高等学校专修科试用教材

高等数学 下

西南交通大学 孙乃襄 主编

铁道出版社

高等学校专修科试用教材

高　等　数　学

（下）

西南交通大学　孙乃裹　主编

西南交通大学　郭可詹
西南交通大学　黄盛清　主审

中[redacted]社

内 容 简 介

本书是高等学校工科类专修科试用教材，分上、下两册出版。上册主要包括函数、极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学和微分方程等；下册主要包括无穷级数、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学及矩阵与线性方程组等。

考虑到专修科的特点，书中编入了足够数量的例题，每章还附有小结和习题，并有部分习题的答案。

本书除作为高等学校两年制专修科或干部专修科的教材外，还可作为函授、职大、夜大的教材或教学参考书。

本书由西南交通大学孙乃褒主编、西南交通大学郭可詹、黄盛清主审，参加编写的有西南交通大学叶杏庆、杨元、余孝华等。参加审稿的还有黄克欧同志。

高等学校专修科试用教材

高等数学（下）

西南交通大学 孙乃褒 主编

中国铁道出版社出版、发行

责任编辑 李云国 封面设计 王毓平

各地新华书店经售

中国铁道出版社印刷厂印

开本：850×1168毫米 1/32 印张：10.75 字数：283 千

1988年6月第1版 第1次印刷

印数：0001—6,000册 定价：2.35 元

目　　录

第六章　无穷级数……………………………………………1
第一节　级数的概念及其基本性质……………………………1
一、级数的概念……………………………………………1
二、级数的基本性质………………………………………6
第二节　数项级数敛散性的判别法……………………………9
一、正项级数的收敛判别法………………………………9
二、非正项级数的收敛判别法……………………………13
第三节　幂 级 数………………………………………………17
一、幂级数的收敛半径……………………………………18
二、幂级数的运算性质……………………………………23
三、函数展开为幂级数……………………………………26
四、幂级数的若干应用……………………………………31
第四节　傅立叶级数……………………………………………35
一、问题的提出……………………………………………35
二、三角函数系及其正交性………………………………36
三、周期函数的傅立叶级数………………………………38
四、奇、偶周期函数的傅立叶级数………………………41
五、在〔0， 1〕上定义的函数的傅立叶级数…………44
小　　结…………………………………………………………47
习 题 六…………………………………………………………52
第七章　向量代数与空间解析几何……………………………55
第一节　向量及其线性运算……………………………………55
一、向量的概念……………………………………………55
二、向量的线性运算………………………………………56
第二节　空间直角坐标系与向量的坐标表示…………………58

一、向量在轴上的投影……………………………………………59
二、空间直角坐标系……………………………………………61
三、向量的坐标表示……………………………………………63
四、向量的模及方向余弦的坐标表示式…………………………67
第三节　向量的数量积和向量积…………………………………68
一、两向量的数量积……………………………………………68
二、两向量的向量积……………………………………………71
第四节　空间平面与直线…………………………………………74
一、空间平面……………………………………………………74
二、空间直线……………………………………………………78
第五节　空间曲面与曲线…………………………………………83
一、空间曲面……………………………………………………83
二、空间曲线……………………………………………………88
小　　结…………………………………………………………93
习 题 七…………………………………………………………96
第八章　多元函数微分学…………………………………………102
第一节　多元函数的概念…………………………………………102
一、区域…………………………………………………………102
二、多元函数的定义……………………………………………103
三、二元函数的极限与连续性…………………………………105
第二节　偏 导 数…………………………………………………109
一、偏导数的概念………………………………………………109
二、偏导数的几何意义…………………………………………112
三、高阶偏导数…………………………………………………113
第三节　全 微 分…………………………………………………115
一、全微分的概念………………………………………………115
二、全微分的几何意义…………………………………………119
三、全微分的应用………………………………………………121
*四、方向导数……………………………………………………123
第四节　多元函数的微分法………………………………………125

一、复合函数的微分法 ……………………………………125
二、隐函数的微分法 ……………………………………133
第五节 极值问题 ……………………………………135
一、二元函数的极值 ……………………………………135
二、函数的最大值与最小值 ……………………………………137
三、条件极值 ……………………………………139
四、最小二乘法 ……………………………………143
小　结 ……………………………………149
习 题 八 ……………………………………152
第九章 多元函数积分学 ……………………………………157
第一节 二重积分 ……………………………………157
一、二重积分的概念与性质 ……………………………………157
二、二重积分的计算方法 ……………………………………163
三、二重积分应用举例 ……………………………………177
第二节 三重积分 ……………………………………181
一、三重积分的概念 ……………………………………181
二、三重积分的计算方法 ……………………………………183
第三节 曲线积分 ……………………………………190
一、对弧长的曲线积分 ……………………………………190
二、对坐标的曲线积分 ……………………………………195
三、格林公式 ……………………………………200
第四节 曲面积分 ……………………………………213
一、曲面积分的概念 ……………………………………213
二、曲面积分的计算方法 ……………………………………215
三、奥——高公式 ……………………………………218
小　结 ……………………………………220
习 题 九 ……………………………………222
第十章 矩阵与线性方程组 ……………………………………227
第一节 矩阵及其运算 ……………………………………227
一、矩阵的概念 ……………………………………227

二、矩阵的基本运算 ……230
第二节　行 列 式 ……243
一、二、三阶行列式的定义和性质 ……243
二、n阶行列式 ……252
三、行列式的应用 ……260
第三节　线性方程组 ……275
一、高斯消元法 ……276
二、矩阵的秩与初等变换 ……279
三、线性方程组解的存在定理 ……284
*第四节　向量空间 ……292
一、n维向量与向量空间 ……293
二、向量的线性相关性及其判定 ……294
三、基底和坐标 ……300
四、子空间与线性方程组解的结构 ……302
小　结 ……309
习 题 十 ……313
部分习题答案 ……323

第六章　无 穷 级 数

在前面各章中，我们讨论了一元函数的主要内容：极限理论、微分学和积分学。但是，还有些遗留问题没有解决，如函数值的计算问题，虽然我们知道用泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x+x_0)^{n+1},\quad \xi \text{ 介于 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间，}$$

可以近似计算函数值。但当我们用泰勒公式右端前 $n+1$ 项作为 $f(x)$ 的近似值时，其误差为 $|R_n(x)|$，而误差 $|R_n(x)|$ 的大小不易精确估计，那么，如何简便地计算函数值并能精确地估计误差呢？又如，虽然积分 $\int_0^1\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$，$\int_0^1\cos x^2\mathrm{d}x$，$\int_0^2\sqrt{1+x^3}\mathrm{d}x$ 都存在，但如何求它们的值呢？以上这些问题的解决都有赖于无穷级数。无穷级数是用来表示函数和作数值计算的一种重要工具，在实际问题中有着广泛的应用。

本章主要讨论无穷级数的概念和性质，数项级数的收敛和发散的判别方法，以及函数展开为幂级数与傅立叶级数的展开方法。

第一节　级数的概念及其基本性质

一、级数的概念

设给定一个数列

$$a_1, \ a_2, \ a_3, \ \cdots, \ a_n, \ \cdots$$

则称式子

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots \qquad (1)$$

为无穷级数，简称级数。a_n（$n=1, 2, 3, \cdots$）称为级数（1）的项，第 n 项 a_n 也称为级数（1）的一般项。

级数（1）常简记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 或 Σa_n。

如果 a_n（$n=1, 2, \cdots$）都是常数，则称级数（1）为数项级数；如果所有这些项都是关于某个变量的函数，则称级数（1）为函数项级数。

例如，级数

$$\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\cdots+\frac{3}{10^n}+\cdots$$

是数项级数，级数

$$1+x+\frac{1}{2\cdot1}x^2+\frac{1}{3\cdot2\cdot1}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots \qquad x\in R$$

是函数项级数。

从形式上看，级数是无穷多项相加，如果一项接一项地加下去，将永远也加不完。这样的式子是否有和，如有和，如何确定它的和，显然，靠把它逐项加完来求其和是行不通的。因此，我们要从另一个角度来考虑，即以有限项的和出发运用极限方法来讨论无穷多项累加的问题。下面先通过具体例子来说明这种方法。

【例 1】考察级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{10^n}=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}\frac{3}{10^3}+\cdots+\frac{3}{10^n}+\cdots$$

是否有和。

【解】取级数的前 n 项，记

$$S_n=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\cdots+\frac{3}{10^n},$$

则

$$S_n=\frac{\frac{3}{10}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$$

因 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{10^n}=\lim_{n\to\infty}S_n$$

又 $$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)=\frac{1}{3}$$

故 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{10^n}=\frac{1}{3}$$

数$\frac{1}{3}$称为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{10^n}$的和。

从例1看到，确定一个级数是否有和以及如何确定其和的问题可以转化为确定其前n项的和S_n当$n\to\infty$时是否有极限及求其极限的问题而得到解决。一般情形也是这样。

对级数（1），依次取其第一项，取前二项之和，取前n项之和，…作出数列

$$S_1=a_1,\ S_2=a_1+a_2,\ \cdots,\ S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n,\ \cdots \tag{2}$$

数列（2）的通项$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$称为级数（1）的前n项的部分和，而数列（2）称为级数（1）的**部分和数列**。

定义 如果部分和数列（2）收敛，即$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$，则称级数（1）收敛，称极限$S$为级数（1）的和，记作

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=S,\ 或\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S$$

如果部分和数列（2）发散，则称级数（1）发散。

由定义可知，级数（1）是收否收敛及收敛时它的和是什么的问题，就是数列（2）是否收敛及收敛时它的极限是什么的问题。

反之，要研究一个数列

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots \qquad (3)$$

是否收敛及收敛时它的极限是什么，也可相应地研究级数

$$x_1+(x_2-x_1)+\cdots+(x_n-x_{n-1})+\cdots \qquad (4)$$

是否收敛及收敛时它的和是什么。这是因为级数（4）的部分和数列就是数列（3）。因此，给出级数与给出这级数的部分和数列及确定级数的敛散与求和的问题跟确定其部分和数列的敛散与求极限的问题完全是同一回事。

【例 2】讨论级数

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

的敛散性。

【解】 $S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

故所给级数收敛，其和为 1，即

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots=1$$

【例 3】考察公比为 r 的等比级数（几何级数）

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots \quad (a\neq 0) \qquad (5)$$

的敛散性。

【解】如果 $|r|\neq 1$，则

$$S_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

当 $|r|<1$ 时

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{a}{1-r}$$

即这时级数（5）收敛，其和为 $\frac{a}{1-r}$；

当$|r|>1$时，

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\infty$$

即这时级数（5）发散。

当$r=1$时，$S_n=na\to\infty$，此时级数（5）发散；

当$r=-1$时，级数为

$$a-a+a-a+\cdots$$

S_n随n为奇数或偶数而等于a或零，极限不存在，故级数（5）发散。

综合上述结果，当$|r|<1$时，级数（5）收敛；当$|r|\geqslant 1$时，级数（5）发散。

【例 4】证明调和级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

发散。

【证】首先证明不等式

$$x>\ln(1+x)\quad(x>0)$$

令
$$f(x)=x-\ln(1+x)$$

则
$$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}>0\quad(x>0)$$

故当$x>0$时，$f(x)$单调增；又$f(0)=0$，所以

$$f(x)>0\quad(x>0)$$

即
$$x>\ln(1+x)\quad(x>0)$$

例如
$$1>\ln(1+1),\ \frac{1}{2}>\ln\left(1+\frac{1}{2}\right),$$

$$\frac{1}{3}>\ln\left(1+\frac{1}{3}\right),\ \cdots$$

从而

$$\begin{aligned}S_n&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\\&>\ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)\\&+\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

$$=\ln\left(2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n}\right)$$

$$=\ln(n+1)\longrightarrow+\infty \quad (n\to\infty)$$

故 $$\lim_{n\to\infty}S_n=+\infty$$

即调和级数发散。

二、级数的基本性质

对于一个级数，如何判定它是否收敛？如果收敛，其和等于什么？这两个问题是研究级数的重要问题，而且前者比后者更为重要。这是因为若级数发散，自然就不存在求和问题；若级数收敛，而求和又较困难时，我们还可以在满足一定精度要求下，求和的近似值。工程技术中往往作这样的处理。因此解决级数敛散性的判定问题是研究级数的根本问题。但是，一般来说，级数部分和S_n的通式不易写出，因而直接按照定义来判断一个级数的敛散性是困难的。为了能更深入地研究级数敛散性的判定问题，我们先叙述级数的一些基本性质。其证明都可通过部分和数列很容易地得出。

性质 1　若级数Σa_n和Σb_n都收敛，则$\Sigma(a_n\pm b_n)$收敛，且$\Sigma(a_n\pm b_n)=\Sigma a_n\pm\Sigma b_n$。

证　因Σa_n与Σb_n收敛，可设$\Sigma a_n=A$，$\Sigma b_n=B$，记

$$S_n^{(1)}=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

$$S_n^{(2)}=b_1+b_2+\cdots+b_n$$

$$S_n^{(3)}=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)$$

则 $$\lim_{n\to\infty}S_n^{(1)}=A,\quad \lim_{n\to\infty}S_n^{(2)}=B$$

$$S_n^{(3)}=S_n^{(1)}+S_n^{(2)}$$

根据极限运算法则知

$$\lim S_n^{(3)}=\lim(S_n^{(1)}+S_n^{(2)})=A+B$$

所以级数$\Sigma(a_n+b_n)$收敛，且

$$\Sigma(a_n+b_n)=A+B=\Sigma a_n+\Sigma b_n$$

相减的情况可类似地证明。

【例 5】考察级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$的敛散性。

【解】因$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$均收敛（都为公比小于 1 的等比级数），据性质 1 知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

性质 2 若级数Σa_n收敛，则$\Sigma ka_n(k\neq 0)$收敛，且

$$\Sigma ka_n=k\Sigma a_n$$

若Σa_n发散，则Σka_n发散。即级数Σa_n与Σka_n同时收敛或同时发散。

证 记 $S_n^{(1)}=a_1+a_2+\cdots+a_n$

$S_n^{(2)}=ka_1+ka_2+\cdots+ka_n \qquad (k\neq 0)$

则 $S_n^{(2)}=kS_n^{(1)}$

显然，当$n\to\infty$时，$S_n^{(2)}$与$S_n^{(1)}$同时有极限或同时没有极限，且如果Σa_n收敛，即当$\lim\limits_{n\to\infty}S_n^{(1)}=A$时，有

$$\lim_{n\to\infty}S_n^{(2)}=\lim_{n\to\infty}kS_n^{(1)}=kA$$

即

$$\Sigma ka_n=k\Sigma a_n$$

性质 3 在级数Σa_n的前面增添或去掉有限项，不改变其敛散性。

证 设将级数Σa_k中去掉前 l 项，得一个新级数

$$a_{l+1}+a_{l+2}+\cdots+a_{l+n}+\cdots$$

记 $S_n^{(1)}=a_1+a_2+\cdots+a_l+a_{l+1}+\cdots+a_{l+n}$

$$S_n^{(2)} = a_{l+1} + a_{l+2} + \cdots + a_{l+n}$$

因此
$$S_n^{(2)} = S_n^{(1)} - (a_1 + a_2 + \cdots + a_l)$$

则当$n \to \infty$时，$S_n^{(2)}$与$S_n^{(1)}$同时有极限或同时没有极限。

同样可以证明在级数前面加上有限项不改变其敛散性。

例如
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots$$

收敛。据性质 3 可知级数

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \cdots \qquad \text{（去掉前三项）}$$

和
$$3 + 7 - 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots \qquad \text{（前面加三项）}$$

均收敛。

级数 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$发散，据性质 3 知，级数

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \qquad \text{（去掉前三项）}$$

和
$$7 + 99 - \sqrt{3} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \qquad \text{（前面加三项）}$$

均发散。

性质 3 说明：一个级数收敛还是发散，主要取决于其“尾部”的敛散性，而与其前面的任何有限项无关。

性质 4 若级数Σa_n收敛，Σb_n发散，则$\Sigma(a_n + b_n)$ 发散。即一个级数收敛，一个级数发散，则对应项相加所得级数发散。

证 反证法。假设$\Sigma(a_n + b_n)$收敛，又已知Σa_n收敛，据性质 1，级数

$$\Sigma b_n = \Sigma(a_n + b_n) - \Sigma a_n$$

收敛，这与已知条件矛盾。故$\Sigma(a_n + b_n)$发散。

【例 6】 考察级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n-1} + \frac{1}{3^{n-1}}\right]$的敛散性。

【解】 因级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$发散，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}$收敛，据性质 4 知，所给级数发散。

性质 5　如果级数Σa_n收敛，则必有$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$

证　因Σa_n收敛，可设$\Sigma a_n=S$，又

$$S_n-S_{n-1}=(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n)-(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})=a_n$$

故
$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=S-S=0$$

性质 5 说明$a_n\to 0$ $(n\to\infty)$是级数Σa_n收敛的必要条件。就是说，如果级数Σa_n不满足条件$a_n\to 0$ $(n\to\infty)$时，肯定发散。因而常利用这一条件来判定级数是发散的。但值得注意的是，条件$a_n\to 0\,(n\to\infty)$仅是级数Σa_n收敛的必要条件而不是充分条件，即满足这个条件的级数并不一定收敛。例如调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，虽然$\frac{1}{n}\to 0\,(n\to\infty)$，但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$却是发散的。

【例 7】 考察级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{2}$的敛散性

【解】 因$\sin\frac{n\pi}{2}\not\to 0\,(n\to\infty)$，故级数发散。

思　考　题

1. “由于任意多项的和$a_1+a_2+\cdots+a_n$总是存在的，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的和也总是存在的。”这种说法对吗？试举例说明。

2. 试考察以下两个级数

$$1-1+1-1+1-1+\cdots \qquad (1)$$

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots \qquad (2)$$

分别说明它们的敛散情况，并就所得结果说明级数与有限项相加有何不同。

第二节　数项级数敛散性的判别法

一、正项级数的收敛判别法

级数的各项都是非负数（零或正数）时，称为正项级数。

（一）正项级数收敛的比较判别法　设Σa_n与Σb_n是两个正项级数，且$a_n \leqslant b_n$（$n=1，2，\cdots$），

（1）如果Σb_n收敛，那末Σa_n也收敛；

（2）如果Σa_n发散，那末Σb_n也发散。

证（1）设Σb_n收敛，其和为B，注意到Σa_n，Σb_n是正项级数，则

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n \leqslant b_1+b_2+\cdots+b_n \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} b_n=B$$

所以S_n有上界，又显然S_n单调增，因而$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$存在，即$\Sigma a_n$收敛。

证（2）用反证法。假设Σb_n收敛，由已证得的结论（1）知Σa_n收敛，与假设矛盾，故Σb_n发散。

【例1】考察级数$\Sigma |\sin(n+K)|\dfrac{1}{2^n}$的敛散性。

【解】因$|\sin(n+K)|\dfrac{1}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{2^n}$，而$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$收敛，故所给级数收敛。

【例2】设p为常数，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$

称为p级数。考察p级数的敛散性。

【解】当$p=1$时，级数$\Sigma\dfrac{1}{n^p}$为调和级数，此时级数发散。

当$p<1$时，由$n^p<n$得$\dfrac{1}{n^p}>\dfrac{1}{n}$，据比较判别法知$\Sigma\dfrac{1}{n^p}$发散。

当$p>1$时，考察单调减函数$y=\dfrac{1}{x^p}$（$x>0$）（图6—1），显然，在每个小区间〔$n-1，n$〕（$n=2，3，\cdots$）上，小曲边梯形的面积大于对应的矩形的面积，即

$$\frac{1}{n^p}=1\cdot\frac{1}{n^p}<\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x^p}dx$$