罗家仁　陆伟东／编著

概率论与数理统计

Probability And Statistics

成人高等教育
审计学系列教材

中国审计出版社

经济数学基础(三)

概率论与数理统计

罗家仁
陆伟东 编著

中国审计出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/罗家仁,陆伟东编著.－北京:中国审计出版社,2001.9

成人高等教育审计学系列教材

ISBN 7-800064-929-6

Ⅰ.概… Ⅱ.①罗…②陆… Ⅲ.①概率论—成人教育:高等教育—教材②数理统计—成人教育:高等教育—教材 Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 055058 号

概率论与数理统计

罗家仁 陆伟东 编著

出 版	中国审计出版社		
地 址	北京市东城区东四十条 24 号青蓝大厦 11 层		
邮政编码	100007		
电 话	(010)88361317	传 真	(010)88361310
发行经销	新华书店总店北京发行所发行 各地新华书店经销		
制 版	世纪风云图文制作中心		
印 刷	北京昌平百善印刷厂印刷		
开 本	850×1168 1/32	版 次	2001 年 9 月北京第 1 版
印 张	12.5	印 次	2001 年 9 月第 1 次印刷
字 数	310 千字	印 数	1～5000 册
定 价	25.00 元	总 价	172.00 元
书 号	ISBN 7－80064－929－6/G·32		

前　言

本书是在经济改革的不断深入和发展及高等财经人才对《概率统计》知识的需求日益增大的形势下，参照1989年国家教委颁发的《经济数学基础》教学大纲的要求，并结合国家审计署制定的以培养审计人才为主，兼育社会主义市场经济所需各类人才的多元办学方针，且根据当前财经院校的学生实际需要而编写的。它既可作为财经院校各专业的教材，也可作为管理干部学院自学考试、电大、函大、夜大的教材或参考书。

本书系高等学校财经专业核心课程教材之一。全书共七章，前三章讨论概率论，包括事件与概率、随机变量和分布、数字特征及极限定理；后四章讨论数理统计，包括抽样分布、统计估计、假设检验、回归分析等。各章均提供了相当数量的典型例题，且配有适量的习题，并附有答案。

本书以培养学生分析问题、解决问题的能力为宗旨，在概念的引入和内容的取舍，例题的选配等方面尽可能阐明其直观背景，建立或归纳其概率模型，并注重联系经济管理中的实际问题。全书力求脉络清晰，阐释透彻，在某些问题的论述和处理方法上略有新意。

原书于1994年10月由罗家仁编著成书，投入教学使用多年，难易适宜，反映良好。21世纪来临，高等教育步入了大众化时代，更多的青年进入高校学习，在造就更多的高素质人才的新形势下，对概率统计教学带来了新情况、新要求：以人为本，需注重大众化教育中精英人才的培养；面对生源的变化，确保转型后的教学质量；更注重概率模型与经济、管理问题的联系与应用，以体现21世

纪教材的特点。为此,罗家仁对全书作了增补和修订,且融入其多年考研辅导经验,适度增添与考研相关的内容与基本题型。陆伟东为本书修订编写了各章小结与自测题。全书由胡家延审稿。

限于编著者水平,书中难免有不妥之处,恳请读者批评指正。

编著者

2001 年 5 月

目　录

第一章　随机事件与概率

我们所学过的数学，如微积分、线性代数等都是用来研究客观世界中一类确定性现象的数量规律及其存在形式的。确定性现象是在一定条件下必然会出现的现象，我们称之为必然现象。然而客观世界中还存在着另一类现象：非确定性现象，对这类现象我们无法预言它们在一定条件下是否会一定出现。例如上抛一枚硬币，落下后其结果，可能出现正面，也可能出现反面；开发一种新产品投入市场，可能畅销，也可能滞销；等等。非确定性在个别次数试验的情况下，其结果难以肯定，但在大量重复试验中能体现出某种统计规律性，我们称这种非确定性现象为随机现象。

概率论与数理统计是揭示和研究随机现象的统计规律性的一门数学学科，是近代数学的重要组成部分。概率论是对随机现象的统计规律性进行进行演绎的研究，着重对客观随机现象的规律性给出数学模型，给出随机变量的分布，并对其性质与相互关系进行研究；数理统计是对随机现象的统计规律性进行归纳的研究，着重对所搜集的统计资料，选择数学模型，对所考察的问题，作出估计与判断或控制与预测。概率论与数理统计两者虽研究的侧重点不同，但作为一门学科有着密切的内在联系，概率论是数理统计的理论基础，而数理统计是概率论在统计学中的发展和最重要的实际应用。

§1—1　随机事件

一、随机事件

任一随机现象都与某一试验相联系，为了叙述方便，我们把对随机现象的观察或进行的实验，统称为一个试验，如果这个试验具有下列三条特征：

1. 可以在相同的条件下重复进行；

2. 每次试验的可能结果不止一个，并且能够事先明确试验的所有可能结果；

3. 每次试验的结果在事先是不可预言的。则称这样的试验为随机试验，简称试验，通常记为 E。有时为了区分不同试验用 E_1，E_2，……等符号来表示。

随机试验总是有多种不同的可能结果，我们将随机试验 E 的每一个可能出现的结果称为随机事件，简称事件，通常用大写字母 A、B、C、…表示。

例 1　设 E_1 为抛掷一枚匀称硬币，观察正、反面出现的情况。记 A 为出现正面，B 为出现反面，则 A、B 都是 E_1 的一个可能结果，均为随机事件。

例 2　设 E_2 为观察明天天气是否下雨，则“明天下雨”是 E_2 的一个可能结果，它是一个随机事件。

随机事件即为在某个随机试验过程中，可能发生（出现）也可能不发生的事件。

在每次试验中一定要发生的事件称为必然事件，记为 Ω 或 U。

在每次试验中一定不发生的事件称为不可能事件，记为 ϕ 或 V。

随机事件是随机现象的表现，必然事件和不可能事件都是必然现象的表现，必然事件和不可能事件可视为随机事件的两个极端或视为两个特例。

应当指出，我们讨论的事件，都是相对于一定的试验条件而言的，如果试验条件变了，事件的性质也就发生了变化，例如，在一个标准大气压下，水加热到100℃的试验中，“水沸腾”是必然事件，“水结冰”是不可能事件，如果把试验的条件改变为水降温到-4℃，则“水沸腾”便为不可能事件，“水冰冻”倒是必然事件了。

在随机事件中，不能分解的事件称为基本事件，用 ω 表示。由若干个基本事件组合而成的事件称为复合事件。

例3　设 E_3 为掷一枚骰子，观察出现的点数。论事件 $\omega_i=\{出现 i 点\}$ $(i=1, 2, 3, 4, 5, 6)$，$A=\{出现奇数点\}$，$B=\{出现偶数点\}$，$C=\{出现不大于6点\}$，$D=\{出现大于6点\}$，则 ω_1，ω_2，ω_3，ω_4，ω_5，ω_6 均是随机事件又是基本事件。A 是随机事件，它是由 ω_1，ω_3，ω_5 三个基本事件构成的复合事件。B 是由 ω_2，ω_4，ω_6 三个基本事件复合而成随机事件。C 是必然事件，它是由 ω_1，ω_2，ω_3，ω_4，ω_5，ω_6 所有基本事件构成的复合事件。D 是不可能事件。

最后，请读者注意区别“事件”一词在日常及概率论中的不同含义，事件在通常的意义下，它往往是指一种已发生的情况，例如某某空难事件，1941 年日本偷袭珍珠港的事件之类，在概率论中则不然，事件不是指已发生了情况，而是指某种（或某些）情况的“陈述”，它可能发生，也可能不发生，发生与否，要到有关“试验”有了结果以后，才能知晓，因此，概率论中的事件为试验的结果。

二、样本空间

在随机试验 E 下，由所有基本事件的全体构成的集合称为样本空间（或称基本空间）。记为 Ω或 U。

于是，上面例 1 中 E_1 的样本空间为$\Omega=\{A, B\}$，例 3 中 E_3 的样本空间为$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$。

基本事件是样本空间的样本点，随机事件是样本空间的子集，而样本空间本身即为必然事件。

三、事件的关系及其运算

通过简单事件的概率计算复杂事件的概率是概率论的重要课题之一，因此有必要研究事件的关系与运算。

1. 事件的包含（有利于）

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，或称事件 A 含于（有利于）事件 B，记作 $B\supset A$ 或 $A\subset B$。

若 $A\subset B$，则事件 A 中的每一个样本点必包含在事件 B 中。对任一事件 A，必有 $\phi\subset A\subset\Omega$。

2. 事件的相等

如果事件 A 包含事件 B，且事件 B 也包含事件 A，即 $A\supset B$，且 $B\supset A$，则称事件 A 与 B 相等，记作 $A=B$。此时事件 A，B 中所含的样本点完全相同。

3. 事件的和（并）

事件 A 与 B 中至少有一个发生，这一事件称为事件 A 与 B 的和。它是由事件 A 与 B 的所有样本点构成的集合，记作 $A\cup B$ 或 $A+B$。

类似地，由事件 A_1，A_2，A_3，…，A_n 中至少有一个发生所构成的事件称为 A_1，A_2，A_3，…，A_n 之和，记作 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup$

$A_n=\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 或 $A_1+A_2+\cdots+A_n=\sum\limits_{k=1}^{n}A_k$。

4. 事件的积（交）

两个事件 A 与 B 同时发生，这一事件称为事件 A 与 B 的积（交），它是由 A 与 B 的所有公共样本点构成的集合，记作 $A\cap B$，或 $A\cdot B$。

类似地，由事件 A_1，A_2，…，A_n 同时发生而构成的事件称为事件 A_1，A_2，…，A_n 之积，记作 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 或 $A_1\cdot A_2\cdot\cdots\cdot A_k=\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$。

5. 事件的差

事件 A 发生而事件 B 不发生，称这一事件为事件 A 与事件 B 的差，它是由属于 A 但不属 B 的那些样本点构成的集合，记作 $A-B$。

6. 互斥事件

如果 A 与 B 不能同时发生，即 $A\cdot B=\phi$，则事件 A 与 B 互斥（或称互不相容）。互斥事件没有公共的样本点。显然，基本事件是互斥的。

7. 对立事件

事件“非 A”称为 A 的对立事件（或逆事件），它是由样本空间中不属于 A 的所有样本点构成的集合。记作 $\bar{A}$。

显然，$A\cdot\bar{A}=\phi$，$A+\bar{A}=\Omega$，$\bar{A}=\Omega-A$，$\bar{\bar{A}}=A$。

8. 两两互斥

如果 $A_i\cdot A_j=\phi$（$i\neq j$，i，$j=1$，2，…，n）则称 A_1，A_2，…，A_n 是两两互斥。

9. 完备事件组若 A_1，A_2，…，A_n 两两互斥，且 $A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$，则称 A_1，A_2，…，A_n 构成一个完备事件组。

例 4　仍以掷一枚骰子的试验为例：

设事件 ω_i 为"出现 i 点"($i=1, 2, 3, 4, 5, 6$),事件 A 为"出现奇数点",事件 B 为"出现偶数点",事件 C 为"出现的点数小于 4",事件 D 为"出现的点数是小于 4 的奇数"。则 $\omega_i=\{i\}$ $(i=1, 2, \cdots, 6)$;$A=\{1, 3, 5\}$;$B=\{2, 4, 6\}$;$C=\{1, 2, 3\}$;$D=\{1, 3\}$。显然,$D\subset C$;$A\supset D$;A 与 C 中至少发生一个事件为 $A+C=\{1, 2, 3, 5\}$;A 与 C 中同时发生的事件为 $A\cdot C=\{1, 3\}=D$;事件 B 与 D 互斥;事件 B 与 A 互相对立且构成一个完备事件组;ω_1,ω_2,ω_3,ω_4,ω_5,ω_6 两个互斥且构成一个完备事件组;$\overline{D}=\Omega-D=\{2, 4, 5, 6\}$;$\overline{A+C}=\Omega-(A+C)=\{4, 6\}=\{2, 4, 6\}\cap\{4, 5, 6\}=\overline{A}\cdot\overline{C}$;$\overline{A+B}=\overline{\Omega}=\phi$。

用直观的 Venn 图(图 1-1)表示事件的关系与运算如下:

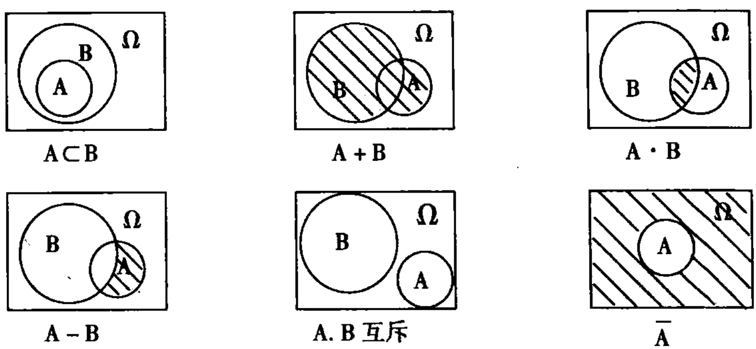

图 1-1

上图可作如下解释,设事件 A 是随机点落在 A 圆内,事件 B 是随机点落在 B 圆内,则事件 $A+B$,$A\cdot B$,$A-B$,$\overline{A}$ 分别表示随机点落在图中相应的阴影部分内,不难验证事件之间的运算满足以下的一些规律:

(1) 否定律 $\overline{\overline{A}} = A$, $\overline{\Omega} = \phi$, $\overline{\phi} = \Omega$

(2) 交换律 $A + B = B + A$, $A \cdot B = B \cdot A$

(3) 结合律 $(A + B) + C = A + (B + C)$;

$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$。

(4) 分配律 $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;

$(A \cdot B) + C = (A + C) \cdot (B + C)$。

(5) 吸收律 $A \cdot (A + B) = A$; $A + (A \cdot B) = A$。

特例: $A \cdot \Omega = A$; $A \cdot \phi = \phi$; $A + \Omega = \Omega$; $A + \phi = A$。

(6) 等幂律 $A + A = A$; $A \cdot A = A$。

(7) 对偶律 $A + B = A \cdot B$; $A \cdot B = A + B$

易见，事件的关系及其运算与集合的关系及其运算是一致的。

对初学概率的读者来说，要学会用概率论的语言来解释集合间的关系及运算，并能运用它们。

例 5 事件 A_k 表示第 k 次取到合格品 (k = 1, 2, 3) 试用已知事件 A_k 的运算式表示下列事件:

(1) 三次都取到了合格品;

(2) 三次中至少有一次取到合格品;

(3) 三次中恰有两次取到合格品;

(4) 三次中最多有一次取到合格品。

解: (1) 用 $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$ 表示。

(2) 用 $A_1 + A_2 + A_3$ 表示。

(3) 用 $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$ 表示。

(4) 用 $A_1 \cdot A_2 + A_1 \cdot A_3 + A_2 \cdot A_3$ 表示。

例 6 事件 A_k 表示某射手第 k 次 (k = 1, 2, 3) 击中目标，试用文字叙述下列事件: $A_1 + A_2$; $A_1 + A_2 + A_3$; $A_1A_2A_3$; A_2; $A_3 - A_2$; $A_3\overline{A}_2$; $A_1 + A_2$; A_1A_2; $A_2 + A_3$; A_2A_3; $A_1A_2A_3 + A_1A_2A_3 +$

$A_1A_2A_3+A_1A_2A_3$。

解：A_1+A_2：前两次中至少有一次击中目标；

$A_1+A_2+A_3$：三次射击中至少有一次击中目标；

$A_1A_2A_3$：三次射击都击中了目标；

$\overline{A}_2$：第二次射击未射 击中目标；

$A_3-A_2=A_3\cdot\overline{A}_2$：且都表示为第三次击中目标而第二次未击中目标；

$A_1+A_2=A_1\cdot A_2$：前两次射击均未击中目标；

$A_2+A_3=A_2\cdot A_3$：后两次射击中至少有一次未击中目标；

$A_1A_2A_3+A_1A_2A_3+A_1A_2A_3+A_1A_2A_3$：三次射击中至少有两次击中目标。

§1—2　事件的概率

随机事件广泛存在于自然现象和社会现象之中，人们关心的不仅是可能出现哪些事件，更重要的是想了解与比较各事件出现的可能性的大小。例如开发一种新产品，设计者势必要研究未来市场出现畅销、滞销的可能性有多大，以便决定是否开发。

随机事件发生的可能性的大小，可以通过大量的测试或分析而找出其统计规律性，它是事件本身所具有的一种确定属性。为了定量地描述随机事件的这种属性，就需要用一个实数把这种可能性的大小表达出来。刻划事件发生可能大小的数值叫做事件的概率分别由 P（A），P（B），P（C），……表示。

那么，对于一个给定的事件 A，其概率 P（A）到底是一个什么数？怎样求出这个数？在概率论的发展历史上，人们针对不同的问题，从不同角度给出了概率的定义和计算概率的方法。在此我们主要介绍概率的统计定义和古典定义。

一、概率的统计定义

1. 随机事件的频数与频率

为了定量地描述随机事件发生的可能性大小具有统计规律这个属性，我们先介绍频率的概念。

定义　在一组不变的条件下，独立地重复 n 次试验 E，如果事件 A 在 n 次试验中出现了 m 次，称比值$\frac{m}{n}$为随机事件 A 发生的频率，记作 $\omega(A)$，即 $\omega(A)=\frac{m}{n}$，其中 m 称为事件 A 发生的频数。

频率具有如下性质：

(1) $0\leqslant\omega(A)\leqslant1$

(2) $\omega(\Omega)=1$

(3) $\omega(\Phi)=0$

历史上，不少统计学家，例如皮尔逊（pearson）等人作过成千上万次抛掷硬币的试验，其试验记录如下：

实验者	试验次数 n	出现正面频数 m	出现正面频率 m/n
Demorgan	2048	1061	0.518
Buffon	4040	2048	0.5069
Pearson	12000	6019	0.5016
Pearson	24000	12012	0.5005
维　尼	30000	14994	0.4998

由上表看出，出现正面的频率接近 0.5，并且抛掷次数越多，频率越接近 0.5，呈现出一种稳定状态。

频率反映了一个事件发生的频繁程度，从而在一定程度上刻画了这个事件发生的可能性大小。一般地，随着试验次数的逐渐增加，频率总是稳定于某一常数附近，因此，用这个常数作为事件发生的概率是适宜的。

2. 概率的统计定义

定义 1　在相同条件下，重复 n 次试验，事件 A 发生的频率 n 增大时总是稳定于某一常数 p 附近，称这个常数 p 为事件 A 发生的概率，记为 P（A） = p。

这个定义适用于一切类型的随机试验，不过，要通过此定义确定出事件 A 发生的概率 P（A）是困难的，但它为我们提供了一种求事件发生的概率的近似方法。事实上，人们常常就是把多次的大量试验所测试的频率的平均值或在一次大量试验中所测试的频率作为 P（A）的近似值。

按概率的统计定义，事件“抛掷一枚硬币出现正面”的概率为 0.5。

二、概率的古曲定义

直接确定某一事件的概率是非学困难的，甚至是不可能的，仅在某些情况下，才可以直接计算事件的概率。请看下面两个试验：

（1）掷一均匀的骰子，可能出现 1 点，2 点，…，6 点，六种情况，且出现这六种结果的可能性是相同的。

（2）一盒灯泡一百个，要抽取一个检查灯泡的质量（使用寿命），任意取一个，则一百个灯泡被抽取的机会相同。

这两个试验的共同特点是：

（1）每次试验，只有有限个不同的基本事件；

（2）每次试验中，各基本事件（样本点）出现是等可能的。

在概率论中，把具有上述两个特点的试验叫做古典型试验，