运筹学基础

YUNCHOUXUEJICHU

欧新元 侯亚君 主编

辽宁大学出版社

运筹学基础

欧新元　侯亚君　主　编
孟庆贤　李海英　副主编

辽宁大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

运筹学基础/欧新元等主编．—沈阳：辽宁大学出版社，2005
ISBN 7－5610－4857－2

Ⅰ．运...　Ⅱ．欧...　Ⅲ．运筹学—高等学校—教材
Ⅳ．O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 059443 号

责任编辑：张春光　　版式设计：田　春
封面设计：邹本忠　　责任校对：齐　悦

辽宁大学出版社出版
地址：沈阳市皇姑区崇山中路 66 号　　邮政编码：110036
联系电话：024－86864613　　http：//www.lnupress.cn
Email：mailer@lnupress.cn
辽宁大学印刷厂印刷　　辽宁大学出版社发行

幅面尺寸：140mm×203mm　　印张：9.75
字数：250 千字

2005 年 6 月第 1 版　　2005 年 6 月第 1 次印刷
印数：1～1 000　　定价：20.00 元

内容摘要

本书根据理工类、管理类各专业的运筹学课程的教学要求所编写。书中内容包括:线性规划与单纯型方法,对偶理论与灵敏度分析,运输问题,整数规划,图与网络分析,对策论,决策分析,网络计划。每章末配有习题,书末附有部分习题的参考答案。本书可作为理工类、管理和经济类各专业的教材或教学参考书,也可作为工程技术人员以及从事财经和管理工作的有关人士的参考资料。

前　　言

运筹学一词在英国称为 Operational Research，在美国称为 Operations Research，缩写均为 O. R.。Operations Research，原意是操作研究，作业研究，运用研究，作战研究。由于运筹学涉及的主要领域是管理问题，研究的基本手段是建立数学模型，并比较多地运用各种数学工具。在我国则是从“运筹策帷帐之中，决胜于千里之外”这一古语中摘取“运筹”二字。将 O. R. 译作运筹学，包含运用筹划，以策略取胜等意义。

朴素的运筹学思想和个别案例可以追溯到上千年前，在我国古代文献中就有不少记载。在中国战国时期，曾经有过一次流传后世的赛马比赛，相信大家都知道，这就是齐王赛马。这个故事说明在已有的条件下，经过策划、安排，选择一个最好的方案，就会取得最佳的效果。可见，筹划、安排是十分重要的。运筹学作为一门现代科学，它的起源应该追溯到几十年前。最早进行的运筹学工作，是以英国物理学家希尔为首的英国国防部防空实验小组在第一次世界大战期间进行的高射炮系统利用研究。同时，英国人莫尔建立的分析美国海军横跨大西洋护航队损失的数学模型也是运筹学的早期工作，这一工作在第二次世界大战中有了深入而全面的发展。

1938 年英国空军就有了飞机定位和控制系统，并在沿海建立了雷达站，用来发现敌机。但在一次防空演戏中发现，由这些雷达送来的信息常常是互相矛盾的，需要加以协调和关联，才能

改进作战效能。于是，雷达站负责人罗威提出立即进行整个防空系统的研究，为此成立了专门的小组，并把这一课题命名为“Operations Research”。专门小组称为空军运筹学小组，当时主要从事警报和控制系统的研究。在1939年到1940年，这个小组的任务扩大到包括防卫战斗机的布置，并对未来的战斗进行预测，以供决策之用。这个小组的工作对后来的英军取得不列颠空战的胜利起了积极的作用。第二次世界大战中，运筹学被广泛应用到军事系统工程中，除英国外，美国和加拿大等国也建立了军事数学小组，研究并解释战争中提出的运筹学课题。例如，组织适当的护航编队使运输船队损失最小，改进搜索方法，及时发现敌军潜艇；改进深水炸弹的起爆深度，提高了毁伤率；合理安排飞机维修；提高了飞机的利用率等。这些运筹学成果对盟军大西洋海战的胜利起了十分重要的作用，对其他许多战斗的胜利也起了积极的作用。“二战”结束时在英美及加拿大军队中的运筹学工作者已超过了700人。可以说正是由于战争的需要，促进了运筹学的产生和发展。在战后的工业恢复繁荣期，由于组织内与日俱增的复杂性和专门化所产生的问题使人们认识到这些问题基本上与战争中曾面临的问题类似，只是具有不同的现实环境而已。于是，运筹学就进入到工商企业和其他部门。上世纪50年代以后得到了广泛的应用。上世纪60年代以来，运筹学主要用于处理大型的复杂问题，诸如军事问题，教育问题，污染问题，交通运输问题，人力资源管理问题等；还广泛应用于以下一些部门：能源，预测，会计金融，销售，储存，计算机与信息系统，设计，城市服务系统，保健与医疗，电气，加工工业，第三产业等。

1948年，美国麻省理工学院率先开设了运筹学课程，后来许多大学也陆续开设。运筹学成为一门学科，内容也日益丰富。1950年，美国出版了第一份运筹学杂志；1951年，摩尔斯和金伯

尔出版了《运筹学方法》一书，这是第一本以运筹学为名的专著。该书总结了第二次世界大战中运筹学的军事应用，并且给出了运筹学的一个著名的定义：运筹学是为执行部门对它们控制下的“业务”活动采取决策提供定量依据的科学方法。

世界上不少国家已成立了致力于该领域及相关活动的专门学会。美国于 1952 年成立了运筹学会，并出版期刊《运筹学》。世界其他国家也先后创办了运筹学会与期刊。1957 年成立了国际运筹学协会。在上世纪 50 年代中期，钱学森、许国志等学者将运筹学由西方引入我国，并结合我国的特点在国内推广应用。在此期间，以华罗庚为首的一大批数学家加入到运筹学的研究队伍，使运筹学的很多分支很快跟上当时的国际水平。

几十年来，运筹学的发展就像一棵成长中的大树一样，一方面，向上分出了更多的新的分支；另一方面，它的根，即其理论基础也扎得更深更牢。也正因为如此，几乎任何一本教材也无法包括运筹学的全部内容。在此，仅选取了运筹学中的几个分支编成此书。根据我们的教学经验，本书内容可在 60—70 学时内讲完。

参加本书编写的有欧新元（沈阳师范大学数学与系统科学学院）编写第 1 章、第 8 章；侯亚君（沈阳理工大学理学院）编写前言、第 2 章；孟庆贤（沈阳师范大学数学与系统科学学院）编写第 3 章、第 6 章；高峰（沈阳理工大学经贸管理学院）编写第 4 章；赵中华（沈阳理工大学经贸管理学院）编写第 5 章；李海英（辽宁大学轻型产业学院）编写第 7 章；赵强（沈阳理工大学经贸管理学院）编写各章习题和答案。

本书的出版得到辽宁大学出版社的大力支持，在此表示感谢。另外，由于编者水平有限，书中错误与不妥之处在所难免，请读者批评指正。

目　录

第1章 线性规划与单纯形方法

线性规划是辅助人们进行科学管理的一种数学方法，是运筹学的一个重要分支。线性规划主要用来解决有限资源如何进行最优分配的问题。由于这类问题是普遍存在的，所以，线性规划在工农业生产、经济管理及交通运输等方面有着极为广泛的应用。又由于线性规划的模型比较简单，容易建立和掌握，并且有着成熟的解法，所以，在诸多的管理优化技术中，线性规划方法是最常用而又最为成功的一种方法。

本章将首先介绍线性规划的数学模型，两个变量问题的图解法等基本概念，然后介绍线性规划问题的基本理论和单纯形方法。

1.1 线性规划的数学模型

下面通过实例说明怎样将实际问题转化为线性规划模型。

例1.1 某企业生产甲、乙两种产品，要用A、B、C三种不同的原料。从工艺资料知道，每生产一件产品甲需三种原料分别为1,1,0单位；生产一件产品乙需三种原料分别为1,2,1单位。每天三种原料供应能力分别为6,8,3单位。又知道，生产一件产品甲，企业利润收入为3元；生产一件产品乙，企业利润收入为4元。企业应如何安排计划，使一天的总利润最大？

解：为简明起见，一般可将问题的条件列成表格形式，如表

1.1。

表 1.1

单位产品所需原料 / 原料	产品 甲	产品 乙	原料供应量(单位)
A	1	1	6
B	1	2	8
C	0	1	3
单位利润(元)	3	4	

将一个实际问题转化为线性规划模型有以下几个步骤:

1. 确定决策变量:决策变量是模型要决定的未知量,也是模型最重要的参数。在本例中可设:

产品甲的日产量为 x_1 件

产品乙的日产量为 x_2 件

显然有 $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$

2. 确定目标函数:目标函数决定线性规划问题的优化方向,是线性规划模型的重要组成部分。要明确实际问题所追求的目标是什么?是求该目标的最大值还是最小值,并把目标写成决策变量的函数。

在本例中,设企业一天所获得的总利润为 S,则有目标函数:

$$S = 3x_1 + 4x_2$$

求目标函数的最大值,设为

$$\max S = 3x_1 + 4x_2$$

3. 确定约束方程:明确问题中所有的限制条件,并用决策变量的方程组或不等式来表示,连同决策变量的非负限制统称为约束条件。

在本例题中

$x_1 + x_2 \leqslant 6$

$x_1 + 2x_2 \leqslant 8$

$x_2 \leqslant 3 \qquad x_1 \geqslant 0 \qquad x_2 \geqslant 0$

综合起来，得到这个实际问题的数学模型

$$\max S = 3x_1 + 4x_2$$

$$\text{s. t} \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &\leqslant 6 \\ x_1 + 2x_2 &\leqslant 8 \\ x_2 &\leqslant 3 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

其中“s. t”表示“满足于”，是“subjet to”的缩写。

例 1.2　某建筑工地需要直径相同而长度不同的成套钢筋。每套由 7 根 2 米长与 2 根 7 米长的钢筋组成。现有 15 米长的钢筋 150 根，问应怎样下料，才能使废料最少？

首先分析，把一根长 15 米的钢筋割成长为 7 米和 2 米的两种规格，有三种较经济的方法，其结果列表如下：

表 1.2

分割方法	7 米长	2 米长	废料长
一	1 根	4 根	0 米
二	2 根	0 根	1 米
三	0 根	7 根	1 米

设：x_1, x_2, x_3 分别表示三种方法割料的 15 米钢筋的根数，S 表示废料的总长度，得约束条件：

$x_1 + x_2 + x_3 = 150$

又由于$(4x_1 + 7x_3) : (x_1 + 2x_2) = 7 : 2$

整理得　$x_1 - 14x_2 + 14x_3 = 0$

目标是废料最少，所以目标函数为

$$\min S = x_2 + x_3$$

综合起来，可得此下料问题的数学模型

$$\min S = x_2 + x_3$$

$$\text{s.t}\quad \begin{aligned} & x_1 + x_2 + x_3 = 150 \\ & x_1 - 14x_2 + 14x_3 = 0 \\ & x_i \geqslant 0 \quad (i = 1,2,3) \end{aligned}$$

从上面两个例子可以看出，线性规划问题是求一个线性函数在满足一组线性等式或不等式方程条件下的极值问题的统称。线性规划问题一般由三个部分组成：

(1) 由决策变量构成的反映决策者目标的线性目标函数；

(2) 一组由决策变量的线性等式或不等式构成的约束方程；

(3) 限制决策变量取值范围的非负约束。

线性规划问题的一般数学模型可写为

$$\max(\min) z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{1.1}$$

$$\text{s.t}\quad \begin{aligned} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (\geqslant, =) b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (\geqslant, =) b_2 \\ & \cdots \qquad \cdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (\geqslant, =) b_m \\ & x_i \geqslant 0 \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \end{aligned}$$

1.2 图解法

只有两个决策变量的线性规划问题可以用图解法方便地求解。由于图解法有清晰的几何意义，因而它有助于对线性规划基本原理的理解。

例 1.3　用图解法求解：

$$\max S = 3x_1 + 4x_2$$

$$\text{s.t}\quad \begin{aligned} & x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ & x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \end{aligned}$$

$$x_2 \leqslant 3$$

$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$$

这里每一个约束条件都确定了一个半平面，由 $x_1 \geqslant 0$，$x_2 \geqslant 0$，可知满足约束条件的点都在第一象限内。图解法就是将满足约束条件的点在平面直角坐标系中的第一象限中表示出来，然后再从中找到满足目标函数极值要求的点。

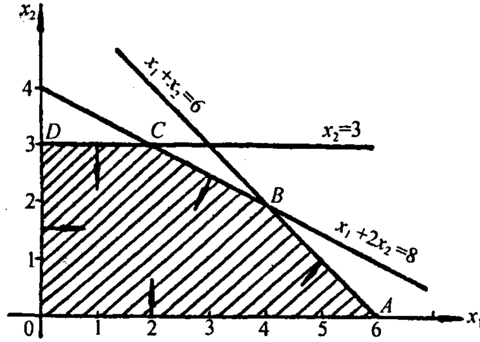

图 1.1

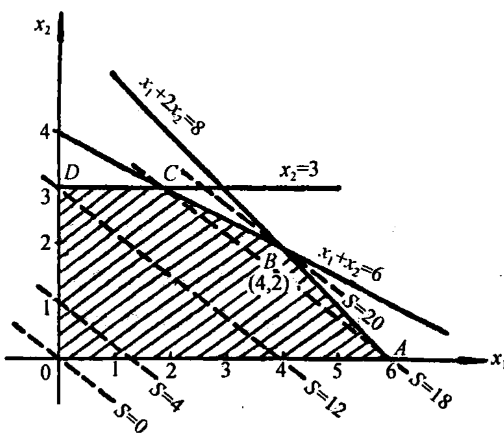

图 1.2

满足所有约束条件的点位于由 x_1 轴、x_2 轴及三条直线所围成的多边形 $OABCD$ 内(包含边界)，称为线性规划问题的可行域。其中的每一个点称为可行解。因为它们对应一个可以实际实行的方案。显然，可行域是可行解的集合，所以也称为可行解集。

在这无数多可行解中寻找最优解，要依据目标函数的图形。目标函数 $S = 3x_1 + 4x_2$ 表示一族平行直线(以 S 为参数，斜率为 $-\frac{3}{4}$)，任意取一个 S 的值，得到一条确定的直线，该直线上所有的点(x_1，x_2)都有相同的目标函数值，因而称为等值线。从图中可看出，随着直线的平行移动，越在右上方的直线，目标函数值越大，所以，这个方向是函数值增加的方向。当移到 B 点后，再移动就会移出可行域，所以，B 点所代表的解就是最优解。

点 B 是直线 $x_1 + x_2 = 6$，$x_1 + 2x_2 = 8$ 的交点，求解联立方程

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$$

得 B 点的坐标为(4，2)，代入目标函数得

$$S = 3 \times 4 + 4 \times 2 = 20$$

即当该企业生产 4 件产品甲、2 件产品乙时，一天能获得最大总利润为 20 元。

图解法的步骤：

1. 在直角坐标系中，根据约束条件，画出可行域。

2. 作出目标函数等值线，根据目标函数的类型(最大，最小)，平行移动该直线到可行域的极限位置(即将离开可行域)为止，与目标函数接触的最后的点就代表一个最优解。

3. 求出最优点的坐标，即可得“最优解”，再代入目标函数，可得问题的“最优值”。

1.3 线性规划的基本理论

1.3.1 线性规划问题解的性质

定义 1.1

(1) 满足线性规划问题所有约束条件的解称为该问题的可行解。

(2) 线性规划问题的所有可行解的集合称为线性规划问题的可行解集或可行域。

(3) 使目标函数达到极值的可行解称为线性规划问题的最优解。

凸集与极点

定义 1.2 如果集合 G 中任意两点 z_1, z_2 的连线段上的所有点都是 G 中的点,则称 G 为凸集。

由于 z_1, z_2 的连线段上的点可表示为

$\alpha z_1 + (1-\alpha)z_2 \qquad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$

因此,上述定义也可表达为

对于 G 中任意两点 z_1, z_2 都有

$$\alpha z_1 + (1-\alpha)z_2 \in G \qquad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$$

则称 G 为凸集。

在图 1.3 中,(a),(b),(c) 是凸集,(d),(e) 不是凸集。

定义 1.3 凸集 G 中满足下列条件的点 z 称为极点。如果 G 中不存在任何两个不同的点 z_1, z_2,使 z 可以表示为

$$z = \alpha z_1 + (1-\alpha)z_2 \qquad (0 < \alpha < 1)$$

也就是说,极点是不处于凸集中任何两点连线上的点。例如三角形、正方形、长方形及凸多边形的顶点。凸无界闭区域的顶点都是极点。

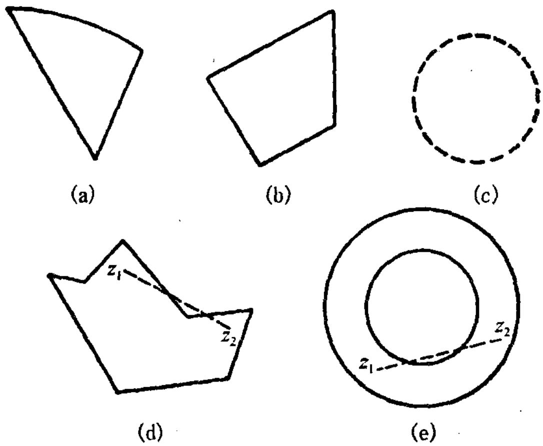

图 1.3

线性规划问题解的性质

图解法给我们以很好的启示，从而不难理解下列性质：

1. 线性规划问题的可行解集 S(若非空) 是凸集。

2. 若可行解集非空，则其极点组成的集合也一定非空。换句话说，只要存在可行解，就一定存在极点。

3. 极点的个数是有限的。

4. 若线性规划问题有最优解，则最优解一定可以在极点中找到。

上述性质，在有的教材中被列为定理，可见其重要性。事实上，它们已指出了寻求最优解的思路 —— 只需要在有限个极点中查找即可。这不仅限于图解法，也适用于一般线性规划问题。

1.3.2 基与基本可行基

线性规划的标准形式

为了方便以后的讨论，引入线性规划的标准形式。本书规定的线性规划问题的标准形式有以下特点：