有限元理论与方法

（第一分册）

黄艾香　周天孝　主编

科学出版社
www.sciencep.com

有限元理论与方法

(第一分册)

黄艾香　周天孝　主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书由 32 位国内外专家经过几年的努力编著而成. 内容包括有限元方法数学基础及程序实现、时间相关有限元、有限元外推、超收敛、多重网格法、区域分裂法、非标准有限元, 以及有限元法在弹性力学、塑性力学、岩土力学、流体力学、渗流力学和电磁场等领域的应用. 这些内容不但反映了有限元方法所需的数学基础、国际上在这些领域的最新成果, 而且着重反映了国内专家在上述各方面所做的部分工作.

本书可以作为高等院校数学、力学及相关专业研究生和教师的教学用书, 也可作为从事有关科学计算及工程应用的科研人员和工程技术人员的工具书.

图书在版编目(CIP)数据

有限元理论与方法/黄艾香等主编. —北京: 科学出版社, 2009
ISBN 978-7-03-022805-5

I. 有… II. 黄… III. 有限元法 IV. O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 124267 号

责任编辑: 林 鹏 刘嘉善 赵彦超/责任校对: 宋玲玲
责任印制: 钱玉芬/封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社编务公司排版制作
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2009 年 5 月第 一 版　开本: B5 (720 × 1000)
2009 年 5 月第一次印刷　印张: 67
印数: 1—1 500　字数: 1322 000

定价: 168.00 元 (共三册)

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈环伟〉)

前　言

由于偏微分方程在理论和实践上的重要性，其数值解法长期以来吸引着数学家、物理学家和工程师们的关注. 一种数值方法包括它的数学基础及其在计算机上的实现，都紧紧地依赖于理论数学的发展和计算手段的改善. 计算机科学的发展，现代大型高速电子计算机的出现，对数值方法冲击之大，是历史上从来未有过的. 作为求解偏微分方程的一个强有力手段 —— 有限元方法，正是电子计算机时代的产物.

有限元方法摒弃了刻画自然规律中局部的、瞬时的数学描述，而以大范围的、全过程的数学分析作为自己的出发点. 局部和整体、瞬时和全过程，只是以两种不同的角度来描述自然现象. 一个过程，既可以被微分方程所描述，又服从相应的变分原理，方法虽然不同，却从不同的侧面来反映同一自然规律.

数值分析的任务就是从无限维空间转化到有限维空间，把连续型结构转变为离散型结构. 有限元方法是利用函数分片多项式逼近模式来实现离散化过程的，也就是说，有限元方法所依赖的有限维子空间，其基函数系是具有有限支集的分片多项式函数系，这样的函数系与大范围分析相结合，反映了场内任何两个局部地点场变量的相互依赖关系. 任何一个局部地点，它的影响元素集，正是基函数本身和它的支集. 因此，离散化所得到的代数方程的系数矩阵是稀疏的. 若区域分割细小化，则支集不相交的基函数对愈多，矩阵也就愈稀疏. 这给数值解法带来了极大的好处，标准正规有限元的数学描述和程序化过程是完美的，其数学基础是完善的和稳固的，应用对象无论是科学的还是技术和工业的，都是无与伦比的. 这就是它取得如此成功的关键所在.

应该说除了微积分之外没有一种数学方法会像有限元方法一样在科学、技术、工业工程以及社会科学中有如此广泛的应用，且获得如此巨大的成功. 不断涌现的商用有限元软件包如 NASTRAN, ASKA, ADINA, COMSOL, FIDAP, NUMECA 等涉及到科学、技术的广泛领域，每年有几万个用户、花费几亿美元来不断研发新的有限元软件.

有限元方法发展的历史，可以追溯到 1943 年 Courant 提出在一个三角形内的线性逼近思想，而从变分原理来离散化数学物理问题. Courant 以及前苏联数学家 Mihelin 等早在 20 世纪四五十年代就已建立了数学基础和求解思想. 20 世纪 50 年代西方工程师们提出的结构矩阵分析方法被发展成为后来的有限元，尤其是 20 世纪 60 年代后，愈来愈多的数学家涉足这个领域，使得有限元的发展纳入数学的轨道，从逐渐完善数学的描述，到建立牢固的数学基础，以及提出各种新型非标准有限元等.

在有限元发展历史中，不得不提及中国数学家在有限元方面做过的突出贡献. 国际上公认中国数学家冯康独立提出了有限元方法并且证明了收敛性问

题，这个工作比西方 Zlamal(1968) 的文章早 4 年．20 世纪 70 年代美国应用数学代表团访问中国，回国后所写报告中对有限元方法在中国得到如此广泛的应用和如此之多的数学家、工程师从事有限元应用感到惊讶．其次我们应该提到的是石钟慈院士在非协调有限元方面的贡献，他的相关文章全部被 Ciarlet 和 Lious 主编的《数值分析手册》的第二卷中引用，是中国学者被这部论著引用文章最多的一位数学家．林群及其合作者在有限元外推、有限元高精度算法以及超收敛方面的创造性工作，以及应隆安教授提出的无限元方法，都得到了国际上的高度评价．

本书邀请了 32 位专家，从有限元数学基础和数学描述开始，介绍了标准有限元的数学理论、有限元方程组求解、特征值问题、非标准有限元、时间相关有限元、有限元超收敛、自适应有限元以及有限元在弹性力学、障碍问题、流体力学、环境科学、渗流力学、电磁学等各个领域的应用．本书既可作为高等院校数学、力学及相关专业研究生和教师的教学用书，也可作为从事有关科学计算及工程应用的科研人员和工程技术人员的工具书．

在本书的编写过程中得到了国家自然科学基金委员会及一些专家，如石钟慈院士、崔俊芝、韩厚德教授等的支持与帮助，对此我们表示衷心的感谢．

李开泰

2009 年 3 月

目　录

第一篇　有限元法基础

第二篇　非标准有限元法

第一篇
有限元法基础

第 1 章　有限元法构造

有限元法是一种数值方法，在用来求解一般场的问题时，大致要经过如下几个步骤：

(1) 寻找与原问题相适应的变分形式；

(2) 建立有限元子空间，即选择元素类型和相应的形状函数；

(3) 单元刚度矩阵、单元列阵的计算和总刚度矩阵、总列阵的合成；

(4) 边界条件的处理和有限元方程组求解；

(5) 回到实际问题中去.

1.1　Galerkin 变分原理和 Ritz 变分原理

以二维线性问题为例. 考察问题

$$\begin{cases} -\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(p(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(p(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\right]=f(x,y), \\ u|_{\Gamma_1}=0, \\ \left[p(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial n}+\sigma(x,y)u\right]_{\Gamma_2}=g(x,y), \end{cases} \tag{1.1.1}$$

其中 Ω 是 R^2 中的连通区域，它的边界 $\partial\Omega=\Gamma_1\bigcup\Gamma_2$ 分段光滑. n 是 $\partial\Omega$ 的外法线方向，$p(x,y)$ 一阶连续可导且 $p(x,y)\geqslant p_0>0,\sigma(x,y)$ 连续且 $\sigma(x,y)\geqslant 0$.

用 $C(\Omega)$ 记 Ω 上一切 r 阶连续可导函数的全体.

如果函数 $u(x,y)\in C^2(\Omega)$, 且在 Ω 内及 $\partial\Omega$ 上满足 (1.1.1), 那么称 $u(x,y)$ 为定解问题 (1.1.1) 的古典解.

以下讨论 (1.1.1) 的弱解. 在范数

$$\|u\|_{1,\Omega}^2=\iint_\Omega\left(u_x^2+u_y^2+u^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.1.2}$$

下完备化 $C^1(\Omega)$ 所得到的函数空间记为 $H^1(\Omega)$, 若引进内积

$$(u,v)_1=\iint_\Omega(u_xv_x+u_yv_y+uv)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{1.1.3}$$

则 $H^1(\Omega)$ 是 Hilbert 空间，这类 Hilbert 空间称为一阶 Sobolev 空间. 将 Ω 上一切无限可微且支集在 Ω 内函数的全体记为 $D(\Omega)$, $D(\Omega)$ 在范数 (1.1.2) 下完备化得到的空间记为 $H_0^1(\Omega)$.

设 $C^1_{\#}(\Omega)=\{v: v$ 在 Ω 内分片一阶连续可导，$v|_{\Gamma_1}=0\}$, $C^1_{\#}(\Omega)$ 在范数 (1.1.2) 下完备化所得到的空间等价于

$$V=\{v: v\in H^1(\Omega), v|_{\Gamma_1}=0\},$$

在 V 上赋于内积 (1.1.3), 则 V 也是一个 Hilbert 空间，且

$$H^1_0(\Omega)\subset V\subset H^1(\Omega).$$

作双线性泛函

$$B(u,v)=\iint_\Omega (pu_xv_x+pu_yv_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\Gamma_2}\sigma uv\mathrm{d}s, \forall u, \qquad v\in H^1(\Omega).$$

可以证明这样定义的 $B(u,v)$ 具有下列性质:

(1) 对称性. 即

$$B(u,v)=B(v,u). \tag{1.1.4}$$

(2) 在 $V\times V$ 上连续. 即存在一个常数 $M>0$, 使得

$$|B(u,v)|\leqslant M\|u\|_{1,\Omega}\|v\|_{1,\Omega}, \quad \forall_{u,v}\in V. \tag{1.1.5}$$

(3) 在 V 上是强制的. 即存在常数 $\gamma>0$, 使得

$$B(u,u)\geqslant \gamma\|u\|^2_{1,\Omega}, \quad \forall u\in V. \tag{1.1.6}$$

显然,

$$f(v)=\iint_\Omega fv\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\Gamma_2}gv\mathrm{d}s$$

是 v 的线性连续泛函.

(1.1.1) 相应的 Galerkin 变分问题是：求 $u\in V$, 使得

$$B(u,v)=f(v), \quad \forall v\in V. \tag{1.1.7}$$

满足 (1.1.7) 的解 u 称为 (1.1.1) 的弱解，将弱解所在的空间称为容许空间，也称试探空间. 同时，由于 (1.1.7) 必须对 V 中任一元素 v 都要成立，故称 V 为检验空间. 如果变分问题的容许空间和检验空间取同一个 Hilbert 空间 V, 这时又称 V 为能量空间.

边界 Γ_2 上的条件称为自然边界条件. 边界 Γ_1 上的条件称为本质边界条件,或称为强加边界条件.

(1.1.1) 的古典解与弱解的关系, 由下列命题给出.

命题 1.1.1　设 $u \in C^2(\Omega)$. 若 u 是 (1.1.1) 的古典解, 则 u 是 (1.1.1) 的弱解. 反之, 若 u 是 (1.1.1) 的弱解, 则 u 也是 (1.1.1) 的古典解.

证明　设 $u \in C^2(\Omega)$ 是 (1.1.1) 的古典解, 则对 $\forall v \in V$, 用 v 乘 (1.1.1) 方程两边并取积分, 于是有

$$-\iint_\Omega v\mathrm{div}(p\nabla u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Omega fv\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

也可写成

$$-\iint_\Omega (\mathrm{div}(pv\nabla u) - p\nabla v\nabla u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Omega fv\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

利用 Gauss 定理, 得

$$\iint_\Omega p\nabla u\nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \oint_{\partial\Omega} pv\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s = \iint_\Omega fv\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

注意到 $v \in V$, 以及 u 满足 (1.1.1) 的边界条件, 故得

$$B(u,v) = f(v), \quad \forall v \in V.$$

即 u 也满足 (1.1.7).

反之, 设 $u \in C^2(\Omega)$ 且是 (1.1.7) 的解, 那么, 由 $v|_{\Gamma_1} = 0$ 得

$$\begin{aligned}\iint_\Omega p\nabla u\nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_\Omega [\mathrm{div}(pv\nabla u) - v\mathrm{div}(p\nabla u)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \oint_{\partial\Omega} pv\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s - \iint_\Omega v\mathrm{div}(p\nabla u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{\Gamma_2} pv\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s - \iint_\Omega v\mathrm{div}(p\nabla u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

代入 (1.1.7) 得

$$\int_{\Gamma_2}\sigma uv\mathrm{d}s + \int_{\Gamma_2} pv\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s - \iint_\Omega v\mathrm{div}(p\nabla u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Omega fv\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\Gamma_2} gv\mathrm{d}s,$$

故有

$$\iint_\Omega v[\mathrm{div}(p\nabla u) + f]\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\Gamma_2} v\left(g - p\frac{\partial u}{\partial n} - \sigma u\right)\mathrm{d}s = 0.$$

由 v 在 V 中的任意性，可得 u 为 (1.1.1) 的古典解．证毕．

Galerkin 变分问题 (1.1.7) 解的存在性由 Lax-Milgram 定理保证．

定理 1.1.2(Lax-Milgram 定理)[1] 设 V 是一个 Hilbert 空间，$B(u,v)$ 是 $V\times V$ 上的双线性泛函，且满足

对称性： $B(u,v)=B(v,u),\forall u,v\in V;$ (1.1.8)

连续性： $|B(u,v)|\leqslant M\|u\|\|v\|,\ \forall u,v\in V;$ (1.1.9)

强制性： $B(u,u)\geqslant\gamma\|u\|^2,\forall u\in V,$ (1.1.10)

这里 M 和 γ 都是不依赖于 u,v 的正常数，$\|\cdot\|$ 为 V 中的范数，而 f 是 V 上的线性连续泛函．那么变分问题：求 $u\in V$, 使得

$$B(u,v)=f(v),\quad \forall v\in V \tag{1.1.11}$$

存在唯一的解 u^*, 并且有以下估计式

$$\|u^*\|\leqslant\frac{1}{\gamma}\|f\|_*,$$

其中 $\|\cdot\|_*$ 是 V 的对偶范数，即

$$\|f\|_*=\sup_{v\in V}\frac{<f,v>}{\|v\|}.$$

作二次泛函

$$J(v)=\frac{1}{2}B(v,v)-f(v), \tag{1.1.12}$$

$J(v)$ 的极小值问题是：求 $u\in V$, 使得

$$J(u)=\min_{v\in V}J(v). \tag{1.1.13}$$

称 (1.1.13) 为 (1.1.1) 的 Ritz 变分形式．

定理 1.1.3 设 V 是 Hilbert 空间，$B(u,v)$ 是 $V\times V$ 上满足条件 (1.1.8)~(1.1.10) 的双线性泛函，f 是 V 上线性连续泛函，$J(v)$ 是 (1.1.12) 所定义的二次泛函．那么 (1.1.13) 和 (1.1.11) 两个问题中，

(1) 任一个问题有解，则解不多于一个；

(2) 任一个问题的解，必是另一个问题的解；

(3) 如果 u^* 是它们的解，那么

$$J(v)-J(u^*)=\frac{1}{2}B(v-u^*,v-u^*),\qquad \forall v\in V.$$