和硕士生多名。他还先后在清华大学、北京航空航天大学、中国科学技术大学和浙江大学兼

职、授课，并在浙江大学指导博士研究生。胡先生讲课有他的独特风格，能抓住要领，深入浅出，善于引导学生独立思考，提高学生独立工作能力，他的许多同事和朋友也常常受益于他的指点和帮助。

自80年代开始，胡先生还积极倡导在工程结构设计中，加强动态设计，推动振动理论的研究及应用。他和同行们创建了中国振动工程学会，创办了《振动与冲击》、《振动工程学报》，他本人在振动理论研究方面也取得许多重要成果，对我国振动工程的发展起了很大的推动作用。

《胡海昌院士文集》选编了胡海昌先生从20世纪50年代以来在国内外重要刊物上发表的有代表性的论文。该文集的出版是力学界和航天界的一件大事，值得祝贺！该文集的出版旨在弘扬胡海昌院士的科学创新精神，彰显他在力学、航天技术和教育事业上所作的重要贡献。希望读者尤其是青年学者能从文集内容中得到启迪，为建设创新型国家多作贡献。借此机会，谨向胡先生和夫人表示祝贺，衷心祝他们健康长寿。

闵桂荣

2007年12月于北京

# 目 录

## 第一部分 变分原理

论弹性体力学与受范性体力学中的一般变分原理 .....	3
ON SOME VARIATIONAL PRINCIPLES IN THE THEORY OF ELASTICITY AND THE THEORY OF PLASTICITY .....	28
ON TWO VARIATIONAL PRINCIPLES ABOUT THE NATURAL FREQUENCIES OF ELASTIC BODIES .....	45
广义变分原理在近似解中的合理应用 .....	59
DERIVATION OF THE CLASSICAL PLATE BENDING THEORY FROM ELASTICITY BY VARIATIONAL METHOD .....	77
NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITIONS FOR CORRECT USE OF GENERALIZED VARIATIONAL PRINCIPLES OF ELASTICITY IN APPROXIMATE SOLUTIONS .....	83
薄板弯曲理论中一个新的广义变分原理及其交替 $\max, \min$ 性质 .....	93

## 第二部分 边界积分方程

A NEW TYPE OF BOUNDARY INTEGRAL EQUATION IN ELASTICITY .....	105
NECESSARY AND SUFFICIENT BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS FOR PLANE HARMONIC FUNCTIONS .....	111
A NECESSARY AND SUFFICIENT SET OF BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS WITH INDIRECT UNKNOWNS FOR PLATE BENDING PROBLEM .....	120
EQUIVALENT BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS FOR PLANE ELASTICITY .....	130

## 第三部分 弹性力学

ON THE THREE-DIMENSIONAL PROBLEMS OF THE THEORY OF ELASTICITY OF A TRANSVERSELY ISOTROPIC BODY .....	139
ON THE GENERAL THEORY OF ELASTICITY FOR A SPHERICALLY ISOTROPIC MEDIUM .....	144
ON THE EQUILIBRIUM OF A TRANSVERSELY ISOTROPIC ELASTIC HALF SPACE .....	155
ON THE EQUILIBRIUM AND VIBRATION OF A TRANSVERSELY ISOTROPIC ELASTIC BODY .....	169

## 第四部分 工程振动

加快从静态设计到动态设计的过渡 .....	187
论几种本征值包含定理的内在联系 .....	191
结构凝聚动刚度的有效简化方案 .....	200
工程振动问题的分类及若干核心问题 .....	207

## 第五部分 其他

桁架分析之通路法 .....	213
ON THE SNAPPING OF A THIN SPHERICAL CAP .....	222
四边简支矩形底球面扁壳楼盖的简化计算方法 .....	242

## 附 录

胡海昌院士传略 .....	253
胡海昌院士学术著作总目录 .....	259
后记 .....	269

第一部分

---

变分原理



# 论弹性体力学与受范性体力学中的一般变分原理<sup>\*</sup>

## 1 引言

在弹性体力学和受范性体力学中,关于能量的变分原理常常作为推导方程的手段和作为近似解法的根据。这些原理大致可分成三类。第一类从位移(或速度)出发,证明在所有适合位移(或速度)边界条件的位移(或速度)中,真正的位移(或速度)使某一泛函达最小值。这类原理在本质上和最小势能原理相同或相似,因此可以总称为最小势能原理式的变分原理。过去研究过这类原理的有:Locatelli<sup>[18]</sup>(1939),Качанов<sup>[2]</sup>(1942),Prager<sup>[22]</sup>(1942),Марков<sup>[7]</sup>(1947),Качанов<sup>[3]</sup>(1949),Greenberg<sup>[10]</sup>(1949),Phillips<sup>[20]</sup>(1949),钱令希<sup>[11]</sup>(1950),Hill<sup>[14]</sup>(1950),Yamamoto<sup>[32]</sup>(1952),以及其他几位学者。

第二类变分原理从应力出发,证明在所有适合平衡方程,应力边界条件,在受范性体力学中则再加上适合屈服条件的应力中,真正的应力状态使某一泛函达最小值。这类原理可以说是线性弹性力学中的卡氏最小功原理的推广,因此可以总称为余能原理。过去研究过这类变分原理的学者有:Engesser<sup>[9]</sup>(1889),Haar and v. Kármán<sup>[11]</sup>(1909),Westergaad<sup>[31]</sup>(1941),Качанов<sup>[2]</sup>(1942),Prager<sup>[22]</sup>(1942),Sadowsky<sup>[28]</sup>(1943),Handelman<sup>[12]</sup>(1944),Лурье<sup>[6]</sup>(1946),Prager<sup>[23]</sup>(1946),Hill<sup>[14]</sup>(1948),Hodge and Prager<sup>[17]</sup>(1948),Philippidis<sup>[20]</sup>(1948),Reissner<sup>[25]</sup>(1948),Качанов<sup>[3]</sup>(1949),Greenberg<sup>[10]</sup>(1949),Phillips<sup>[21]</sup>(1949),钱令希<sup>[11]</sup>(1950),Hill<sup>[14]</sup>(1950),Yamamoto<sup>[32]</sup>(1952),及其他几位学者。

在第三类变分原理,把位移和应力看作是彼此独立无关的函数而让它们同时独立地变化。Reissner<sup>[26]</sup>(1950)曾这样建立了一个变分原理,证明这个变分原理相当于平衡方程、应变与应力的关系式以及边界条件。之后,de Veubeke<sup>[30]</sup>(1951)补充了Reissner的结果。

在这三类的变分原理中,前两者的优点在于明确地指出某泛函是最小或最大。对于作为近似解法的根据来说,那么前两者的缺点在于:(1)事实上往往不容易适合必须适合的方程和边界条件;(2)如果利用势能原理式的变分原理以近似地求解位移或速度,那么与这些位移或速度对应的应力便不适合平衡方程,因此这样求得的应力是否妥善便成了问题;同样,如果利用余能原理式的变分原理以近似地求解应力,那么这样求得的应力便不适合应变协调方程,因而亦就没有与它对应的连续位移或速度。

\* 原载于《物理学报》1954年第10卷第3期第259~290页。由于这篇论文的重要性,其1954年的中文版(本文)及1955年的英文版(下文)都收入本文集,中文版附英文摘要。

第三类变分原理的优点首先在于它在理论上是比较更一般性的,前两类的变分原理都可包括在它的特殊形式中。同时对于作为近似解法的根据来说,这类变分原理使人有更大的自由来选择近似解答。这类变分原理又使人能同时求得应力和位移,因而对于混合边界值问题便特别有用。

本文的目的便在于在弹性体力学、弹性薄板的弯曲理论以及范性体力学中建立允许位移(或速度)和应力同时变化的一般变分原理。许多前人的结果都可包括在我们的一般变分原理中。

本文第2部分建立了弹性体力学中的一般变分原理。我们假定物体的应变是很微小的,但是它的弹性可以是任意的,即可不服从虎克定律。事实上,正如 Новожилов<sup>[8]</sup>所指出的,这种弹性体还包括一系列在加荷载过程中有硬化作用的范性体。我们首先把3个位移分量、6个应变分量和6个应力分量等15个函数看作是彼此独立无关的函数而建立了广义余能原理和广义势能原理。接着我们又把3个位移分量和6个应力分量等9个函数看作是彼此独立无关的函数而建立了广义余能原理和广义势能原理的别种表示法。

本文第4部分建立了范性体力学中的一般变分原理。我们仍假定物体的应变很微小,但是物体的屈服条件以及应变与应力的关系则是相当一般的。我们将应变与应力的关系分为两类:一类是变形式的关系,另一类是流动式的关系。在变形式的关系中,我们将位移和应力(其中应力适合屈服条件)同时变化而建立了广义余能原理和广义势能原理。在流动式的关系中,我们将速度和应力的变化率(其中应力适合屈服条件)同时变化而建立了同样的两个变分原理。

本文第3部分建立了弹性薄板弯曲理论中的一般变分原理。在这里我们不但允许薄板的弹性可以是任意的,并且还允许产生大挠度。我们将薄板内的3个内力矩,薄板平面内的3个内力以及3个位移等9个函数看作是彼此独立无关的函数而建立了广义势能原理。这一事实表明,推广广义势能原理以适用于大应变问题是有可能的。接着我们便利用这个原理以变分法导得薄板弯曲理论中的卡门方程。在卡门方程中,一个待求函数是挠度,另一个待求函数是应力函数,两者的性质不同。因此无论用平常的势能原理或余能原理,都无法用变分法导得卡门方程。只有我们的广义势能原理,允许位移与应力同时变化,才提供了这个可能性。

## 2 弹性体力学中的一般变分原理

在本节中我们将建立弹性体力学的一般变分原理。我们假定物体的变形很微小,但是物体的弹性可是任意的,即可不服从虎克定律。

### 2.1 广义余能原理

今设有一弹性体,它的弹性可以是任意的,即应力与应变之间的关系可不服从虎克定律。设  $U$  是弹性体中单位体积的应变能。 $U$  可以用应力分量来表示,亦可以用应变分量来表示。今后我们规定  $U$  用应变分量  $e_x, e_y, e_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}$  表示,即  $U = U(e_x, e_y, e_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy})$ ,

$\gamma_{xy}$ )。

命

$$\begin{aligned} L_U = & \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X \right) u + \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y \right) v + \\ & \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z \right) w + e_x \sigma_x + e_y \sigma_y + e_z \sigma_z + \\ & \gamma_{yz} \tau_{yz} + \gamma_{xz} \tau_{xz} + \gamma_{xy} \tau_{xy} - U(e_x, \dots, \gamma_{xy}) \end{aligned} \quad (1)$$

我们称  $L_U$  为以应变能表示的广义余能, 简称广义余能, 因为当应力适合平衡方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

时,  $L_U$  的算式简化为

$$L_U = e_x \sigma_x + \dots + \gamma_{xy} \tau_{xy} - U \quad (3)$$

这便是钱令希教授在著作[1]中所下的余能的定义。

设弹性体所占的空间是  $V$ , 它的表面是  $S$ 。设在表面的一部分  $S_\sigma$  上, 指定表面力, 即已知

在  $S_\sigma$  上:

$$\left. \begin{aligned} p_x &\equiv \sigma_x \cos(nx) + \tau_{xy} \cos(ny) + \tau_{xz} \cos(nz) = \bar{p}_x \\ p_y &\equiv \tau_{xy} \cos(nx) + \sigma_y \cos(ny) + \tau_{yz} \cos(nz) = \bar{p}_y \\ p_z &\equiv \tau_{xz} \cos(nx) + \tau_{yz} \cos(ny) + \sigma_z \cos(nz) = \bar{p}_z \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

而在另一部分  $S_u$  上, 指定位移, 即已知

$$\text{在 } S_u \text{ 上: } u = \bar{u}, \quad v = \bar{v}, \quad w = \bar{w} \quad (5)$$

$S_\sigma$  和  $S_u$  的总和便是整个表面  $S$ 。

广义余能原理 把  $u, v, w, e_x, e_y, e_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}$  等 15 个函数看作是彼此独立无关的函数, 并且让它们的变分不受任何限制, 那么下面的变分式:

$$\begin{aligned} \delta \left\{ \iiint_V L_U dV - \iint_{S_u} (\bar{u} p_x + \bar{v} p_y + \bar{w} p_z) dS - \right. \\ \left. \iint_{S_\sigma} [u(p_x - \bar{p}_x) + v(p_y - \bar{p}_y) + w(p_z - \bar{p}_z)] dS \right\} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

相当于弹性力学中全部基本方程, 即平衡方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

应力和应变的关系式：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial U}{\partial e_x}, & \sigma_y &= \frac{\partial U}{\partial e_y}, & \sigma_z &= \frac{\partial U}{\partial e_z} \\ \tau_{yz} &= \frac{\partial U}{\partial \gamma_{yz}}, & \tau_{xz} &= \frac{\partial U}{\partial \gamma_{xz}}, & \tau_{xy} &= \frac{\partial U}{\partial \gamma_{xy}} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

应变与位移的关系式：

$$\left. \begin{aligned} e_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & e_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & e_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

以及边界条件：

$$\text{在 } S_u \text{ 上: } u = \bar{u}, \quad v = \bar{v}, \quad w = \bar{w} \quad (10a)$$

$$\text{在 } S_\sigma \text{ 上: } p_x = \bar{p}_x, \quad p_y = \bar{p}_y, \quad p_z = \bar{p}_z \quad (10b)$$

证：将(1)式规定的  $L_U$  代入(6)式，然后将算子  $\delta$  作用于积分号内的各函数；稍加整理后得

$$\begin{aligned} &\iiint_V \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X \right) \delta u \, dV + \iiint_V \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y \right) \delta v \, dV + \\ &\iiint_V \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z \right) \delta w \, dV + \iiint_V \left( \sigma_x - \frac{\partial U}{\partial e_x} \right) \delta e_x \, dV + \\ &\iiint_V \left( \sigma_y - \frac{\partial U}{\partial e_y} \right) \delta e_y \, dV + \iiint_V \left( \sigma_z - \frac{\partial U}{\partial e_z} \right) \delta e_z \, dV + \\ &\iiint_V \left( \tau_{yz} - \frac{\partial U}{\partial \gamma_{yz}} \right) \delta \gamma_{yz} \, dV + \iiint_V \left( \tau_{xz} - \frac{\partial U}{\partial \gamma_{xz}} \right) \delta \gamma_{xz} \, dV + \\ &\iiint_V \left( \tau_{xy} - \frac{\partial U}{\partial \gamma_{xy}} \right) \delta \gamma_{xy} \, dV + \iiint_V \left( \frac{\partial \delta \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \delta \tau_{xz}}{\partial z} \right) u \, dV + \\ &\iiint_V \left( \frac{\partial \delta \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \delta \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \delta \tau_{xz}}{\partial z} \right) v \, dV + \iiint_V \left( \frac{\partial \delta \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \delta \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \delta \sigma_z}{\partial z} \right) w \, dV + \\ &\iiint_V (e_x \delta \sigma_x + e_y \delta \sigma_y + e_z \delta \sigma_z + \gamma_{yz} \delta \tau_{yz} + \gamma_{xz} \delta \tau_{xz} + \gamma_{xy} \delta \tau_{xy}) \, dV - \\ &\iint_{S_u} (\bar{u} \delta p_x + \bar{v} \delta p_y + \bar{w} \delta p_z) \, dS - \iint_{S_\sigma} (u \delta p_x + v \delta p_y + w \delta p_z) \, dS - \\ &\iint_{S_\sigma} [(p_x - \bar{p}_x) \delta u + (p_y - \bar{p}_y) \delta v + (p_z - \bar{p}_z) \delta w] \, dS = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

因为  $u, v, w$  的变分不受任何限制，所以从(11)式的前3个积分便得平衡方程(7)，从(11)式的最后1个积分得边界条件(10b)。又因为  $e_x, \dots, \gamma_{xy}$  等6个应变分量的变分不受任何限制，所以从(11)式第4个到第9个积分得应力与应变的关系式(8)。这样(11)式剩下的便为关于应力分量的变分：