恩波考研 ENBO

考研数学一本通

冲刺150分

同济大学 田根宝 编著

高分宝典！

田根宝教授是国内考研数学辅导界中为数极少的能够全程主讲的名师之一，从事辅导 20 余年来，辅导效果极佳！上海地区连续 11 年的高分状元都出自他的门下。

《数学一本通》是根据田教授 20 多年来辅导教案修订整合而成，浓缩了历年真题和模拟试题的精华。全书打破常规，从应试角度编排试题，尤其适用于实战之用。

2008

学苑出版社

恩波考研 ENBO

考研数学一本通

同济大学 田根宝 编著

学苑出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学一本通 / 田根宝编著．—2版．—北京:学苑出版社,2007.2

ISBN 978—7—5077—2744—9

Ⅰ．考…　Ⅱ．田…　Ⅲ．高等学校—研究生—入学考试—自学参考资料　Ⅳ．013

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第006922号

责任编辑:刘　涟
责任校对:张一介
封面设计:顾小平　朱　颜
出版发行:学苑出版社
社　　址:北京市丰台区南方庄2号院1号楼　100079
网　　址:www.book001.com
电子信箱:xueyuanyg@sina.com
xueyuan@public.bta.net.cn
销售电话:010—67675512、51222025
经　　销:新华书店
印 刷 厂:北京华龙印刷厂
开本尺寸:787×1092　1/16
印　　张:29.5
字　　数:944千字
版　　次:2007年2月北京第2版
印　　次:2007年2月北京第1次印刷
印　　数:0001—2500册
定　　价:37.50元

前 言

《考研数学一本通》贯穿教育部考试中心颁布的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》和考研命题要求，集考研数学之大全，融国内考研数学命题思想之精髓，是为我国广大立志报考硕士研究生的考生做到知己知彼，遇“试”不慌，顺利通过考试，又能取得高分而编写的.

本书由高等数学、线性代数、概率论与数理统计及专门为经济类考生设计的经济数学与差分方程四大板块组成，其中高等数学共分 15 部分，线性代数共分 7 部分，概率论与数理统计共分 7 部分，经济数学与差分方程共分 2 部分，每部分均有内容精要与典型例题.全书例题总数共计 1200 道.

本书的一大特色是：**打破常规，从应试角度编排试题**.全书根据考研试题类型按填空、选择、计算、证明题次序编排，在每种类型下再按大纲内容特点进行归纳(书中每一部分例题前的小标题也就是该部分题的知识点).考生通过书中每一部分例题的分布，可知研究生入学试题的分布和命题方向，看出试题的轻重缓急，以便把握考研复习的方向.

全书例题做到精炼、清晰、透彻、简单明了，便于考生理解掌握和提高分析问题、解决问题的能力.例如求极限就有函数极限与数列极限之分，且就知识面展开.书中例题是按基本概念、基本理论、基本方法的三基思想分析解答的，填空题和选择题是小计算大概念，计算题和证明题检验综合能力.

欲想考研考得好，考生必须做到多动脑、勤动手，对书中的试题反复演练，牢记题型与解题方法.

在本书编写中，由于时间仓促，若有不当之处请读者批评指正，谢谢.

田根宝

目　　录

高等数学

1 函数、极限、连续

内容精要

一、函数

1. 函数两要素：定义域与对应法则.

2. 复合函数

$y=f(u), u=\varphi(x) \Rightarrow y=f(\varphi(x))$，必须函数 y 的定义域 D_f 与函数 u 的值域 Z_φ 的交集非空，亦即 $D_f \cap Z_\varphi \neq \varnothing$.

3. 反函数

$y=f(x)$ 单调连续，则其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 存在且单调连续.

例如 $y=x^3$，则 $x=\sqrt[3]{y}$ 是其反函数. 习惯上自变量用 x. 函数用 y 表示，即 $y=\sqrt[3]{x}$ 也是 $y=x^3$ 的反函数. 但是从几何图形上看 $y=x^3$ 与 $x=\sqrt[3]{y}$ 表示同一图形. 而 $y=x^3$ 与 $y=\sqrt[3]{x}$ 关于直线 $y=x$ 对称.

函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图形一致.

函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

4. 隐函数

y 与 x 的函数关系用 $y=f(x)$ 表示时，称为显式表示的函数(显函数)，而以方程 $F(x,y)=0$ 表示的函数，称为隐式表示的函数，即 y 为 x 的隐函数.

例如 $y=\sin x$ 表示 y 是 x 的显函数，$y-\sin x=0$ 表示 y 是 x 的隐函数.

5. 基本初等函数

下面五类函数称为基本初等函数：

(1) 幂函数 x^μ.　　(2) 指数函数 $a^x, e^x, \cdots$

(3) 对数函数 $\log_a x, \ln x, \cdots$　　(4) 三角函数 $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \cdots$

(5) 反三角函数 $\arcsin x, \arccos x, \arctan x, \operatorname{arccot} x, \cdots$

基本初等函数在其定义域内连续.

6. 初等函数

由基本初等函数与常数进行有限次的四则运算及有限次复合而成的，且能用一个数学式子表示的函数称为初等函数. 例如，$y=\sin x^2$，$y=2\ln\sin x$ 等都是初等函数.

初等函数在其定义区间内连续.

7. 非初等函数(即不能用一个数学式子表示的函数)

例如 $f(x)=\begin{cases} x, & x>0, \\ \sin x, & x \leqslant 0, \end{cases}$ $\operatorname{sgn} x=\begin{cases} -1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ 1, & x>0. \end{cases}$ (符号函数)都是非初等函数.

还有狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases} 1, x\text{ 有理数}, \\ 0, x\text{ 无理数}, \end{cases}$ $[x]$——不超过 x 的最大整数(取整函数)，也都是非初等函数.

$f(x)=[x]$

8. 函数的四个特性

(1) 有界性.

① $\exists M>0$，对一切 $x\in D$ 均有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界. 且 M 为它的一个界. 界不惟一，如果 M 为 $f(x)$ 的一个界，则 $M+1, M+2, \cdots$ 也都是 $f(x)$ 的界.

② 若 $\exists M$，对一切 $x\in D$ 均有 $f(x)\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 有上界，且 M 为它的一个上界，上界也不惟一.

③ 若 $\exists N$，对一切 $x\in D$ 均有 $N\leqslant f(x)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 有下界，且 N 为它的一个下界，下界也不惟一.

(2) 单调性.

① $\forall x_1, x_2\in D$，若 $x_1<x_2$ 恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 D 上单调增，且是严格单调增. 可表示为 $f(x)\uparrow, x\in D$.

② $\forall x_1, x_2\in D$，若 $x_1<x_2$ 恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 D 上单调减，且是严格单调减. 可表示为 $f(x)\downarrow, x\in D$.

③ $\forall x_1, x_2\in D$，若 $x_1<x_2$ 恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，也称 $f(x)$ 在 D 上单调增，实际上这个函数是非减的.

④ $\forall x_1, x_2\in D$，若 $x_1<x_2$ 恒有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，也称 $f(x)$ 在 D 上单调减或非增.

(3) 奇偶性.

① $x\in(-a,a)$ 或 $[-a,a]$，若 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数，它的图形关于 y 轴对称.

② $x\in(-a,a)$ 或 $[-a,a]$，若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数，它的图形关于原点 O 对称，且 $f(0)=0$.

(4) 周期性.

$\exists T\neq 0$. 对一切 $x\in D, x+T\in D$，有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，且称 T 为 $f(x)$ 的一个周期. 一般地，函数的周期是指最小正周期. 例如 $y=\sin(x+4\pi)$，$T=4\pi$ 是 $y=\sin x$ 的周期，而函数 $y=\sin x$ 的周期一般是指 2π.

二、函数的极限与连续

1. 定义

(1) 当 $x\to x_0$ 时 $f(x)\to A$(常数)，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

(2) 精确定义.

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\overset{\text{“}\varepsilon\text{-}\delta\text{”定义}}{\Longleftrightarrow}\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \text{当 } 0<|x-x_0|<\delta \text{ 时，总有 } |f(x)-A|<\varepsilon.$$

2. 性质

(1) 极限是惟一的.

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=B$ 都存在，则 $A=B$.

此性质告诉我们在求极限时，若极限存在，则必是惟一的.

(2) 有极限的函数必有界(局部)，即

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 存在，则 $\exists M>0, \exists\delta>0$，对一切满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的 x 均有 $|f(x)|\leqslant M$. 即函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某一 δ 邻域(去心)内有界.

函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}, x\in(0,1)$，因为 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{1}{x}=2$ 存在只是说明在 $x=\dfrac{1}{2}$ 的某一 δ 邻域内是有界的，但此函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上是无界的(这是因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$).

(3) 极限保号性.

① 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$，则 $\exists x_0$ 的某一 δ 邻域(可去心)，在此邻域内 $f(x)>0$.

② 若 $f(x)>0$(或 $f(x)\geqslant 0$)，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$(存在)，则 $A\geqslant 0$.(保号性)

3. 函数极限存在的充要条件

① 函数在某点存在极限 ⇔ 在该点左、右极限存在且相等. 即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A(\text{存在})\Leftrightarrow f(0^-)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0^+)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=A(\text{存在}).$$

此性质一般用于分段函数的分界点的极限，含绝对值的极限以及 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 点的极限.

② 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A(\text{存在})\Leftrightarrow$ 任给系列 $\{x_n\}$，$\lim\limits_{x_n\to x_0} f(x_n)=A(\text{存在})$

③ 某两系列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$. 当 $\lim\limits_{x_n\to x_0} f(x_n)\neq\lim\limits_{y_n\to x_0} f(y_n)$ 时，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 必不存在.

4. 极限运算及求法

(1) 若 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$ 都存在(极限过程相同)，则

① $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$;

② $\lim f(x)\cdot g(x)=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$;

③ $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}\qquad(B\neq 0)$.

(2) 夹逼定理.

$$\begin{array}{cccc} & g(x)\leqslant & f(x)\leqslant & h(x)\\ x\to x_0 & \downarrow & \Downarrow & \downarrow\\ (\text{或 } x\to\infty) & A & A & A\end{array}$$

(3) 利用重要极限.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e},\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e},$$

这里 x 可似作小团体 $\alpha(x)$.

① 只需 $\alpha(x)\to 0$，就有

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1,\quad \lim_{\alpha(x)\to 0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}=\mathrm{e}.$$

② 若 $\alpha(x)\to\infty$，则 $\lim\limits_{\alpha(x)\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\alpha(x)}\right)^{\alpha(x)}=\mathrm{e}$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

(4) 利用洛必达法则.

① 在同一极限过程中，函数之比的形式 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$，且 $f(x)$，$g(x)$ 均可导时，则有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\!=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A(\text{有限数或 }\infty)$$

即.用洛必达求不出不能说它没有

② 当 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}\xlongequal[\frac{\infty}{\infty}]{\frac{0}{0}}\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=$ 不存在($\neq\infty$) 时，则第一步求导错了，小心，不能说明原极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不存在. 例如，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\cos x}\xlongequal{\frac{\infty}{\infty}}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\cos x}{1+\sin x}$ 不定，不能说明此极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\cos x}$ 不存在. 因为实际上

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x-\cos x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{\sin x}{x}}{1-\dfrac{\cos x}{x}}=\frac{1+0}{1-0}=1.\ (\text{因为}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0,\ |\sin x|\leqslant 1,\ |\cos x|\leqslant 1)$$

(5) 无穷小与有界变量之积仍为无穷小.

(6) 有限个无穷小的和与积都是无穷小.

(7) $$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}0, & \text{当 } m<n,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{当 } m=n,\quad (a_0,b_0\text{ 都}\neq 0).\\ \infty, & \text{当 } m>n.\end{cases}$$

5. 无穷小比较

设 $\lim f(x)=0$，$\lim g(x)=0$. (同一极限过程)

(1) 若 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}=0$,则 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小,记为 $f(x)=o(g(x))$.

(2) 若 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}=1$,则 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的等价无穷小,记为 $f(x)\sim g(x)$.

(3) 若 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}=c(\neq 0)$,则 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的同阶无穷小,记为 $f(x)=O(g(x))$.

6. 极限与无穷小之间的关系

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$(存在)$\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$,其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$.

7. 无穷大

(1) 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}} f(x)=\infty$,则 $f(x)$ 为当 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时的无穷大.

(2) 无穷小与无穷大之间关系.

在同一极限过程中,若 $f(x)$ 为无穷大,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小;反之,若 $f(x)$ 为无穷小且 $f(x)\neq 0$,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

8. 连续

(1) 定义:函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当 $|x-x_0|<\delta$ 时,总有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

(2) $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$,$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0 \Longleftrightarrow f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续.

(3) 左连续 $\Longleftrightarrow f(x_0^-)$(即 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$)$=f(x_0)$;右连续 $\Longleftrightarrow f(x_0^+)$(即 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$)$=f(x_0)$.

函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续 $\Longleftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处左右连续.

(4) 基本初等函数在其定义域内连续,初等函数在其定义区间内连续.

(5) 连续 $\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ 极限存在.

(6) 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则

① 必有最大值 M 与最小值 m,即对一切 $x\in[a,b]$,有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$.

② 必有界,即 $\exists M>0$,对一切 $x\in[a,b]$,总有 $|f(x)|\leqslant M$.

③ 介于最大值 M、最小值 m 之间的一切值均能取到.即若 $m\leqslant c\leqslant M$,则 $\exists x_0\in[a,b]$ 使 $f(x_0)=c$.(介值定理)

④ 若 $f(a)\neq f(b)$,则介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的一切值都能取到.

⑤ 根的存在定理(零点定理):若 $f(a)\cdot f(b)<0$,则 $\exists x_0\in(a,b)$ 使 $f(x_0)=0$.

9. 间断

(1) 不满足连续定义的点 $x=x_0$,称为间断点.

(2) 间断点的类型(分两类):第一类(可去、跳跃)间断点与第二类(无穷、振荡)间断点.

第一类间断点:

① 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$(存在)$\neq f(x_0)$(或 $f(x_0)$ 不存在).则称 $x=x_0$ 为第一类(可去)间断点.

② 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$(存在),$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=B$(存在).而 $A\neq B$,则称 $x=x_0$ 为第一类(跳跃)间断点.

第二类间断点:不是第一类间断点的其他间断点,即不是可去与跳跃的间断点称为第二类间断点.常见的第二类间断点有无穷间断点及振荡型间断点.

三、数列的极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists N$,当 $n>N$ 时,总有 $|x_n-A|<\varepsilon$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=A$(存在).

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=\mathrm{e}$.

(4) 夹逼定理

$$\begin{array}{ccccc} & y_n & \leqslant & x_n & \leqslant & z_n \\ & \downarrow & & \Downarrow & & \downarrow \\ n\to\infty & A & & A & & A \end{array}$$

(5) 单调有界数列必有极限. 单增上有界必有极限,单减下有界必有极限.

注 存在极限的数列称为收敛数列. 收敛数列必有界;反之不一定成立.

(6) 利用定积分求数列的极限

若 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上连续,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

(7) 利用归并原则.

求$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$. 有时可先求 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,则有$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=A$.

典型例题

一、函数

1. 填空题

例 1.1 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$,则 $f[f(x)]=$ __1__.

解 由于对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$,$f(x)=1$ 或 0. 则 $|f(x)|\leqslant 1$,故

$$f[f(x)]=\begin{cases}1, & |f(x)|\leqslant 1\\ 0, & |f(x)|>1\end{cases}=1.$$

2. 选择题

例 1.2 函数 $f(x)=x\sin x$,则 $f(x)$ [C]

(A) 当 $x\to\infty$ 时无穷大.

(B) 在$(-\infty,+\infty)$内有界.

(C) 在$(-\infty,+\infty)$内无界.

(D) 当 $x\to\infty$ 时极限存在.

解 令 $x=x_n=2n\pi+\frac{\pi}{2}$. 则 $f(x_n)=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=2n\pi+\frac{\pi}{2}$,得

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{x\to\infty}\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\infty.$$

又令 $x=x_n=2n\pi$,则 $f(x_n)=2n\pi\sin 2n\pi=0$,得

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}0=0,$$

所以 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内无界,且(A)(B)(D) 全错,而(C) 正确.

例 1.3 $f(x)=|x\sin x|\mathrm{e}^{\cos x}\quad(-\infty<x<+\infty)$,则 $f(x)$ 是 [D]

~~(A)~~ 有界函数.

(B) 单调函数.

~~(C)~~ 周期函数.

(D) 偶函数.

解 因为 $f(-x)=|(-x)\sin(-x)|\mathrm{e}^{\cos(-x)}=|x\sin x|\mathrm{e}^{\cos x}=f(x)$,所以 $f(x)=|x\sin x|\mathrm{e}^{\cos x}$ 为偶函数,$x\in(-\infty,+\infty)$,故(D) 正确.

例 1.4 函数 $f(x)$ 在其定义区间内连续的是 [A]

(A) $f(x)=\ln x+\sin x$.

~~(B)~~ $f(x)=\begin{cases}\sin x, x\leqslant 0,\\ \cos x, x>0.\end{cases}$

~~(C)~~ $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x-1, & x>0.\end{cases}$

~~(D)~~ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{|x|}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

解 $f(x)=\ln x+\sin x$ 是初等函数,在其定义区间$(0,+\infty)$内连续. 而这正是 $f(x)=\ln x+\sin x$ 的定义区域,故(A) 正确,而(B),(C),(D) 都在 $x=0$ 点间断.

例 1.5 函数 $f(x)$ 在其定义域内连续的是 [A]

(A) $f(x)=\dfrac{1}{x}$. (B) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\leqslant 0,\\ \cos x, & x>0.\end{cases}$

(C) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x-1, & x>0.\end{cases}$ (D) $\begin{cases}\dfrac{1}{|x|}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

解 (A) 中，$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 为基本初等函数，在其定义域 $x\neq 0$ 连续，而(B)，(C)，(D) 中，$x=0$ 是间断点，故(A) 正确.

例 1.6 设函数 $f(x)=x\tan x e^{\sin x}$，则 $f(x)$ 是 [B]

(A) 偶函数. (B) 无界函数. (C) 周期函数. (D) 单调函数.

解 (A) 中，因为 $f(-x)=x\tan x e^{-\sin x}\neq f(x)=x\tan x e^{\sin x}$，故 $f(x)$ 不是偶函数.

(C) 中，虽然 $\tan x e^{\sin x}$ 是周期函数，但 x 不是周期函数，从而 $f(x)=x\tan x e^{\sin x}$ 不是周期函数.

(D) 中，仅考虑 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内的 $f(x)=x\tan x e^{\sin x}$，即可确认 $f(x)$ 非单调函数. 事实上，取点 $x_1=-\dfrac{\pi}{4}$，$x_2=0$，$x_3=\dfrac{\pi}{4}$，$x_1<x_2<x_3$，有

$$f(x_1)=f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{4}\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)e^{\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\pi}{4}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}>0,$$

$$f(x_2)=f(0)=0,$$

$$f(x_3)=\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{4}e^{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}>0,$$

显然 $f(x_1)>f(x_2)$，$f(x_3)>f(x_2)$，故 $f(x)$ 不是单调函数.

若用排除法，当然只有(B) 正确，实际上，$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}x\tan x e^{\sin x}=+\infty$，故 $f(x)$ 必是无界函数.

例 1.7 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2+x, & x>0.\end{cases}$ 则 [D]

(A) $f(-x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0,\\ -(x^2+x), & x>0.\end{cases}$ (B) $f(-x)=\begin{cases}-(x^2+x), & x<0,\\ -x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$

(C) $f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2-x, & x>0.\end{cases}$ (D) $f(-x)=\begin{cases}x^2-x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$

解
$$f(-x)=\begin{cases}(-x)^2, & -x\leqslant 0\\ (-x)^2-x, & -x>0\end{cases}=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ x^2-x, & x<0.\end{cases}$$

故(D) 正确. 因为现选择题正确的是单一的，故只有(D) 正确.

例 1.8 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 则 $g[f(x)]=$ [ ]

(A) $\begin{cases}2+x^2, & x<0,\\ 2-x, & x\geqslant 0.\end{cases}$ (B) $\begin{cases}2-x^2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

(C) $\begin{cases}2-x^2, & x<0,\\ 2-x, & x\geqslant 0.\end{cases}$ (D) $\begin{cases}2+x^2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

解 最简单做法是

$$g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x), & f(x)\leqslant 0\\ f(x)+2, & f(x)>0\end{cases}=\begin{cases}2+x, & x\geqslant 0,\\ x^2+2, & x<0.\end{cases}$$

(因为欲使 $f(x)\leqslant 0$，必须取 $x\geqslant 0\Rightarrow f(x)=-x\leqslant 0$，欲使 $f(x)>0$，必须取 $x<0\Rightarrow f(x)=x^2>0$)

故(D) 正确.

例 1.9 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$ 则 $f[f(f(x))]$ 等于 [ ]

(A) 0. (B) 1.

(C) $\begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$ (D) $\begin{cases} 0, & |x| \leqslant 1, \\ 1, & |x| > 1. \end{cases}$

解 因为 $f(x)=1$ 或 0，所以 $|f(x)| \leqslant 1$. 从而 $f(f(x))=1$，又 $f[f(f(x))]=f(1)=1$，故(B)正确.

注 此题要求读者会计算复合函数.

左端点有极限值.

例 1.10 函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 的有界区间是 [ ]

(A) $(-1,0)$. (B) $(0,1)$. (C) $(1,2)$. (D) $(2,3)$.

解 只有(A)正确. 因为 $f(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 内连续，且

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\frac{-\sin 3}{2\cdot 3^2}$$

为有限值，

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\frac{\sin 2}{-4}$$

为有限值，所以 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 内有界.

而(B)中，虽然 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续，但 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\infty$.

在(C)中，$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\infty$. 在(D)中，$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\infty$.

即 $f(x)$ 在区间(B)，(C)，(D)是无界的. 故(A)正确.

注 本题要求读者会鉴别有界函数与无界函数.

3. 计算题

例 1.11 已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f(\varphi(x))=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$. 求 $\varphi(x)$，并写出它的定义域.

解 $f(\varphi(x))=e^{\varphi^2(x)}=1-x$，得 $\varphi^2(x)=\ln(1-x)\geqslant 0$，故 $1-x\geqslant 1$，即 $x\leqslant 0$. 又 $\varphi(x)\geqslant 0$(已知)，故

$$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)},\ x\leqslant 0.$$

注 本题要求会求反函数以及反函数的定义域.

二、函数的极限与连续

1. 填空题

1) $\dfrac{0}{0}$ 未定型

例 1.12 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$ ______.

$x\to 0$, $\ln(1+x)\sim x$.

解 方法 1 先利用等价替换后利用洛必达法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin x}=2.$$

方法 2 利用等价替换

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{x^2}{2}}=2.$$

方法 3 直接使用洛必达法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\ln(1+x)+x}{\sin x}\cdot\frac{1}{1+x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\ln(1+x)+x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)+1+1}{\cos x}=\frac{2}{1}=2.$$

例 1.13 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{e^x-\cos x}=$ $\underline{\ \frac{1}{2}\ }$.

不能两同数比

$=\dfrac{[1+(-x^2)]^{\frac{1}{2}}-1}{\cos x-e^x}=\dfrac{\frac{1}{2}(-x^2)}{\cos x-e^x}=\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{e^x-\cos x}=\dfrac{x}{e^x+\sin x}=\dfrac{1}{e^x+\cos x}=\dfrac{1}{2}.$

解 方法1 直接使用洛必达法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{e^x-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{e^x+\sin x}=\frac{0}{1}=0.$$

方法2 先使用等价替换，然后使用洛必达法则.

由 $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x(x\to 0)$，有 $1-(1+x)^\alpha\sim-\alpha x(x\to 0)$，所以

$$1-\sqrt{1-x^2}=1-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\sim-\left[\frac{1}{2}(-x^2)\right]=\frac{1}{2}x^2\quad(x\to 0),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{e^x-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{e^x-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x+\sin x}=\frac{0}{1}=0.$$

例 1.14 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$ ________.

解 此题注意技巧，虽是 $\frac{0}{0}$ 型，直接使用洛必达法则会使解题困难，甚至会得出错误结论. 若用洛必达法则，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}\right)'}{((1+\cos x)\ln(1+x))'}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos x+2x\cos\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}}{-\sin x\ln(1+x)+(1+\cos x)\frac{1}{1+x}},$$

此时 $x\to 0$ 时分母 $\to 2$，但分子极限不存在，这时若写原题极限不存在就错了.

应用洛必达法则必须注意以下几点：

(1) 必须是 $\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$ 类型的未定式.

(2) 分子、分母必须可导.

(3) 分子、分母各求导以后的极限必须存在或 ∞ 时洛必达法则才适用，否则不能应用洛必达法则.

此题不满足(3)，故不能应用洛必达法则.

正确做法：

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{x}=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x}{x}+\lim_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}\right]$$

$$=\frac{1}{2}(3+0)=\frac{3}{2}.$$

例 1.15 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$ ________.

解 此题(分子不能使用等价替换)是 $\frac{0}{0}$ 型，一般直接先使用洛必达法则，即

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}$$ →可以代入0.

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{(1-x)-(1+x)}{x(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{x(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})}=\frac{1}{4}\cdot\frac{-2}{2}=-\frac{1}{4}.$$

(或对 $\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}$ 再使用一次洛必达法则即

原式 $=\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}=\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}\right)=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$)

例 1.16 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=$ ________.

解 注意极限过程是 $x\to1$，故它是 $\frac{0}{0}$ 型，先分子有理化即可.

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=\lim_{x\to1}\frac{(3-x)-(1+x)}{(x^2+x-2)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to1}\frac{2-2x}{x^2+x-2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{x\to1}\frac{-1}{2x+1}=-\frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

例 1.17 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}=$ ________.

解 $x\to0$ 时，分母 $\ln(1+2x^3)\sim2x^3$；分子 $\arctan x\sim x$，但 $\arctan x-x\nsim x-x$.

$$\lim_{x\to0}\frac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}=\lim_{x\to0}\frac{\arctan x-x}{2x^3}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1}{6x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-x^2}{6x^2(1+x^2)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-1}{6(1+x^2)}=-\frac{1}{6}.$$

注 求极限时，能等价替换的先等价替换，然后使用洛必达法则.

2) $\frac{\infty}{\infty}$ 未定型

例 1.18 $\lim\limits_{x\to+0}\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}=$ ________.

解 方法 1 变量替换，再应用洛必达法则

$$\lim_{x\to+0}\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}\xlongequal{\text{令}\frac{1}{x}=t}\lim_{t\to+\infty}\frac{1-e^t}{\frac{1}{t}+e^t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t(1-e^t)}{1+te^t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t-te^t}{1+te^t}$$
$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{1-e^t-te^t}{e^t+te^t}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{e^t+te^t}-1\right)=-1.$$

方法 2 直接目测. $\frac{\infty}{\infty}$ 型中分母分子中都含有 $e^{\frac{1}{x}}$，看它们的系数之比为 -1.

3) 1^∞ 未定型

例 1.19 $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$ ________.

解 1^∞ 型，利用 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$，得

$$\lim_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{6x}{\sin x}}=e^6.$$

例 1.20 设 a 为非零常数，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=$ ________.

解 1^∞ 型，利用重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$. 但此例括号中不含有 1，可利用“加 1 减 1 法”，即

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+a}{x-a}-1\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2ax}{x-a}}=e^{2a}.$$

例 1.21 若 $a>0,b>0$ 均为常数，则

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}=\text{________}.$$

解 1^∞ 型(解法同上例)

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{a^x+b^x}{2}-1\right)^{\frac{3}{x}}=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{a^x+b^x-2}{2}\right)^{\frac{3}{x}}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{3(a^x+b^x-2)}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{3}{2}(a^x\ln a+b^x\ln b)}=e^{\frac{3}{2}\ln ab}=(ab)^{\frac{3}{2}}.$$

例 1.22 $\lim\limits_{x\to0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}=$ ________.

解 $$\lim_{x\to0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2\ln(1+x)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{x}}=e^2.$$

例 1.23 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=$ ________.

解 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\ln(1+x^2)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$.

$x\to 0$ 时，$\ln(1+x^2)\sim x^2$，$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$.

注 以上例题注意重要极限的特点 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$，$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

4) $0\cdot\infty$ 未定型

例 1.24 $\lim\limits_{x\to+0}x\ln x=$ ________.

变形后
再用洛达

解
$$\lim_{x\to+0}x\ln x\xlongequal{0\cdot\infty}\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\xlongequal{\frac{\infty}{\infty}}\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to+0}x=0.$$

例 1.25 $\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x=$ ________.

解 先化成 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 才能使用洛必达法则或用其他方法.
$$\lim_{x\to 0}x\cot 2x=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 2x}\cdot\cos 2x\xlongequal{\text{等价替换}}\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

5) $\infty\cdot 0$ 未定型

例 1.26 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\sin\dfrac{2}{x}=$ ________.

解 方法 1 此题尽量化成 $\dfrac{0}{0}$. 利用变量替换
$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{5x+3}\sin\frac{2}{x}\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\lim_{t\to 0}\frac{\frac{3}{t^2}+5}{\frac{5}{t}+3}\sin 2t=\lim_{t\to 0}\frac{3+5t^2}{5t+3t^2}\sin 2t$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{(3+5t^2)\sin 2t}{5t+3t^2}=3\lim_{t\to 0}\frac{2t}{t(5+3t)}=\frac{6}{5}.$$

方法 2 先利用等价替换
$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{5x+3}\sin\frac{2}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{(5x+3)}\cdot\frac{2}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+10}{5x^2+3x}=\frac{6}{5}.$$

例 1.27 $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=$ ________.

解 此题类型一时难定，可先通分，然后化成 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$.
$$\lim_{x\to 0}\cot x\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\sin x}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin^2 x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{3x^2}=\frac{1}{6}.$$

例 1.28 $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sin\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)-\sin\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]=$ ________.

解 方法 1 此题除尽力化为 $\dfrac{0}{0}$ 型外，还需注意三角公式
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$
$$\lim_{x\to\infty}x\left[\sin\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)-\sin\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\lim_{t\to 0}\frac{\sin\ln(1+3t)-\sin\ln(1+t)}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{2\cos\frac{\ln(1+3t)+\sin(1+t)}{2}\sin\frac{\ln(1+3t)-\ln(1+t)}{2}}{t}.$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{2\cdot\dfrac{\ln(1+3t)-\ln(1+t)}{2}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+3t)-\ln(1+t)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{3}{1+3t}-\frac{1}{1+t} = 3-1 = 2.$$

方法 2　先令等量替换,后利用洛必达法则会很繁,读者自己练一练.

例 1.29　$\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{2x}{x^2+1} =$ ________.

解　$\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{2x}{x^2+1} \xlongequal{\infty\cdot 0} \lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\dfrac{2x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2}{x^2+1} = 2.$

注　本题需注意方法,会使用等价无穷小替换,才能简便.

6)"$\infty-\infty$"未定型

例 1.30　$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right) =$ ________.

解　"$\infty-\infty$"型,尽可能化为$\dfrac{0}{0}$,注意先等价替换然后使用洛必达法则.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^2\tan x} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

7) ∞^0 未定型

例 1.31　$\lim\limits_{x\to +0}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x} =$ ________.

解　因为它不是 1^∞ 型未定式,而是 ∞^0 型未定式,可利用公式 $N = e^{\ln N}$.

$$\lim_{x\to +0}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x} = \exp\left(\lim_{x\to +0}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}\right) = \exp\left(\lim_{x\to +0}\tan x(-\ln\sqrt{x})\right) = \exp\left(-\lim_{x\to +0} x\cdot\frac{1}{2}\ln x\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\lim_{x\to +0} x\ln x\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\lim_{x\to +0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}\right)$$

$$= \exp\left(\frac{1}{2}\lim_{x\to +0} x\right) = e^0 = 1.$$

注　求极限时应注意类型.

8) 确定未知常数(函数连续性中常见的题目)

例 1.32　设 $f(x) = \begin{cases} a+bx^2, & x\leqslant 0, \\ \dfrac{\sin bx}{x}, & x>0, \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则常数 a 与 b 应满足的关系是________.

解　函数在一点连续,必须在该点左右连续,即

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(a+bx^2) = a = f(0),$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin bx}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{bx}{x} = b = f(0),$$

故

$$a = b.$$

例 1.33　设函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0, \\ ae^{2x}, & x\leqslant 0. \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a =$ ________.

解

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-\tan x}{\dfrac{x}{2}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{\dfrac{x}{2}} = -2,$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} ae^{2x} = a = f(0),$$

由于
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0),\text{故 } a = -2.$$

注 一点连续 $\Leftrightarrow$ 左、右连续.

例 1.34 设 $f(x)=\begin{cases} x^{\lambda}\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 其导函数在 $x=0$ 处连续,则 λ 的取值范围是________.

解 因为 $f(x)$ 的导函数存在,所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处必连续.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^{\lambda}\cos\frac{1}{x} = f(0) = 0,$$

故 $\lambda > 0$. 又

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{\lambda}\cos\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x^{\lambda-1}\cos\frac{1}{x} = A(\text{存在}),$$

故 $\lambda > 1$,从而得 $A=0$. $\therefore f'(0)=0$.

故
$$f'(x)=\begin{cases}\lambda x^{\lambda-1}\cos\dfrac{1}{x} - x^{\lambda-2}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

又由导函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续,得

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\left(\lambda x^{\lambda-1}\cos\frac{1}{x} - x^{\lambda-2}\sin\frac{1}{x}\right) = f'(0) = 0.$$

故 $\lambda - 2 > 0$(利用无穷小乘上有界变量仍为无穷小),即 $\lambda > 2$.

例 1.35 设函数 $f(x)$ 有连续的导函数,$f(0)=0$ 且 $f'(0)=b$.

若函数 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+a\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ A, & x=0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则常数 $A=$________.

解 $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

方法 1 利用 $f(x)$ 是有连续的导函数,即 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} F(x) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)+a\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}[f'(x)+a\cos x]\\ &= f'(0)+a = b+a = F(0) = A,\end{aligned}$$
$$A = a+b.$$

方法 2 利用 $f(0)=0$ 及 $x=0$ 点导数的定义.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} F(x) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)+a\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{a\sin x}{x}\\ &= f'(0)+a = b+a = F(0) = A,\end{aligned}$$
$$A = a+b.$$

例 1.36 已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x + e^{2ax}-1}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0,\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,则 $a=$________.

解 因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处显然连续.

方法 1 利用洛必达法则.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x + e^{2ax}-1}{x} = \lim_{x\to 0}(2\cos 2x + 2ae^{2ax}) = 2+2a = f(0) = a,\text{得 } a=-2.$$

方法 2 利用函数和的极限运算法则,若两个极限都存在,可拆开计算.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x + e^{2ax}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{e^{2ax}-1}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{2ax}{x} = 2+2a = f(0) = a,\text{得 } a=-2.\end{aligned}$$