

龙门品牌  学子至爱

新课标

龙门
考题

难点
解读

高中数学

主 编 傅荣强

本册主编 傅荣强 史献芳



龍 門 書 局

www.Longmenbooks.com

新课标

难点解读



高中数学

主 编:傅荣强

本册主编:傅荣强

编 者:郭爱华

王丽君

马 兰

王洪光

洪明海

赵志杰

林 双

史献芳

陈永贵

张桂荣

张淑琴

曲明研

于生云

邴洪珍

梁 平

王淑兰

冯莫愁

潘洪霞

杨桂云

王丽秀

李艳红

龍 門 書 局

北 京

版权所有 侵权必究

举报电话:(010)64030229;(010)64034315;13501151303

邮购电话:(010)64034160

图书在版编目(CIP)数据

龙门专题:新课标·高中数学·难点解读/傅荣强主编;傅荣强,史献芳本册主编. —修订版. —北京:龙门书局,2008

ISBN 978-7-5088-1278-6

I. 龙… II. ①傅…②傅…③史… III. 数学课—高中—教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 122577 号

责任编辑:田旭 马建丽 王美容/封面设计:耕者

龙门书局出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

www.longmenbooks.com

世界知识印刷厂印刷

科学出版社总发行 各地书店经销

*

2007年10月第一版 开本:A5(890×1240)

2008年7月第四次印刷 印张:7

字数:249 000

定价:13.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

1.《龙门专题》适合什么样的同学使用?

《龙门专题》是针对中等程度及中等程度以上的学生研究开发的,尤其是对尖子生来讲,《龙门专题》是必备图书!

2.中等程度的学生使用本书应注意什么?

这套书在设计上全面贯彻循序渐进的学习方法,中等程度的学生要特别注意:

“知识点精析与应用”部分侧重夯实学生的基础,重点在把基础知识讲细、讲透,适合为中等程度的学生奠定扎实的基础;

“能力拓展”部分重点在于拓展学生思维,直接与中高考的难度、题型接轨,适合中等学生提高成绩。

3.《龙门专题》适合什么时间使用?(3~5理科)

同步学习使用:

《龙门专题》每一节内容都是按照教材的顺序编排的,因此可以随着教学进度同步使用,老师讲到哪里,就紧跟着做透哪一本专题。

中高考复习:

“基础篇”适用于第一轮全面复习,全面梳理知识点,从这一角度,专题比任何高考复习资料都要详细、全面;

“综合应用篇”适用于第二轮专项复习,尤其是跟其他专题、其他学科进行交叉综合时,事半功倍。

4.如何使用《龙门专题》打下扎实的基础知识?

“万变不离其宗!”考试题目都是由基础知识演化而来的,因此基础知识是极其重要的,只有准确地理解、牢固地掌握基础知识,才能灵活、轻松地应用和解题!

使用《龙门专题》打基础,重点注意每节的“知识点精析与应用”,它分为三个小部分:

知识点精析:可帮助学生更全面的理解重点,突破难点;

解题方法指导:通过经典和新颖的例题帮助学生掌握解题规律和技巧;

基础达标演练:可以即学即练,便于巩固。

5.如何使用《龙门专题》拓展视野,提高素质?

“能力拓展”栏目是在牢固掌握基础的前提下,提高学生的综合素质和应试能力的,它同样包括三个小部分:

释疑解难:以综合性,关联所学知识,并作深度的拓展和延伸;

典型例题导析:最具代表性的例题、全面的思路分析、有的放矢的总结和反思,培养学生的解题技巧和方法;

思维拓展训练:完美的拓展训练设计,提升学生的学科思维能力。

6.怎么样在中高考复习中使用《龙门专题》?

“知识点精析与应用”用于梳理知识脉络,掌握基本知识点;复习时侧重使用“能力拓展”栏目,这部分立足于教材,对中高考必考内容进行拓展提升,也包括了一些难点和失分率较高的内容。

此外,“本书知识结构”、“本讲知识网络图”能帮助学生迅速快捷地掌握全部知识体系,提高复习效率。在中高考的复习备考中,还要注意:近年本专题知识在高考(中考)中所占分数比例,紧跟第二轮专项复习节奏使用。

7.尖子生如何使用《龙门专题》?

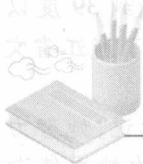
从全国调查看,尖子生最喜爱的教辅图书中,《龙门专题》被提及率十分高;来自高考状元的信息也表明,尖子生是特别适合使用本书的。尖子生在使用本书时,要注意以下几点:

首先,立足基础,通过自学或者预习的方式将基础知识理解并掌握;

其次,学习的重点放在“能力拓展”上,提高综合能力和应对中高考的能力;

再次,在复习中,一个板块一个板块的逐一解决,力争做到没有任何知识点的遗漏;

最后,中高考的复习,侧重于专题与专题之间、不同学科之间的复合型试题的研究和训练,确保在考试中基础题目不失分。



未名湖畔，博雅塔旁。明媚的晨光穿透枝叶，懒散的泻落在林间小道上，花儿睁开惺忪的眼睛，欣喜地迎接薄薄的雾霭，最兴奋是小鸟，扇动翅膀在蔚蓝的天空中叽叽喳喳地欢唱起来了。微风轻轻拂动，垂柳摇曳，舒展优美的身姿，湖面荡起阵阵涟漪，博雅塔随着柔波轻快地翩翩起舞。林间传来琅琅的读书声，那是晨读的学子；湖畔小径上不断有人跑过，那是晨练的学子；椅子上，台阶上，三三两两静静的坐着，那是求索知识的学子……

在北大，每个早晨都是这样的；在清华，每个早晨都是这样的；在复旦，在交大，在南大，在武大……其实，在每一所高校里，早晨都是一幅青春洋溢、积极进取的景象！

在过去几年时间里，我一直在组织北大、清华的高考状元、奥赛金牌得主还有其他优秀的学子到全国各地巡回演讲。揭开他们“状元”的光环，他们跟我们是那么的相似，同样的普通与平凡。

是什么成就了他们的“状元”辉煌？

在来来往往带他们出差的路上，在闲来无事的聚会聊天过程中，我越来越发现，在普通平凡的背后，他们每个人都是一道亮丽独特的风景，都是一段奋斗不息、积极进取的历程，他们的成功，是偶然中的必然。

小朱，一个很认真、很可爱的女孩子，高中之前家庭条件十分优越，但学习一直平平；在她上高中前，家庭突遭变故，负债累累，用她妈妈的话说，“家里什么都没有了，一切只能靠你自己了。”她说自己只有高考一条路，只有考好了，才能为家里排忧解难。我曾经在台下听她讲自己刻苦学习的经历：“你们有谁在大年



三十的晚上还学习到深夜三点？你们又有谁发烧烧到 39 度以上还在病床上看书？……”那一年，她以总分 684 分成为了浙江省文科高考状元。

陆文，一个出自父母离异的单亲家庭的女孩，她说，她努力学习的动力就是想让妈妈高兴，因为从小她就发现，每次她成绩考得很好，妈妈就会很高兴。为了给妈妈买一套宽敞明亮的房子，她选择了出国这条路，考托福，考 GRE，最后如愿以偿，被芝加哥大学以每年 6.4 万美金的全额奖学金录取为生物方向的研究生。6.4 万美金，当时相当于人民币 52 万。

齐伟，湖南省高考第七名，清华大学计算机学院的研究生，最近被全球最大的软件公司 MICROSOFT 聘为项目经理；霖秋，北京大学数学学院的小妹，在坚持不懈的努力中完成了自身最重要的一次涅槃，昨天的她在未名湖上游弋，今天的她已在千里之外的西雅图……

还有很多很多优秀的学子，他们也都有自己的故事，酸甜苦辣，很真实，很精彩。我有幸跟他们朝夕相处，默默观察，用心感受，他们的自信，他们的执着，他们的勤奋刻苦，尤其是他们的“学而得其法”所透露出来的睿智更让人拍案叫绝，他们人人都有一套行之有效的学习方法，花同样的时间和精力他们可以更加快速高效，举一反三。我一直在想：如果当年我也知道他们的这些方法，或许我也能考个清华北大的吧？

多年以来，我一直觉得我们的高考把简单的事情搞复杂了，学生们浪费了大量的时间和精力却收效甚微；多年以来，我们也一直在研究如何



如何将一套优良的学习方法内化在图书中，让同学们在不知不觉中轻松快速的获取高分。这，就是出版《龙门专题》的原因了。

一本好书可以改变一个人的命运！名校，是每一个学子悠远的梦想和真实的渴望。“少年心事当拿云，谁念幽寒坐鸣呃！”

龙门专题，走向名校的阶梯！

总策划 王坤

2008 年 7 月

《龙门专题》状元榜

科学出版社

文化类

赵永胜 2007年山西省文科状元

中国人民大学财政金融学院

星座：射手座

喜欢的运动：爬山 乒乓球

喜欢的书：伟人传记，如《毛泽东传》

人生格言：生命不息，奋斗不止

学习方法、技巧：兴趣第一，带着乐趣反复翻阅教科书，从最基本的知识入手，打字“地基”，从基础知识中演绎难题，争取举一反三，融会贯通。合理安排时间，持之以恒，坚信“天道酬勤，勤能补拙”。



卢毅 2006年浙江省理科状元

北京大学元培学院

星座：天秤座

喜欢的运动：跑步 滑板

喜欢的书：《卡尔维诺文集》

人生格言：做自己

学习方法、技巧：注重知识的系统性，将每门学科的知识点作一个系统地梳理，无论是预习还是复习，这样便可在课上学习时有的放矢，课后复习时查漏补缺。坚持锻炼，劳逸结合。



武睿颖 2005年河北省文科状元

北京大学元培学院

星座：天秤座

喜欢的运动：游泳 网球

喜欢的书：A Thousand Splendid Suns

人生格言：赢得时间，赢得生命

学习方法、技巧：勤奋是中学学习的不二法门；同时要掌握良好的学习方法，如制定学习目标、计划，定期总结公式、解题思路等，这样能事半功倍。最后要培养良好的心态，平和积极地面对学习中的得失。



刘诗泽 2005年黑龙江省理科状元

北京大学元培学院

星座：金牛座

喜欢的运动：篮球 台球 排球

喜欢的书：《三国演义》

人生格言：战斗到最后一滴血

学习方法、技巧：多读书，多做题，多总结。看淡眼前成绩，注重长期积累。坚持锻炼，劳逸结合。



邱讯 2005年四川省文科状元

北京大学

星座：处女座

喜欢的运动：篮球 乒乓球

喜欢的书：《哈利·波特》

人生格言：非淡泊无以明志，非宁静无以致远

学习方法、技巧：1. 要保持一颗平常心来面对考试、繁重的学习任务和激烈的竞争。2. 学会从各种测验考试中总结经验、教训，而不要仅仅局限于分数。3. 学会计划每一天的学习任务，安排每一天的学习时间。4. 坚持锻炼，劳逸结合。



林叶 2005年江苏省文科状元

北京大学

星座：水瓶座

喜欢的运动：跑步 台球 放风筝

喜欢的书：《黑眼睛》《笑面人》

人生格言：不经省察的生活不值得过

学习方法、技巧：学习分两类，一类和理想真正有关，另一类只是不得不过的门槛。不要总因为喜好就偏废其中的一个，它不仅是必须的，而且你也许会发现，它本来也值得你热爱和认真对待。“你自己的学习方法别人永远无法替代，它也是你生活的一部分，完善它，就像完善你自己。”



田禾 2005年北京市理科状元

北京大学元培学院

星座：水瓶座

喜欢的运动：羽毛球

喜欢的书：历史类书籍

人生格言：认真、坚持

学习方法、技巧：认真听讲，勤于思考，作阶段性总结，及时调整学习计划，坚持阅读课外书和新闻，一以贯之，学不偏废。



朱师达 2005年湖北省理科状元

北京大学元培学院

星座：水瓶座

喜欢的运动：足球 篮球 游泳

喜欢的书：《追风筝的人》《史记》

人生格言：有梦想就有可能，有希望就不要放弃

学习方法、技巧：1. 知识系统化、结构化是掌握知识的有用技巧和重要体现。2. 知其然还要知其所以然，记忆才更牢固。3. 整体把握兴趣和强弱科的平衡。4. 正确认识自己的弱点，集中力量克服它。



《 》

编委会

主

编：傅荣强

编委会成员：傅荣强 方立波 于长军

张晓红 李健全 佟志军

朱岩 张书祥 张硕

牛鑫哲 周萍 郭杰

王学春 高鹤 石铁明

石兴涛 史景辉 高波

元外村... 2008年... 傅荣强... 方立波... 于长军... 张晓红... 李健全... 佟志军... 朱岩... 张书祥... 张硕... 牛鑫哲... 周萍... 郭杰... 王学春... 高鹤... 石铁明... 石兴涛... 史景辉... 高波

元外村... 2008年... 傅荣强... 方立波... 于长军... 张晓红... 李健全... 佟志军... 朱岩... 张书祥... 张硕... 牛鑫哲... 周萍... 郭杰... 王学春... 高鹤... 石铁明... 石兴涛... 史景辉... 高波

元外村... 2008年... 傅荣强... 方立波... 于长军... 张晓红... 李健全... 佟志军... 朱岩... 张书祥... 张硕... 牛鑫哲... 周萍... 郭杰... 王学春... 高鹤... 石铁明... 石兴涛... 史景辉... 高波

元外村... 2008年... 傅荣强... 方立波... 于长军... 张晓红... 李健全... 佟志军... 朱岩... 张书祥... 张硕... 牛鑫哲... 周萍... 郭杰... 王学春... 高鹤... 石铁明... 石兴涛... 史景辉... 高波

元外村... 2008年... 傅荣强... 方立波... 于长军... 张晓红... 李健全... 佟志军... 朱岩... 张书祥... 张硕... 牛鑫哲... 周萍... 郭杰... 王学春... 高鹤... 石铁明... 石兴涛... 史景辉... 高波

元外村... 2008年... 傅荣强... 方立波... 于长军... 张晓红... 李健全... 佟志军... 朱岩... 张书祥... 张硕... 牛鑫哲... 周萍... 郭杰... 王学春... 高鹤... 石铁明... 石兴涛... 史景辉... 高波

元外村... 2008年... 傅荣强... 方立波... 于长军... 张晓红... 李健全... 佟志军... 朱岩... 张书祥... 张硕... 牛鑫哲... 周萍... 郭杰... 王学春... 高鹤... 石铁明... 石兴涛... 史景辉... 高波

元外村... 2008年... 傅荣强... 方立波... 于长军... 张晓红... 李健全... 佟志军... 朱岩... 张书祥... 张硕... 牛鑫哲... 周萍... 郭杰... 王学春... 高鹤... 石铁明... 石兴涛... 史景辉... 高波

Contents

目录

基础篇	(1)
第一讲 以结论解读难点	(2)
1.1 分类讨论的三条原则	(2)
1.2 含有参数的闭区间上的二次函数的值域与最大(小)值	(12)
1.3 周期函数的判定	(22)
1.4 用典范公式解析数列问题	(32)
1.5 曲线 $C_i: y = A_i \sin(\omega_i x + \varphi_i) + k_i (i=1, 2)$ 的相互关系	(46)
1.6 直线与圆锥曲线相切的条件	(64)
1.7 为什么乘以 A_n^m 或除以 A_n^m	(76)
1.8 必然事件 $A \cdot B + A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}$	(84)
1.9 三项式	(94)
高考热点题型评析与探索	(102)
本讲测试题	(110)
第二讲 以方法解读难点	(120)
2.1 在对应的观点下使用数学模型	(120)

2.2 几何体的嵌入问题	(131)
2.3 最大(小)值的再度比较	(143)
2.4 用向量解释空间中的角与距离	(157)
高考热点题型评析与探索	(175)
本讲测试题	(188)

综合应用篇

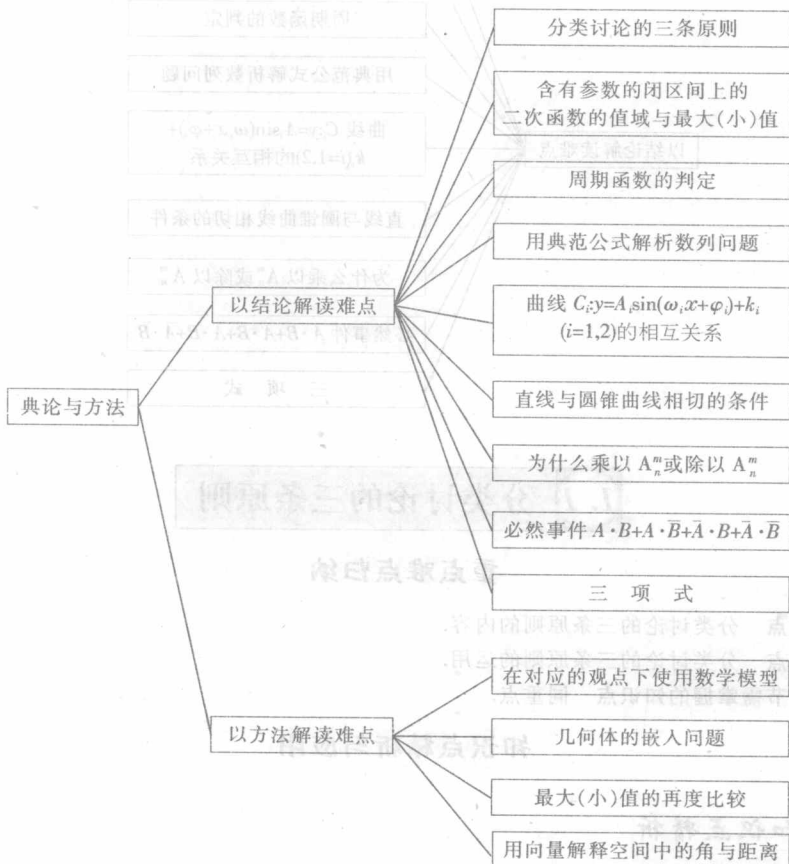
结论与方法的理论应用	(198)
结论与方法的实际应用	(208)
综合应用训练题	(213)

基础篇 第一集

数学是研究现实世界空间形式和数量关系的学科,简单地说是研究“数”和“形”的学科。

本书从典型结论和典范方法的角度切入,针对高中数学教学与学习以及现行高考中的难点问题,探究扩充解决问题的理论基础和思维方法,意在拓宽视野、提高能力。

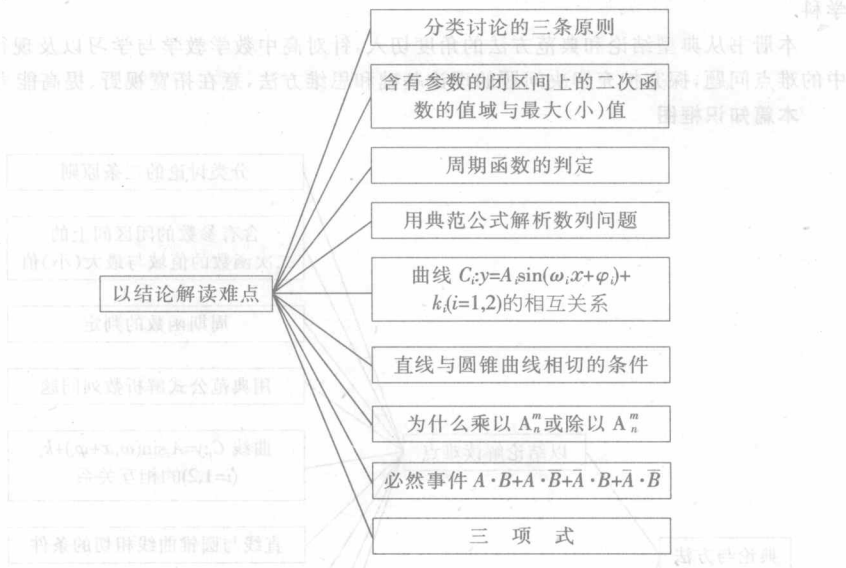
本篇知识框图





第一讲 以结论解读难点

本讲知识框图



1.1 分类讨论的三条原则

重点难点归纳

重点 分类讨论的三条原则的内容.

难点 分类讨论的三条原则的运用.

本节需掌握的知识 同重点.

知识点精析与应用

知识点精析

思考——问题提出

分类讨论,它是一种数学思想,可以说它是人们数学活动的指南针,离开了它,你的数学学习就会迷失方向.

分类讨论的数学思想,贯穿于高中数学的全过程,它的作用是确保数学问题的解不重复也不遗漏.



不重复不遗漏,不能当空话说,重要的是把它落到实处,让人们的数学活动有规律可循.这里我们就来解读这个问题.

探究——抽象概括

分类讨论的三条原则

设某一数学问题是在集合 A 上讨论的.

把集合 A 按照一个确定的标准分成

n 个集合,使它们满足三条原则,即:

$$(1) A_i \neq \emptyset, i=1, 2, \dots, n;$$

$$(2) A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j, \text{ 且 } i, j=1, 2, \dots, n;$$

$$(3) A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A.$$

继以上步骤之后,在集合

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

上分别讨论这个数学问题,等价于在集合 A 上讨论同一个问题.



解题方法指导

运用分类讨论的三条原则解答数学问题,其根本在确保解的不重不漏上.三条原则中,第(1)条,是为了每一个集合都不空;第(2)条,是为了解的不重复;第(3)条,是为了解的不遗漏.分类讨论的优势,体现在可以迅速地找出解决问题的切入点上,以解决开头难的问题,使我们的数学探究活动有一个良好的开局.

要注意,分类讨论某个数学问题,必须在同一个标准下进行,切忌用两个或两个以上的标准对数学对象实施分类.

例1 现有面值为1分、2分、5分的硬币各1枚,将这3枚硬币同时向桌面上抛掷,硬币落到桌面上时,每枚硬币都有正面向上或反面向上的可能.在这3枚硬币落稳于桌面上之后,写出它们出现正面、反面的一切可能的结果.

分析 以恰有 k 枚硬币出现正面向上为标准进行分类,其中 $k=0, 1, 2, 3$.

解 记“面值为 l 分的硬币落稳于桌面上以后,出现正面向上”为 A_l , 否则为 \bar{A}_l . 其中 $l=1, 2, 5$.

再记3枚硬币落稳于桌面上以后,恰有 k 枚硬币出现正面向上,其中 $k=0, 1, 2, 3$.

当 $k=0$ 时,其结果是 $\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_5$.

当 $k=1$ 时,其结果是 $A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_5, \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_5, \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_5$.

当 $k=2$ 时,其结果是 $\bar{A}_1 A_2 A_5, A_1 \bar{A}_2 A_5, A_1 A_2 \bar{A}_5$.

当 $k=3$ 时,其结果是 $A_1 A_2 A_5$.

以上8个结果就是一切可能的结果.

点评 (1)本例中, $k=0, 1, 2, 3$ 就是对3枚硬币一切可能的结果的分类,它满足“分类讨论的三条原则”. (2)分类讨论的标准的确定,与解题者的思维形式有关.例如,本例



中的分类讨论标准,也可以“反面向上”为标准.(3)本例中,字母 A_1 、 A_2 、 A_3 的上方,有时有横线“—”,有时没有横线“—”.分类还可以这样理解, A_1 、 A_2 、 A_3 的上方,3个都有“—”,恰有2个有“—”,恰有1个有“—”,都没有“—”.

【例2】 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是两个函数,写出不等式 $\sqrt{f(x)} > g(x)$ 的等价形式的不等式组.

分析 本例涉及两个对象 $f(x)$ 与 $g(x)$,要抓住其一分类.

解 因为 $g(x)$ 是函数,它的值是实数,所以, $g(x)$ 的取值情况有且只有两种可能,即

$$g(x) < 0, \text{ 或 } g(x) \geq 0.$$

由已知可知, $f(x)$ 也是函数,它的值也是实数.

当 $g(x) < 0$ 时,有 $\begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$

当 $g(x) \geq 0$ 时,有 $\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > 0, \\ f(x) > [g(x)]^2. \end{cases}$

综上,不等式 $\sqrt{f(x)} > g(x)$ 的等价形式的不等式组为

$$\begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > 0, \\ f(x) > [g(x)]^2. \end{cases}$$

点评 (1)本例是按 $g(x) < 0$ 或 $g(x) \geq 0$ 分类的,这样的分类符合“分类讨论的三条原则”的要求.(2)本例中,抓住 $f(x)$ 进行分类,也能分下去,但效果不佳.像这样的问题,不是一朝一夕就能解析清楚的,这就有待于经验的丰富,正所谓聪明在于积累.

【例3】 设 $a > -1$,解关于 x 的不等式 $(a+1)^{x^2-3x} \geq (a+1)^{x-3}$.

分析 有些分类讨论问题,可以借用先前积累的知识去解决,本例就如此,我们可以借用函数 $f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 的单调性去求解.

解 由 $a > -1$,可得

$$a+1 > 0.$$

当 $0 < a+1 < 1$ 时,即 $-1 < a < 0$ 时,由 $(a+1)^{x^2-3x} \geq (a+1)^{x-3}$ 可得

$$x^2 - 3x \leq x - 3,$$

解得

$$1 \leq x \leq 3,$$

此时,原不等式的解集为 $\{x | 1 \leq x \leq 3\}$.

当 $a+1=1$ 时,即 $a=0$ 时,原不等式变为

$$1 \geq 1, \text{ (绝对不等式)}$$

此时,原不等式的解集为 \mathbf{R} .

当 $a+1 > 1$ 时,即 $a > 0$ 时,由 $(a+1)^{x^2-3x} \geq (a+1)^{x-3}$ 可得

$$x^2 - 3x \geq x - 3,$$

$$x^2 - 4x + 3 \geq 0,$$

解得

$$x \leq 1, \text{ 或 } x \geq 3,$$

此时,原不等式的解集是 $\{x | x \leq 1, \text{ 或 } x \geq 3\}$.

点评 分类讨论要全面,不要受思维定势的影响.例如,讨论函数 $y = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的单调性时,大家都知道,对 a 的分类是 $0 < a < 1$ 与 $a > 1$. 而本例中,条件只设定了 $a > -1$,由此可得 $a + 1 > 0$,它绝对不能说明 $a + 1 \neq 1$,即 $a \neq 0$,所以,我们把 $a + 1 = 1$ 也当成了一类,否则就错了,错的原因就是违背了“分类讨论的三条原则”的“第(3)条”.



基础达标演练

一、选择题

1. 设 $x \in \mathbf{R}$, 并给出对 x 的四个分类:

① $x > 0$, 或 $x = 0$, 或 $x < 0$; ② $x \geq 0$, 或 $x < 0$; ③ $x \leq 0$, 或 $x > 0$; ④ $x > 0$, 或 $x < 0$.

在以上四类中,不正确的分类是

A. ① B. ② C. ③ D. ④

2. 设 $M = \{ax^2 + bx + c = 0 | x \in \mathbf{R}, a, b, c \text{ 是实常数, 且 } a \neq 0\}$, 并给出四个结论:

① M 是方程的集合, 方程一定有根, 其根可以不等也可以相等;

② M 是方程的集合, 方程可能有两个不等的实根, 也可能有两个相等的实根, 还可能没有实根;

③ $M = \{0\}$;

④ M 有可能是空集, 也有可能是单元素集, 还有可能是双元素集.

在以上四个结论中,正确的是

A. ① B. ② C. ③ D. ④

3. 给出函数 $f(x) = (a-1)^x$, 其中 $a \in \mathbf{R}$, 讨论 $f(x)$ 的单调性, 需要对 a 分类. 下面的分类正确的是

A. $a > 0$, 且 $a \neq 1$

B. $a - 1 > 0$, 且 $a - 1 \neq 1$, 即 $a > 1$, 且 $a \neq 2$

C. $0 < a - 1 < 1$, 或 $a - 1 = 1$, 或 $a - 1 > 1$, 即 $1 < a < 2$, 或 $a = 2$, 或 $a > 2$

D. $a - 1 < 0$, 或 $a - 1 > 0$, 即 $a < 1$, 或 $a > 1$

4. 某文艺小组共有 17 人, 其中, 只会唱歌的有 3 人, 只会跳舞的有 9 人, 其余的人既会唱歌又会跳舞. 从这 17 人中选出 5 人参加一项文艺演出, 要求只会唱歌的人至少有 1 人入选. 下面的分类中, 正确的是

A. 从只会跳舞的人或既会唱歌又会跳舞的 5 人中选 4 人

B. 从只会跳舞的人或既会唱歌又会跳舞的 14 人中, 选 4 人或 3 人或 2 人

C. 从既会唱歌又会跳舞的人中, 选 4 人或 3 人或 2 人

D. 从只会跳舞的人中选 3 人, 从既会唱歌又会跳舞的人中选 1 人

二、填空题

5. 把数列 $\{a_n\}$ 的下角标 n 的一切可能的取值分成两类、三类, 其中的一种表达形式是 _____, _____.

6. 设 $k \in \mathbf{R}$, 且 $k \neq 0$. 就 k 的不同的取值, 指出方程 $x^2 + \frac{y^2}{k} = 1$ 表示的曲线的类型,



其结果是_____.

7. 设 A, B 是两个非不可能事件, 并且它们是相互独立的. 在同一时刻, 就 A, B 的发生与不发生而言, 一切可能的结果是_____.

8. 设 \vec{AB} 是非零向量, $t \in \mathbf{R}$, $\vec{AP} = t\vec{AB}$, t 取何值时: ①点 P 与点 A 重合? ②点 P 在线段 AB 上? ③点 P 是线段 AB 的中点? ④点 P 在线段 AB 的延长线上? ⑤点 P 在线段 AB 的反向延长线上? 这五种情况下, t 的范围依次是_____.

三、解答题

9. 设 α 是直线 l 的倾斜角, 且 $2\sin 2\alpha + 2\sin \alpha - 2\cos \alpha - 1 = 0$, 求直线 l 的斜率.

10. 设 $x > 0$, 解不等式 $x^{3x+1} > x^{x+5}$.

答案与提示

一、选择题

- D 当 $x \in \mathbf{R}$ 时, 对 x 的分类“ $x > 0$, 或 $x < 0$ ”, 漏掉了“ $x = 0$ ”.
- B 集合 M 的代表元素 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 是一元二次方程. 当 $\Delta = b^2 - 4ac$ 大于 0、等于 0、小于 0 时, 方程分别有两个不等的实根、有两个相等的实根或没有实根.
- C 在 $f(x) = (a-1)^x$ 中, x 可以取一切实数.

当 x 取某些值时, 例如 $x = -\frac{1}{2}$, $f(x) = (a-1)^x$ 未必总有意义, 所以 $a-1 > 0$.

已知中没有指出函数 $f(x)$ 是指数函数, 所以, 对 a 应分类如下: $0 < a-1 < 1$, $a-1 = 1$, $a-1 > 1$, 即 $1 < a < 2$, $a = 2$, $a > 2$.

- B 17 人中, 只会唱歌的有 3 人, 只会跳舞的有 9 人, 既会唱歌又会跳舞的有 $17 - 3 - 9 = 5$ 人.

在只会唱歌的 3 人和只会跳舞或既会唱歌又会跳舞的 $5 + 9 = 14$ 人中选 5 人, 前者选 1 人, 后者选 4 人, 前者选 2 人, 后者选 3 人, 前者选 3 人, 后者选 2 人.

二、填空题

- $n = 2k - 1, n = 2k, k \in \mathbf{N}^*$; $n = 3k - 2, n = 3k - 1, n = 3k, k \in \mathbf{N}^*$

(1) 分两类: 按奇数、偶数分类, 正整数 n 可表示为 $n = 2k - 1$, 或 $n = 2k, k \in \mathbf{N}^*$.

(2) 分三类: 按被 3 除, 余数分别是 1、2 或整除分类, 正整数 n 可表示为

$n = 3k - 2, n = 3k - 1, n = 3k, k \in \mathbf{N}^*$.

- $k < 0$, 双曲线; $0 < k < 1$ 或 $k > 1$, 椭圆; $k = 1$, 圆 $k < 0$ 时, 方程 $x^2 + \frac{y^2}{k} = 1$, 表示焦点

在 x 轴上的双曲线. $0 < k < 1$ 或 $k > 1$ 时, 方程 $x^2 + \frac{y^2}{k} = 1$ 分别表示焦点在 x 轴上、 y 轴上的椭圆.

$k = 1$ 时, 方程 $x^2 + \frac{y^2}{k} = 1$ 就是 $x^2 + y^2 = 1$, 它表示圆心在原点、半径为 1 的圆.

- $\bar{A} \cdot \bar{B}, A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B, A \cdot B$

在同一时刻, A, B 都不发生, 记为 $\bar{A} \cdot \bar{B}$; A, B 恰有 1 个发生, 记为 $A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$; A, B 都发生, 记为 $A \cdot B$.

- $\{t | t = 0\}; \{t | 0 \leq t \leq 1\}; \left\{t \mid t = \frac{1}{2}\right\}; \{t | t > 1\}; \{t | t < 0\}$



由 $\vec{AP} = t\vec{AB}$, $t \in \mathbf{R}$, 可知:

① $t=0$ 时, $\vec{AP} = \mathbf{0}$, 点 P 与点 A 重合;

② $0 < t \leq 1$ 时, \vec{AP} 与 \vec{AB} 同向, 且 $|\vec{AP}| \leq |\vec{AB}|$, 点 P 在线段 AB 上;

③ $t = \frac{1}{2}$ 时, $\vec{AP} = \frac{1}{2}\vec{AB}$, 点 P 是线段 AB 的中点;

④ $t > 1$ 时, \vec{AP} 与 \vec{AB} 同向, 且 $|\vec{AP}| > |\vec{AB}|$, 点 P 在线段 AB 的延长线上;

⑤ $t < 0$ 时, \vec{AP} 与 \vec{AB} 反向, 点 P 在线段 AB 的反向延长线上.

三、解答题

9. 由 $2\sin 2\alpha + 2\sin \alpha - 2\cos \alpha - 1 = 0$, 得 $(\sin \alpha - \frac{1}{2})(\cos \alpha + \frac{1}{2}) = 0$, $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, 或 $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$. 因为 α 是直线 l 的倾斜角, 所以 $0 \leq \alpha < \pi$.

由 $\begin{cases} \sin \alpha = \frac{1}{2}, \\ 0 \leq \alpha < \pi, \end{cases}$ 得 $\alpha = \frac{\pi}{6}$, 或 $\alpha = \frac{5\pi}{6}$. 由 $\begin{cases} \cos \alpha = -\frac{1}{2}, \\ 0 \leq \alpha < \pi, \end{cases}$ 得 $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

以下分三类讨论.

(1) 当 $\alpha = \frac{\pi}{6}$ 时, 直线 l 的斜率 $k = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

(2) 当 $\alpha = \frac{5\pi}{6}$ 时, 直线 l 的斜率 $k = \tan \frac{5\pi}{6} = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(3) 当 $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ 时, 直线 l 的斜率 $k = \tan \frac{2\pi}{3} = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$.

10. 分三类, 即 $\begin{cases} 0 < x < 1, \\ 3x+1 < x+5, \end{cases} \begin{cases} x=1, \\ 1^{3 \times 1 + 1} > 1^{1+5}, \end{cases} \begin{cases} x > 1, \\ 3x+1 > x+5. \end{cases}$

分别解得或得知, 这三个不等式组的解的情况是 $0 < x < 1$, 无解, $x > 2$.

所以, 原不等式的解集是 $\{x | 0 < x < 1, \text{ 或 } x > 2\}$.

能力拓展



释疑解难

前面我们从理论上阐述了分类讨论的三条原则, 也以案例的形式对其做出了进一步的探究. 这些只能定位于帷幕刚刚拉开, 或者说万里长征只走完了第一步, 之所以这样讲, 是因为涉及分类讨论的数学问题, 范围广, 难度大, 尤其是需要第二次分类讨论的问题, 就更有让人望而却步之感. 这里我们以例来解读这类问题, 假若读者们能获点滴之收效, 那将是我们的又一个起点.