经济数学

学习辅导

主　编　高朝阳　刘彦慧　李　焱
副主编　任秋萍　刘　莹　黄沙日娜
主　审　宋作忠

黑龙江教育出版社

经济数学学习辅导

主　编　高朝阳　刘彦慧　李　焱
副主编　任秋萍　刘　莹　黄沙日娜
主　审　宋作忠

黑龙江教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济数学学习辅导 / 高朝阳,刘彦慧,李焱主编. —哈尔滨:黑龙江教育出版社,2008.7
ISBN 978-7-5316-4978-6

Ⅰ.经… Ⅱ.①高…②刘…③李… Ⅲ.经济数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.F224:0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 105743 号

经济数学学习辅导

Jingji Shuxue Xuexi Fudao

主　编　高朝阳　刘彦慧　李　焱
副主编　任秋萍　刘　莹　黄沙日娜

责任编辑　张玉红
封面设计　刘海涛
责任校对　王　丰
出版发行　黑龙江教育出版社(哈尔滨市南岗区花园街 158 号)
印　　刷　黑龙江神龙联合制版印务有限责任公司
开　　本　850×1168 毫米　1/32
印　　张　13.125
字　　数　353 千
版　　次　2008 年 7 月第 1 版
印　　次　2008 年 7 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5316-4978-6/G·3896
定　　价　25.60 元

前　　言

现代经济学理论的一个明显的特点便是较多地运用了数学,通过数学推理、数学计算、数学模型来阐明经济学观点与理论已经是普遍的方法。因此,经济管理类专业的学生应该学好高等数学。要学好数学必须做相当数量的数学题,这是无庸置疑的,但经管专业的学生毕竟与理工类的学生各有侧重,我们根据经管类学生的实际需求编了这本辅导书。本书是和复旦大学出版社曹定华主编的《微积分》配套的学习辅导书。

全书由六部分组成。每一章第一部分是主要内容,介绍了本章的主要知识点;第二部分是教学要求,指出了大纲对各知识点的不同要求;第三部分是例题选讲,结合本章的重点、难点给出了一些常见题型及常用解题方法;第四部分是课后习题全解,这是全书的重点。为了便于同学们学习,我们给出了全书所有习题的解题过程;第五部分是补充习题及解答,为了让同学们见到更多的题型,有更多的练习的机会,我们加入了一些补充习题,并全部做了解答;另外,我们在全书的最后加入了近几年的经济类考研数学试卷,使同学们对考研题有一个初步的了解,知道考研应该掌握的知识点,掌握到什么程度;并由此开阔视野,

提高对自己的要求。如果本书能对同学们学数学有些帮助，我们会非常欣慰！

参加编写的老师有：高朝阳、刘艳慧、李焱、任秋萍、刘莹、黄沙日娜。

我们要感谢宋作忠教授审阅了全书并提出了宝贵意见。还要感谢宋明娟、杜广环、刘龙等老师对本书的策划。

由于编者水平有限，必有许多不妥之处，欢迎大家批评指正。

编者

2008 年 7 月

目　　录

第一章　函　数

一、主要内容

函数定义、函数的三要素、函数的性质、反函数、复合函数、初等函数.

二、教学要求

1. 理解函数的概念及函数的奇偶性、单调性、周期性及有界性.

2. 理解反函数和复合函数的概念.

3. 熟悉基本初等函数的性质和图形.

4. 会建立简单实际问题中的函数关系式.

三、例题选讲

例 1　已知 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，写出它的定义域，并判断其奇偶性.

解法 1　对 $\forall\ x\in\mathbf{R}$，有 $\sqrt{1+x^2}>|x|$，$|x|+x\geqslant 0$

$\therefore x+\sqrt{1+x^2}>x+|x|\geqslant 0$

又对 $\forall\ x\in\mathbf{R}$，有 $x+\sqrt{1+x^2}>0$

$\therefore$ 定义域为 $\mathbf{R}$.

解法 2　要使函数解析式有意义，须 $x+\sqrt{1+x^2}>0\Rightarrow\sqrt{1+x^2}$

$> -x$

当 $x \geqslant 0$ 时，$\sqrt{1+x^2} > 0 \geqslant -x$　不等式成立

当 $x<0$ 时，对 $\sqrt{1+x^2} > -x$ 两边平方，可变为 $1+x^2>x^2$ 此不等式恒成立，$\therefore$ 定义域为 $\mathbf{R}$.

$$f(-x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)=\ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

$$=-f(x)$$

$\therefore$ 为奇函数.

例2　确定函数 $y=\sqrt{\lg\frac{5x-x^2}{4}}$ 的定义域

解　$\begin{cases}\lg\frac{5x-x^2}{4}\geqslant 0\\ \frac{5x-x^2}{4}>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{5x-x^2}{4}\geqslant 1\\ x(5-x)>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2-5x+4\leqslant 0\\ 0<x<5\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}1\leqslant x\leqslant 4\\ 0<x<5\end{cases} \Rightarrow 1\leqslant x\leqslant 4$

例3　设 $f(x)=\sqrt[n]{a-x^n}$ $(a>0, 0<x<\sqrt[n]{a})$，求 (1) $f[f(x)]$，(2) $f(x)$ 的反函数.

解　(1) $f[f(x)]=\sqrt[n]{a-(\sqrt[n]{a-x^n})^n}=\sqrt[n]{a-a+x^n}=x$

(2) 令 $y=\sqrt[n]{a-x^n}$，则 $x=\sqrt[n]{a-y^n}$

将 x 与 y 字母互换，得 $f(x)$ 反函数为 $y=\sqrt[n]{a-x^n}$

例4　证明 $f(x)=x-[x]$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界周期函数.

证：当 $n\leqslant x<n+1$　$(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，有

$f(x)=x-[x]<n+1-n=1$

$f(x)=x-[x]\geqslant n-n=0$

即 $0\leqslant f(x)<1$，$\therefore f(x)$ 是有界函数

对 $\forall k\in\mathbf{N}$　$\because f(x+k)=x+k-[x+k]=x+k-([x]+k)$

$$=x-[x]=f(x)$$

$\therefore f(x)$ 是以 $k(k\in\mathbf{N})$ 为周期的周期函数.

四、课后习题全解

习题1－1

1. 用区间表示下列不等式的解:

(1)$x^2\leqslant 9$　　$-3\leqslant x\leqslant 3$　$\therefore x\in[-3,3]$

(2)$|x-1|>1$　$x-1>1$ 或 $x-1<-1\Rightarrow x>2$ 或 $x<0$

$\therefore x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

(3)$(x-1)(x+2)<0$　$-2<x<1$　$\therefore x\in(-2,1)$

(4)$0<|x+1|<0.01$　$-0.01-1<x<0.01-1$　且 $x\neq -1$

$\Rightarrow -1.01<x<-0.99$

$\therefore x\in(-1.01,-1)\cup(-1,-0.99)$

2. 用区间表示下列函数的定义域:

(1)$y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$

解　$x\neq 0$ 且 $1-x^2\geqslant 0\Rightarrow -1\leqslant x\leqslant 1$

$\therefore x\in[-1,0)\cup(0,1]$

(2)$y=\arcsin(1-x)+\lg(\lg x)$

解　$-1\leqslant 1-x\leqslant 1$ 且 $x>0$ 且 $\lg x>0$

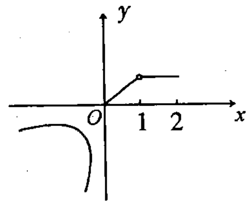
$$\Rightarrow\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 2\\ x>0\\ x>1\end{cases}\Rightarrow x\in(1,2]$$

(3)$y=\sqrt{6-5x-x^2}+\dfrac{1}{\ln(2-x)}$

解
$$\begin{cases}6-5x-x^2\geqslant 0\\ 2-x>0\\ 2-x\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-6\leqslant x\leqslant 1\\ x<2\\ x\neq 1\end{cases}\Rightarrow x\in[-6,1)$$

3. 确定下列函数的定义域及求函数值 $f(0)$,$f(\sqrt{2})$,$f(a)$,并作图形.

$$(1)y=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & x<0\\ 2x & 0\leqslant x<1\\ 1 & 1<x\leqslant 2\end{cases}$$



解 定义域 $x\in(-\infty,1)\cup(1,2]$

$f(0)=2.0=0 \qquad f(\sqrt{2})=1$

$$f(a)=\begin{cases}\dfrac{1}{a} & a<0\\ 2a & 0\leqslant a<1\\ 1 & 1<a\leqslant 2\end{cases}$$

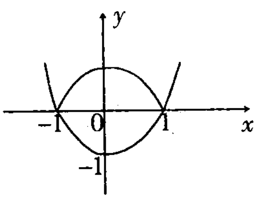
$$(2)y=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & |x|\leqslant 1\\ x^2-1 & 1<|x|<2\end{cases}$$

解 定义域 $x\in(-2,2)$

$f(0)=\sqrt{1-0^2}=1$

$f(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^2-1=1$

$$f(a)=\begin{cases}\sqrt{1-a^2} & |a|\leqslant 1\\ a^2-1 & 1<|a|<2\end{cases}$$



4. 设 $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ -1 & |x|>1\end{cases}$ 求 $f[f(x)]$

解 当 $|x|\leqslant 1$ $\quad f(x)=1 \quad f[f(x)]=f(1)=1$

当 $|x|>1$ $\quad f(x)=-1 \quad f[f(x)]=f(-1)=1$

$\therefore f[f(x)]=1$

5. 判定下列函数的奇偶性：

$(1)f(x)=\dfrac{1-x^2}{\cos x}$

解 $f(-x)=\dfrac{1-(-x)^2}{\cos(-x)}=\dfrac{1-x^2}{\cos x}=f(x) \quad \therefore f(x)$为偶函数.

(2)$f(x)=(x^2+x)\sin x$

解 $f(-x)=(x^2-x)(-\sin x)\neq f(x)$ $\therefore f(x)$非奇非偶.

$\neq -f(x)$

(3)$f(x)=\begin{cases}1-e^{-x} & x\leqslant 0\\ e^x-1 & x>0\end{cases}$

解 $f(-x)=\begin{cases}e^{-x}-1 & -x\geqslant 0\\ 1-e^x & -x<0\end{cases}=-f(x)$ $\therefore f(x)$为奇函数.

6. 设$f(x)$在区间$(-l,l)$内有定义,试证明:

(1)$f(-x)+f(x)$为偶函数

证:设$F(x)=f(-x)+f(x)$

$F(-x)=f(x)+f(-x)=F(x)$

$\therefore F(x)$为偶函数.

(2)$f(-x)-f(x)$为奇函数

证:设$F(x)=f(-x)-f(x)$

则$F(-x)=f(x)-f(-x)=-F(x)$

$\therefore F(x)$为奇函数.

7. 试证:

(1)两个偶函数的代数和为偶函数.

证:设$f(x),g(x)$为偶 往证:$f(x)+g(x)$为偶

$\because f(-x)=f(x)$ $g(-x)=g(x)$

设$F(x)=f(x)+g(x)$

则$F(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=F(x)$

$\therefore F(x)=f(x)+g(x)$为偶函数.

(2)奇函数与偶函数的积是奇函数.

证:设$f(x)$为奇函数,$g(x)$为偶函数,往证:$F(x)=f(x)g(x)$为奇函数

$\because f(-x)=-f(x)$ $g(-x)=g(x)$

$F(-x)=f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)=-F(x)$

$\therefore F(x)=f(x)g(x)$为奇函数.

8. 求下列函数的反函数:

(1) $y=2\sin 3x$

解 $y=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{2}$

(2) $y=\frac{2^x}{2^x+1}$

解 $2^x=\frac{y}{1-y}\Rightarrow x=\log_2\frac{y}{1-y}$ $\therefore$ 反函数为: $y=\log_2\frac{x}{1-x}$

(3) $f(x)=\begin{cases}2x-1 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2-(x-2)^2 & 1<x\leqslant 2\end{cases}$

解 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ $-1\leqslant 2x-1\leqslant 1$

当 $1<x\leqslant 2$ $1<2-(x-2)^2\leqslant 2$

$\therefore f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x+1) & -1\leqslant x\leqslant 1\\ 2-\sqrt{2-x} & 1<x\leqslant 2\end{cases}$

9. 将 y 表示成 x 的函数,并求定义域

(1) $y=10^u, u=1+x^2$

解 $y=10^{1+x^2}$ $x\in(-\infty,+\infty)$

(2) $y=\ln u, u=2^v$ $,v=\sin x$

解 $y=\ln 2^{\sin x}=\sin x\cdot\ln 2$ $x\in(-\infty,+\infty)$

(3) $y=\arctan u, u=\sqrt{v}$ $v=a^2+x^2$ (a 为实数)

解 $y=\arctan\sqrt{a^2+x^2}$ $x\in(-\infty,+\infty)$

习题 1-2

1. 下列初等函数是由哪些基本初等函数复合而成的?

(1) $y=\sqrt[3]{\arcsin a^x}$

解 $y=\sqrt[3]{u}$ $u=\arcsin v$ $v=a^x$

(2) $y=\sin^3\ln x$

解 $y=u^3$ $u=\sin v$ $v=\ln x$

(3) $y=a^{\tan x^2}$

解 $y=a^u$ $u=\tan v$ $v=x^2$

(4) $y=\ln[\ln^2(\ln^3 x)]$

解 $y=\ln u \quad u=v^2 \quad v=\ln w \quad w=s^3 \quad s=\ln x$

2. 设$f(x)$的定义域为$[0,1]$,分别求下列函数的定义域.

(1)$f(x^2)$

$\because 0\leqslant x^2\leqslant 1 \qquad \therefore -1\leqslant x\leqslant 1$

$\therefore$ 定义成为 $x\in[-1,1]$

(2)$f(\sin x)$

$\because 0\leqslant \sin x\leqslant 1 \qquad \therefore 2k\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$

$x\in[2k\pi,2k\pi+\pi](k\in\mathbf{Z})$

(3)$f(x+a),(a>0)$

$\therefore 0\leqslant x+a\leqslant 1 \quad \therefore -a\leqslant x\leqslant 1-a \therefore x\in[-a,1-a]$

(4)$f(e^{x+1})$

$\because 0\leqslant e^{x+1}\leqslant 1 \qquad \therefore x+1\leqslant 0\Rightarrow \quad x\leqslant -1$

$\therefore x\in(-\infty,-1]$

3. 求下列函数的表达式:

(1)设 $\varphi(\sin x)=\cos^2 x+\sin x+5$,求 $\varphi(x)$

解 $\varphi(\sin x)=1-\sin^2 x+\sin x+5=-\sin^2 x+\sin x+6$

$\therefore \varphi(x)=-x^2+x+6$

(2)设 $g(x-1)=x^2+x+1$,求 $g(x)$

解 $g(x-1)=(x-1)^2+3x-3+3=(x-1)^2+3(x-1)+3$

$\therefore g(x)=x^2+3x+3$

(3)设$f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$,求$f(x)$

解 $f(x+\frac{1}{x})=(x+\frac{1}{x})^2-2$

$\therefore f(x)=x^2-2$

4. 设$f(x)$为奇函数,证明:若$f(x)$在$x=0$有定义,则$f(0)=0$.

证:$f(x)$为奇函数

则$f(-x)=-f(x)$

令$x=0$,则$f(0)=-f(0)\Rightarrow 2f(0)=0\Rightarrow f(0)=0$.

5. 证明:狄利克雷函数是周期函数,任何一个正有理数均是它

的周期,但无最小正周期.

证明:狄利克雷函数:$D(x)=\begin{cases}1 & x\text{有理数}\\0 & x\text{无理数}\end{cases}$

设 T 为正有理数　　则 $\begin{matrix}\text{有理数}+T=\text{有理数}\\\text{无理数}+T=\text{无理数}\end{matrix}$

$\therefore D(x+T)=\begin{cases}1 & x\text{有理数}\\0 & x\text{无理数}\end{cases}=D(x)$

$\therefore D(x)$ 为周期函数

习题 1－3

1. 设销售商品的总收入是销售量 x 的二次函数,已知 $x=0,2,4$ 时,总收入分别是 0,6,8,试确定总收入函数 $TR(x)$.

解　设 $TR(x)=tx^2+mx+n$

由题意可知:$\begin{cases}0=t\cdot 0^2+m\cdot 0+n\\6=t\cdot 2^2+m\cdot 2+n\\8=t\cdot 4^2+m\cdot 4+n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=-\dfrac{1}{2}\\m=4\\n=0\end{cases}$

$\therefore TR(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+4x$

2. 设某厂生产某种产品 1 000 吨,定价为 130 元/吨,当一次售出 700 吨以内时,按原价出售;若一次成交超过 700 吨时,超过 700 吨的部分按原价的 9 折出售,试将总收入表示成销售量的函数.

解　当 $x\leqslant 700$ 时　　$TR(x)=130x$

当 $700\leqslant x\leqslant 1\,000$ 时　$TR(x)=130\cdot 700+(x-700)\cdot 130\cdot 0.9$

$=130x+9\,100$

$\therefore TR(x)=\begin{cases}130x & x\leqslant 700\\130x+9\,100 & 700<x\leqslant 1\,000\end{cases}$

3. 已知需求函数为 $P=10-\dfrac{Q}{5}$,成本函数为 $C=50+2Q$,P、Q 分别表示价格和销售量,写出利润 L 与销售量 Q 的关系,并求平均利润.

解　$L=QP-C=Q(10-\frac{Q}{5})-50-2Q$

$$=-\frac{1}{5}Q^2+8Q-50$$

平均利润 $=\frac{L}{Q}=-\frac{1}{5}Q+8-\frac{50}{Q}$

4. 已知需求函数 Q_d 和供给函数 Q_s，分别为 $Q_d=\frac{100}{3}-\frac{2}{3}p, Q_s=-20+10p$，求相应的市场均衡价格.

解　$Q_d=Q_s \Rightarrow \frac{100}{3}-\frac{2}{3}p=-20+10p \Rightarrow p=5$

$\therefore p=5$ 为市场均衡价格.

五、补充习题及解答

1. 选择:

(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，且 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$，那么 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域是(　　)

A. $[-a,1-a]$　B. $[-a,1+a]$　C. $[a,1-a]$　D. $[a,1+a]$

(2) 函数 $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\lg\sin x$ 的定义域是(　　)

A. $(0,2]$　B. $[0,1]$　C. $[1,2]$　D. $[-1,1]$

(3) $f(x)=\frac{1}{x}, g(x)=1-x$，则 $f[g(x)]=$(　　)

A. $1-\frac{1}{x}$　B. $1+\frac{1}{x}$　C. x　D. $\frac{1}{1-x}$

(4) 函数 $y=\sin(2x+3\pi)$ 的最小正周期是(　　)

A. 2π　B. π　C. $\frac{\pi}{2}$　D. $\frac{\pi}{4}$

(5) $f(x)=x\tan x e^{\sin x}$ 是(　　)函数

A. 偶　B. 无界　C. 周期　D. 单调

(6) $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$，则 $f\{f[f(x)]\}=($　　$)$

A. 0　　　　B. 1

C. $\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$　　　　D. $\begin{cases}0 & |x|\leqslant 1\\ 1 & |x|>1\end{cases}$

2. 填空：

(1) $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|=1\\ -1 & |x|>1\end{cases}$　　$g(x)=e^x$，

则 $g[f(x)]=$__________.

$f[g(x)]=$__________.

(2) 函数 $y=\ln\ln\ln x$ 的定义域是________.

(3) 已知 $f(\sin\frac{x}{2})=\cos x+1$，则 $f(\cos\frac{x}{2})=$________.

(4) 设 $f(x)=\sin x$，$f[\varphi(x)]=1-x^2$，则 $\varphi(x)=$________.

其定义域为________.

参考答案

1. 选择

(1) C　(2) A　(3) D　(4) B　(5) B　(6) B

2. 填空

(1) $g[f(x)]=\begin{cases}e & |x|<1\\ 1 & |x|=1\\ e^{-1} & |x|>1\end{cases}$　$f[g(x)]=\begin{cases}1 & x<0\\ 0 & x=0\\ -1 & x>0\end{cases}$

(2) $(e,+\infty)$　(3) $1-\cos x$　(4) $\arcsin x(1-x^2)$

$x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

第二章　极限与连续

一、主要内容

数列极限和函数极限的概念和性质，四则运算法则；无穷小量和无穷大量的概念和性质；极限的存在性定理；两个重要极限；函数的连续性的概念和性质，闭区间上连续函数的性质.

二、教学要求

1. 理解数列极限的定义；会利用定义和充要条件证明一些简单的数列极限.

2. 理解函数在有限点处的极限的定义；理解函数在负无穷、正无穷和无穷大处的极限的定义；理解在有限点处左右极限的定义；会利用定义来证明一些简单的函数极限.

3. 理解极限的 4 条性质，并会用它们处理简单问题.

4. 理解无穷小、无穷大的概念及两者的关系，掌握无穷小的运算性质. 掌握复合函数的极限法则，掌握极限的单调性. 掌握极限的运算法则及换元法则.

5. 理解极限存在的夹逼准则和单调有界收敛准则，会用这个准则求极限.

6. 理解高阶无穷小、k 阶无穷小、同阶无穷小和等价无穷小的概念；掌握等价无穷小的性质，会用等价无穷小求极限.

7. 理解函数在一点连续和在一个区间上连续的概念. 掌握间断点的概念，会判别间断点类型. 会应用初等函数的连续性求极限.