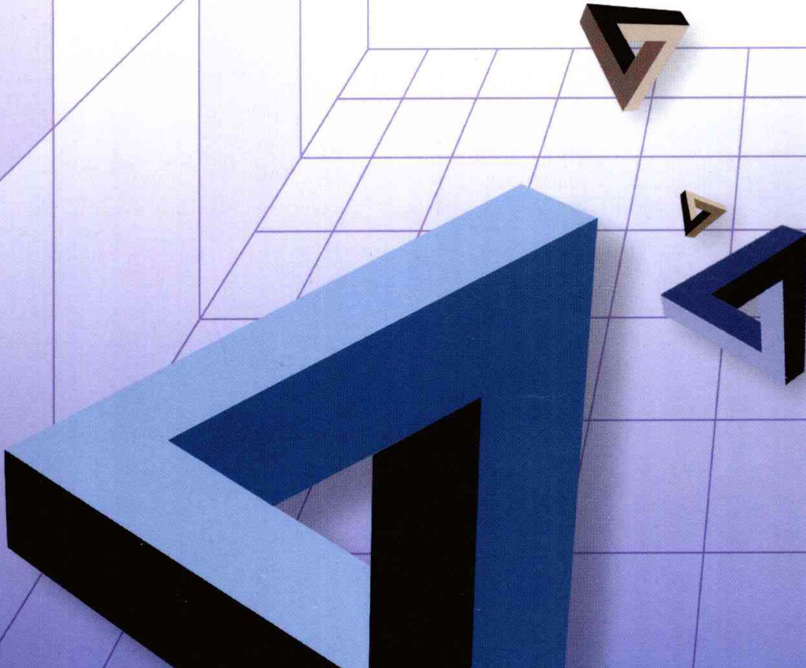
数学建模简明教程

SHUXUE JIANMO
JIANMING JIAOCHENG

主　编　胡青龙　朱新霞



四川大学出版社

数学建模
简明教程

SHUXUE JIANMO
JIANMING JIAOCHENG

主　编　胡青龙　朱新霞
副主编　辛邦颖　柳　刚
参　编　许建琼　黄胜利　郑发平

四川大学出版社

责任编辑:廖庆扬
责任校对:段悟吾
封面设计:墨创文化
责任印制:李　平

图书在版编目(CIP)数据

数学建模简明教程 / 胡青龙，朱新霞主编. —成都：四川大学出版社，2009.3
ISBN 978-7-5614-4264-7

Ⅰ.数…　Ⅱ.①胡…②朱…　Ⅲ.数学模型-高等学校-教材　Ⅳ.022

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 026916 号

书名　数学建模简明教程

主　　编	胡青龙　朱新霞
出　　版	四川大学出版社
地　　址	成都市一环路南一段 24 号 (610065)
发　　行	四川大学出版社
书　　号	ISBN 978-7-5614-4264-7
印　　刷	四川大学印刷厂
成品尺寸	140 mm×202 mm
印　　张	7.125
字　　数	178 千字
版　　次	2009 年 3 月第 1 版
印　　次	2009 年 3 月第 1 次印刷
印　　数	0 001～2 000 册
定　　价	20.00 元

◆读者邮购本书,请与本社发行科联系。电话:85408408/85401670/85408023　邮政编码:610065
◆本社图书如有印装质量问题,请寄回出版社调换。
◆网址:www.scupress.com.cn

前　言

最近几十年，随着各种科学技术的发展，尤其是计算机技术的发展，数学正以其神奇的魅力进入各种领域。它的功效显著，其解决问题的卓越能力甚至使它渗透到一些非物理领域，诸如交通、生态、社会学等。数学作为一种"技术"，日益受到人们的重视。

在新的形式下，大学的数学教学也面临着改革。为了使大学毕业生尽快适应工作岗位，能够较好地解决各种实际问题，大学数学课程的设置不能仅仅只是教会学生们一些数学的定理和方法，更重要的是，要教会他们怎样运用手中的数学“武器”去解决实际问题，这便是数学建模这门课程的目的。作为一门新型学科，数学建模日益焕发出其独特的魅力。

本书是编者在为我校大学生开设的数学模型课程而编写的讲义的基础上形成的，是指导学生参加数学建模竞赛的实践经验总结。因而本书不但可作为数学建模课程的教材，也可作为备战建模竞赛的实战培训材料。书中较系统地介绍了数学建模的一般方法、一般理论、一般技巧，对于提高和增强读者的素质和能力都有一定作用。本书在编写过程中力求简练明了，使读者从实际问题的建模及解决中抓住主要的思想。另外本书注重数学知识应用性与趣味性的结合，书中所选问题既有实际性又有趣味性，从而使数

学的实用性比较容易被读者接受。本书共七章,在编排上本着从建模方法进行编排的原则,力求由简到繁;考虑到书中模型不能全部讲授完,部分模型可作为学生思考题,故本书较少安排习题。

本书由工程技术系系主任胡青龙副教授统稿并负责总体筹划,朱新霞负责具体工作的开展及实施;辛邦颖也给予了很大的帮助;柳刚、许建琼、黄胜利、郑发平参加了本书的编写工作。具体如下:第一、二、四章由朱新霞、辛邦颖、许建琼、郑发平编写;第三章由朱新霞、黄胜利、郑发平、柳刚编写;第五、六章由胡青龙、朱新霞编写;第七章由柳刚、黄胜利编写。

本书的编写得到四川大学数学学院博士生导师黄南京教授的悉心指导,得到四川大学出版社的大力支持,本书才得以顺利出版,在此一并致谢。同时向所有参考文献的作者致谢。

编　者

2008年11月11日

目 录

第 1 章　数学模型与数学建模

近半个世纪以来，随着现代科学技术的迅猛发展，数学已不再单纯是数学家、天文学家、物理学家等人手中的必备工具，它已深入地应用到各行各业之中. 数学不仅仅作为一种工具和手段，而日益成为一种“技术”参与到实际问题中，特别是在计算机技术广泛普及的今天，数学的应用更是得到突飞猛进的发展. 数学建模正是运用数学知识，用定性和定量的方法来对实际问题建立一个完整的模型，再在此模型的基础上对实际问题进行理论求解、分析和研究.

1.1　数学模型

1.1.1　模　型

模型在我们生活中无处不在，厂家和经理们要建立生产与销售模型；敌对双方在某地区作战时，都务必要有这个地区的主体作战模型；出差到外地总要买一张当地的交通图；编计算机程序要先绘框图、写算法；进入科技展厅，我们会看到水电站模型、人造卫星模型等. 因此对于模型我们并不陌生，这里的模型均是针对原型而

言的，所谓原型，是指人们在现实世界里所关心、研究或从事生产管理的实际对象.

在日常生活中，我们经常遇到各种各样的实物模型，如大坝模型、交通模型、战争模型等，也会遇到用文字、符号、图表、公式描述客观事务的某些特征和内在联系的模型，如模拟模型、数学模型等. 模型就是为了某个特定目的将原型的某一部分信息简缩提炼而构造的原型的替代物，因而其有如下特点：

(1)它是客观事物的模拟或抽象. 它的一个重要作用就是加深人们对客观事物如何运行的理解，为了使模型成为帮助人们合理进行思考的一种工具，因此要用一种简化的方式来表现一个复杂的系统或现象.

(2)为了能协助人们解决问题，模型必须是所有研究系统的基本特征或要素. 此外，还应包括决定其原因和效果的各个要素之间的相互关系.

显然，模型并不是原封不动的复制品，不是原型简单的模拟，而是人们为了认识和理解原型而对它所作的一个抽象，一个深化；原型有各个方面和各种层次的特征，而模型仅反映与某种目的有关的那些方面和层次.

模型的特征如下：

(1)实践性：有实际背景，有针对性，要接受实践的检验.

(2)应用性：注意实际问题的要求，强调模型的实用价值.

(3)综合性：各学科知识的综合.

1.1.2 数学模型与数学建模

近年来，数学模型(Mathematical Model)与数学建模(Mathematical Modeling)这两个术语使用的频率越来越高，什么是数学模型？什么是数学建模？

所谓数学模型，简言之就是通过抽象和简化，使用数学语言对

实际现象的一个近似刻画，以便于人们更深刻地认识所研究的对象. 数学模型也不是对现实世界的简单模拟，而是人们用以认识现实世界和解决实际问题的工具. 它使用数学语言精确地表达对象的内在特征，利用计算机有效地得出结论. 对于数学模型，它具有如下特征：

(1)数学模型不是神秘事物，很久以来一直伴随在你我身边. 如用数学语言近似刻画实际问题、数学物理方程、导数、积分、统计学等都有很好的数学模型.

(2)数学模型是运用数学来解决实际问题的桥梁. 它的分析和研究过程主要应用数学的理论方法. 但数学模型不是数学应用题，不能认为数学模型就是套公式的问题.

(3)数学模型要接受实践的检验. 建立模型的目的是要研究和解决实际问题，数学模型是经过简化和抽象得到的，尽管这个数学模型的建立过程中的逻辑推导准确无误，并不意味着模型是成功的，它必须接受实践的检验，只有经检验被认可的模型才可能被应用.

创建一个数学模型的全过程称为数学建模，即运用数学语言、方法去近似地刻画某一实际问题，并加以解决的全过程.

为解决一个实际问题，建立数学模型是一种有效的方法. 下面考虑一个十字路口的交通问题——为使该地段交通顺畅，需设计一个最佳交通流控制方案(是否设置单行道，是否限制载重车同行等).

一种选择是将几个不同设计方案交给交通警，让他们尝试运行，从中找出最优方案. 显然，这种实验方法费时费力，执行起来困难，而且极有可能造成该十字路口和临近区域交通混乱. 另一种选择是将这个问题提交公路交通研究室. 研究人员搜集必要的数据，如通行车辆的速度、大小、机动性，交通流的密度，十字路口的结构等等，接着利用数学和统计学的知识进行分析，提炼出这些变量之

间的必要的关系式，通过对结果的检验与分析，确定出几种设计方案中的最优的一种. 研究者们建立的十字路口交通流模型就是一个数学模型，用它可以评估类似的交通流控制方案，其他人也可以用这个模型开展工作.

建立数学模型需要哪些步骤并没有固定的模式，下面只是按照一般的情况，提出一个建立模型的大体过程.

1. 建模准备

要了解问题的实际背景，明确建立模型的目的，掌握对象的各种信息、数据等，弄清实际对象的特征、关系. 在这一步骤中还需要查阅大量资料，请教相关专家，以便对问题有透彻的了解.

2. 模型假设

根据实际对象的特征和建模的目的，对问题进行必要的简化，并且用精确的语言作出假设. 如果假设过于详细，试图把复杂的实际现象的各个因素都考虑进去，则可能使你很难继续下一步的工作. 因此，在假设中要善于辨别问题的主要和次要方面，抓住主要因素，抛弃次要因素，尽量将问题简单化、线性化，这一步是建立模型的关键. 如果假设合理，则模型与实际问题比较吻合；如果假设不合理，则模型与实际问题不一定吻合，需进一步修改假设、修改模型. 不同的假设会得到不同的模型.

3. 建立模型

根据所作出的假设，用适当的数学工具，建立各个量之间的等式或不等式关系，列出表格、画出图形或确定其他数学结构.

4. 模型求解

对于建立的不同模型，在数学上有不同的求解方法，包括解方程、画图形、证明定理及逻辑运算等. 通常会用到传统的和现代的数学方法，特别是计算机技术.

5. 模型分析

对求得的模型结果进行数学上的分析. 有时根据问题的性质，分析各变量之间的依赖关系或稳定状态；有时根据所得结果，给出数学上的预测；有时则给出数学上的最优决策或控制.

6. 模型检验

这一步是把结果应用到实际对象中，用实际对象、数据等检验模型的合理性和实用性. 显然，这一步对模型的成败是必不可少的，但有的模型不能检验，如核战争模型.

7. 模型的修改

若检验结果不符合或部分不符合实际情况，那么我们就必须回到建模之初，修改补充假设，保留合理变量，增减约束条件，改变函数关系等.

8. 模型应用

数学模型应用非常广泛，已经渗透到各个领域. 由于建模是预测的基础，而预测又是决策与控制的前提，因此，数学模型对许多部门的实际工作有指导意义. 如节省开支、减少浪费、增加收入，对促进科学技术及工农业生产的发展具有重要的意义.

1.2　数学建模的基本方法

为了弄清实际系统的动态特征和达到某个目标进行优化决策，首先必须建立实际系统的数学模型，这个对实际系统建立数学模型的工作，我们称之为建模. 实际建模的指导思想是：在模型的简化和分析结果的准确之间作适当的折中.

1.2.1　建模的基本方式

建模的基本方式可分为三类：统计分析、机理分析和系统

分析.

1. 统计分析方法建模

统计分析法是指人们一时得不到事物的特征机理,便通过测试得到一串数据,再利用数理统计知识对这串数据进行处理,从而得到最终的数学模型.这种建模方式的特点在于并不要求清楚地了解系统内部的机理和各个环节的耦合形式,而是着眼于以整体效果来考察系统.这种方法更适合于建立复杂系统的模型,有人把这种建模方式称为"黑箱"识别法.

2. 机理分析方法建模

机理分析法是指人们根据客观事物的特征,分析其内部的机理,弄清因果关系,再适当地简化假设,利用合适的数学工具得到描述事物特征的数学模型.这种方法建立的模型常有明确的物理或现实意义.

3. 系统分析方法建模

系统分析是20世纪40年代为解决人类生活和社会系统中不断涌现出的复杂难题而发展起来的一种以人为中心的、服务于管理决策的科学和艺术.系统分析是系统方法中的一个重要内容,它与系统工程、系统管理一起,与有关专业知识和技术相结合,综合应用于解决各个领域中的规划、设计和管理等问题.系统分析是一种决策辅助技术,它采用系统方法对所研究的问题提出各种可行的方案或策略,进行定性和定量的分析和评价,帮助决策者选择行动方案.

1.2.2 建模要点

(1)明确研究目标,力图从实际问题中归纳出所采用的假设和解题线索.

(2)用假设简化问题,在实际与数学简化之间选择恰当的平衡

点，这是建模成功与否的关键，体现了建模工作的想象力和创造力.

(3)进行正确的推理，在无法进行严格的数学推导时，可以使用"不严格"的数学，代之以对问题的分析、归纳、类比、猜测、尝试、事后检验.

(4)尽量使用实际资料检验数学结果，并用恰当的学科语言表达数学结果.

(5)在建模中，数学绝不仅仅是工具，要从所作的数学推导和所得到的数学结论中指出所包含的更一般的、更深刻的内在规律.数学建模绝不仅仅以应用数学解决一个实际问题为目标，我们更希望揭示基本自然规律，产生新的数学思想和方法.

1.2.3　建模举例

数学建模是用数学语言对实际问题的一个近似描述，以便于人们用数学方法研究实际问题.

下面给出几个数学建模的例子，重点说明：

(1)如何作出合理的、简化的假设.

(2)如何选择参数、变量，用数学语言确切地表述实际问题.

(3)如何利用模型的结果解决或解释实际问题，或根据实际情况改进模型.

例 1.2.1(牛顿定律)　假设：

(1)物体的质量为 m，忽略物体的大小和形状.

(2)没有阻力、摩擦力及其他外力，只有沿物体运动方向的作用力 F.

引入变量 $x(t)$ 表示在 t 时刻物体的位置，则受力物体满足牛顿定律.

例 1.2.2(哥尼斯堡七桥问题)　能否从某地出发，通过每座桥恰好一次回到原地?

由 4 个结点、7 条边组成的图构成解决这个问题的数学模型.

例 1.2.3(管道包扎)　用带子包扎管道,使带子全部包住管道,且用料最省.

假设:

(1)管道为直圆管,粗细一致.

(2)带子等宽,无弹性.

(3)带宽小于圆管截面周长.

(4)为省工,用缠绕的方法包扎管道.

参量与变量:W 为带宽,C 为圆管截面周长,θ 为倾斜角.

(倾斜角)包扎模型:$W=C\sin\theta$.

(截口)包扎模型:$|OB|=\sqrt{C^2-W^2}$.

进一步问,如果知道直圆管道的长度,用缠绕的方法包扎管道,需用多长的带子?

设管道长为 L,圆管截面周长为 C,带子宽为 W,带子长为 M.

带长模型:$M=\dfrac{LC}{W}+\sqrt{C^2-W^2}$.

思考:

1. 若 $L=30$ m,$C=50$ cm,$W=30$ cm,则最少要用多长的带子才能将管道缠绕包扎上?

2. 现有带长 $M_1=51$ m,计划将这条带子全部用来缠绕包扎上面的管道. 缠绕时允许带子互相重叠一部分,应该如何包扎这根管道?(计算结果精确到 0.001)

例 1.2.4(交通路口红绿灯问题)　十字路口绿灯亮 30 s,最多可以通过多少辆汽车?

假设:

(1)车辆相同,从静止开始做匀加速运动.

(2)车距相同,启动延迟时间相等.

(3)直行,不拐弯;单侧,单车道.

(4)秩序良好,不堵车.

参数与变量:车长为 L,车距为 D,加速度为 a,启动延迟为 T,在时刻 t 第 n 辆车的位置为 $S_n(t)$.

用数轴表示车辆行驶道路,数轴的正向为汽车行驶方向,数轴原点为红绿灯的位置. 于是,当 $S_n(30)>0$ 时,表明在第 30 s 第 n 辆车已通过红绿灯;否则,结论相反.

模型:

(1)停车位模型:$S_n(0)=-(n-1)(L+D)$.

(2)启动时间模型:$t_n=(n-1)T$.

(3)行驶模型:$S_n(t)=S_n(0)+\frac{1}{2}a(t-t_n)^2, t>t_n$.

参数估计:$L=5$ m,$D=2$ m,$T=1$ s,$a=2$ m/s.

解　由

$$S_n(30)=-7(n-1)+(30-(n-1))^2>0,$$

得 $n\leqslant 19$,且 $t_{19}=18<30=t$ 成立.

结论:最多 19 辆车通过路口.

改进:考虑到城市车辆的限速,在匀加速运动启动后,达到最高限速则停止加速,按最高限速运动穿过路口.

最高限速:校园内 $v^*=15$ km/h$=4$ m/s,

长安街上 $v^*=40$ km/h$=11$ m/s,

环城路上 $v^*=60$ km/h$=17$ m/s.

取最高限速 $v^*=11$ m/s,达到最高限速时间为

$$t_n^*=\frac{v^*}{a}+t_n=5.5+n-1.$$

限速行驶模型:

$$S_n(t)=S_n(0)+\frac{1}{2}a(t_n^*-t_n)^2+v^*(t-t_n^*),\quad t>t_n^*.$$

$S_n(t)=S_n(0)+\frac{1}{2}a(t-t_n)^2,\quad t_n^*>t>t_n.$

$S_n(t)=S_n(0),\quad t_n>t.$

解

$S_n(30)=-7(n-1)+(5.5)^2+11(30-5.5-(n-1))>0.$

得 $n\leqslant 17$,且

$$t_{17}^*=5.5+16=21.5<30=t$$

成立.

结论:该路口最多通过 17 辆汽车.

思考:

1. 调查一个路口有关红绿灯的数据验证模型是否正确.

(1)调查的位置,走向,车道数,时间.

调查数据(至少三次):绿灯时间,通过的车数.分析数据不同的原因.

(2)分析模型的假设与实际是否一致,模型的参数与实际是否一致.

(3)分析模型的计算结果与观测结果是否一致?为什么?不一致时,如何修改模型.

2. 分析绿灯亮后,汽车开始以最高限速穿过路口的时间.

3. 给出穿过路口汽车的数量 n 随时间 t 变化的数学模型.

例 1.2.5(人员疏散问题) 分析意外事件发生时,建筑物内的人员疏散所用的时间.

假设:

(1)一层有 k 间教室,走道只有一个出口.

(2)人员撤离时,有序、单行、(间隔)均匀、匀速.

(3)室内人员排成一队列的时间不计,第一个人到达教室门口的时间不计($t_0=0$).

参数:第 k 间教室人数为 n_k+1,教室距离为 L_k,门宽为 D,