龙门品牌 学子至爱

新课标

龙门专题

微积分

高中数学

主　　编　傅荣强
本册主编　于长军

龍門書局
www.Longmenbooks.com

新课标

龙门专题

微积分

高中数学

主　　编：傅荣强

本册主编：于长军

编　　者：周晓华　祖庆丰　蔡喜华
季桂珍　耿桂珍　高清贤
吴瑞芝　李　俊　庞淑英
胡忠义　赵广才　郭殿荣
高亚琴　于秀丽　孙秉珍
王金华　吴秀霞　马淑华
刘宝珍　杨惠新

龍門書局

北　京

举报电话：(010)64030229；(010)64034315；13501151303
邮购电话：(010)64034160

图书在版编目(CIP)数据

龙门专题：新课标. 高中数学. 微积分/傅荣强主编；于长军本册主编. —北京：龙门书局，2008
ISBN 978-7-5088-0761-4

Ⅰ. 龙…　Ⅱ. ①傅…②于…　Ⅲ. 数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 116977 号

责任编辑：田　旭　马建丽　佟艳丽/封面设计：耕　者

龍　門　書　局 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
www.longmenbooks.com
世界知识印刷厂 印刷
科学出版社总发行　各地书店经销
*
2008 年 7 月第　一　版　开本：A5(890×1240)
2008 年 7 月第一次印刷　印张：6 1/4
字数：221 000

定　价：12.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

策划者语

生命如歌

未名湖畔，博雅塔旁。

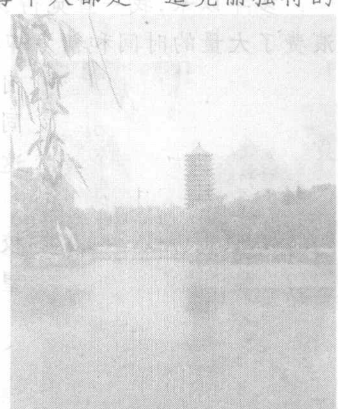
明媚的晨光穿透枝叶，懒散的泻落在林间小道上，花儿睁开惺忪的眼睛，欣喜地迎接薄薄的雾霭，最兴奋是小鸟，扇动翅膀在蔚蓝的天空中叽叽喳喳地欢唱起来了。微风轻轻拂动，垂柳摇曳，舒展优美的身姿，湖面荡起阵阵涟漪，博雅塔随着柔波轻快地翩翩起舞。林间传来琅琅的读书声，那是晨读的学子；湖畔小径上不断有人跑过，那是晨练的学子；椅子上，台阶上，三三两两静静的坐着，那是求索知识的学子……

在北大，每个早晨都是这样的；在清华，每个早晨都是这样的；在复旦，在交大，在南大，在武大……其实，在每一所高校里，早晨都是一幅青春洋溢、积极进取的景象！

在过去几年时间里，我一直在组织北大、清华的高考状元、奥赛金牌得主还有其他优秀的学子到全国各地巡回演讲。揭开他们"状元"的光环，他们跟我们是那么的相似，同样的普通与平凡。

是什么成就了他们的"状元"辉煌？

在来来往往带他们出差的路上，在闲来无事的聚会聊天过程中，我越来越发现，在普通平凡的背后，他们每个人都是一道亮丽独特的风景，都是一段奋斗不息、积极进取的历程，他们的成功，是偶然中的必然。



小朱，一个很认真、很可爱的女孩子，高中之前家庭条件十分优越，但学习一直平平；在她上高中前，家庭突遭变故，负债累累，用她妈妈的话说，"家里什么都没有了，一切只能靠你自己了。"她说自己只有高考一条路，只有考好了，才能为家里排忧解难。我曾经在台下听她讲自己刻苦学习的经历："你们有谁在大年

三十的晚上还学习到深夜三点？你们又有谁发烧烧到 39 度以上还在病床上看书？……”那一年，她以总分 684 分成为了浙江省文科高考状元。

陆文，一个出自父母离异的单亲家庭的女孩，她说，她努力学习的动力就是想让妈妈高兴，因为从小她就发现，每次她成绩考得很好，妈妈就会很高兴。为了给妈妈买一套宽敞明亮的房子，她选择了出国这条路，考托福，考 GRE，最后如愿以偿，被芝加哥大学以每年 6.4 万美金的全额奖学金录取为生物方向的研究生。6.4 万美金，当时相当于人民币 52 万。

齐伟，湖南省高考第七名，清华大学计算机学院的研究生，最近被全球最大的软件公司 MICROSOFT 聘为项目经理；霖秋，北京大学数学学院的小妹，在坚持不懈的努力中完成了自身最重要的一次涅槃，昨天的她在未名湖上游弋，今天的她已在千里之外的西雅图……

还有很多很多优秀的学子，他们也都有自己的故事，酸甜苦辣，很真实，很精彩。我有幸跟他们朝夕相处，默默观察，用心感受，他们的自信，他们的执着，他们的勤奋刻苦，尤其是他们的“学而得其法”所透露出来的睿智更让人拍案叫绝，他们人人都有一套行之有效的学习方法，花同样的时间和精力他们可以更加快速高效，举一反三。我一直在想：如果当年我也知道他们的这些方法，或许我也能考个清华北大的吧？

多年以来，我一直觉得我们的高考把简单的事情搞复杂了，学生们浪费了大量的时间和精力却收效甚微；多年以来，我们也一直在研究如何将一套优良的学习方法内化在图书中，让同学们在不知不觉中轻松快速的获取高分。这，就是出版《龙门专题》的原因了。

一本好书可以改变一个人的命运！名校，是每一个学子悠远的梦想和真实的渴望。“少年心事当拿云，谁念幽寒坐呜呃！”

龙门专题，走向名校的阶梯！

总策划

2008 年 7 月

《龙门专题》状元榜

赵永胜　2007年山西省文科状元
中国人民大学财政金融学院
星座：射手座
喜欢的运动：爬山　乒乓球
喜欢的书：伟人传记，如《毛泽东传》
人生格言：生命不息，奋斗不止
学习方法、技巧：兴趣第一，带着乐趣反复翻阅教科书，从最基本的知识入手，打牢"地基"，从基础知识中演绎难题，争取举一反三，融会贯通。合理安排时间，持之以恒，坚信"天道酬勤，勤能补拙"。

卢　毅　2006年浙江省理科状元
北京大学元培学院
星座：天秤座
喜欢的运动：跑步　滑板
喜欢的书：《卡尔维诺文集》
人生格言：做自己
学习方法、技巧：注重知识点的系统性，将每门学科的知识点作一个系统地梳理，无论是预习还是复习，这样便可在课上学习时有的放矢，课后复习时查漏补缺。坚持锻炼，劳逸结合。

武睿颖　2005年河北省文科状元
北京大学元培学院
星座：天秤座
喜欢的运动：游泳　网球
喜欢的书：*A Thousand Splendid Suns*
人生格言：赢得时间，赢得生命
学习方法、技巧：勤奋是中学学习的不二法门；同时要掌握良好的学习方法，如制定学习目标、计划，定期总结公式、解题思路等，这样能事半功倍。最后要培养良好的心态，平和积极地面对学习中的得失。

刘诗泽　2005年黑龙江省理科状元
北京大学元培学院
星座：金牛座
喜欢的运动：篮球　台球　排球
喜欢的书：《三国演义》
人生格言：战斗到最后一滴血
学习方法、技巧：多读书，多做题，多总结。看淡眼前成绩，注重长期积累。坚持锻炼，劳逸结合。

邱　汛　2005年四川省文科状元
北京大学
星座：处女座
喜欢的运动：篮球　乒乓球
喜欢的书：《哈利·波特》
人生格言：非淡泊无以明志，
非宁静无以致远
学习方法、技巧：1. 要保持一颗平常心来面对考试、繁重的学习任务和激烈的竞争。2. 学会从各种测验考试中总结经验、教训，而不要仅仅局限于分数。3. 学会计划每一天的学习任务，安排每一天的学习时间。4. 坚持锻炼，劳逸结合。

林　叶　2005年江苏省文科状元
北京大学
星座：水瓶座
喜欢的运动：跑步　台球　放风筝
喜欢的书：《黑眼睛》《笑面人》
人生格言：不经省察的生活不值得过
学习方法、技巧：学习分两类，一类和理想真正有关，另一类只是不得不过的门槛。不要总因为喜好就偏废其中的一个，它不仅是必须的，而且你也许会发现，它本来也值得你热爱和认真对待。你自己的学习方法别人永远无法替代，它也是你生活的一部分，完善它，就像完善你自己。

田　禾　2005年北京市理科状元
北京大学元培学院
星座：水瓶座
喜欢的运动：羽毛球
喜欢的书：历史类书籍
人生格言：认真、坚持
学习方法、技巧：认真听讲，勤于思考，作阶段性总结，及时调整学习计划，坚持阅读课外书和新闻，一以贯之，学不偏废。

朱师达　2005年湖北省理科状元
北京大学元培学院
星座：水瓶座
喜欢的运动：足球　篮球　游泳
喜欢的书：《追风筝的人》《史记》
人生格言：有梦想就有可能，有希望
就不要放弃
学习方法、技巧：1. 知识系统化、结构化是掌握知识的有用技巧和重要体现。2. 知其然还要知其所以然，记忆才更牢固。3. 整体把握兴趣和强弱科的平衡。4. 正确认识自己的弱点，集中力量克服它。

编委会

Contents 目录

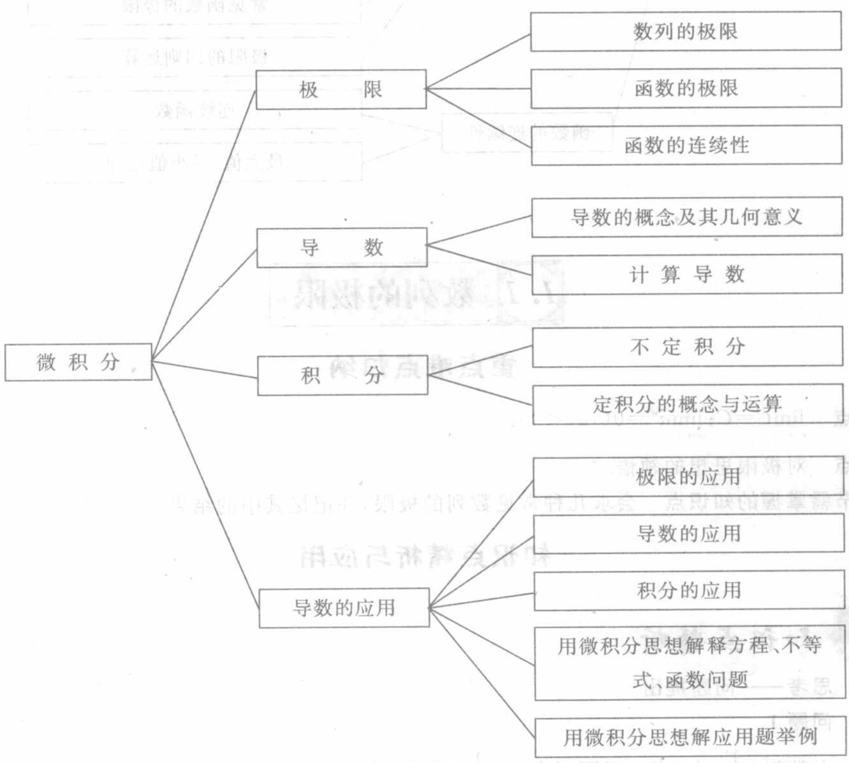
基础篇

数学是研究现实世界空间形式和数量关系的学科，简单地说是研究“数”与“形”的学科. 数学来源于实践又反过来作用于实践，其中普遍存在着对立统一、运动变化、相互联系、相互转变，并可为自然现象、社会系统提供应用模型.

本书分为四大部分：极限，导数与微分，积分，极限、导数与微分、积分的应用.

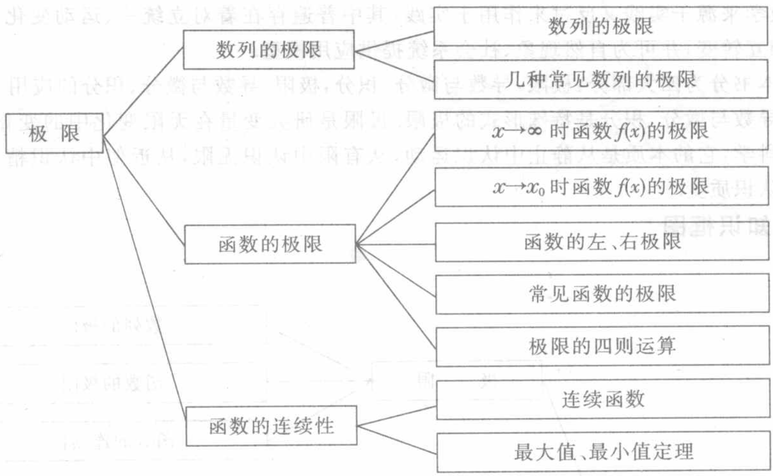
导数与微分、积分是特殊形式的极限. 极限是研究变量在无限变化中的变化趋势的一门科学，它的本质是从静止中认识运动，从有限中认识无限，从近似中认识精确，从量变中认识质变.

本篇知识框图



第一讲 极 限

本讲知识框图



1.1 数列的极限

重点难点归纳

重点 $\lim\limits_{n\to\infty}C=C$；$\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0(|a|<1)$.

难点 对极限思想的领悟.

本节需掌握的知识点 会求几种常见数列的极限，并记忆其中的结果.

知识点精析与应用

知识点精析

思考——问题提出

问题 1

在数列$\{\frac{1}{n}\}$中，当 n 无限增大时，$\frac{1}{n}$无限地趋近于 0.

问题 2

在数列$\{\frac{n}{n+1}\}$中，当 n 无限增大时，n 与 $n+1$ 无限地接近，$\frac{n}{n+1}$无限地趋近于 1.

在这两个问题中，$\frac{1}{n}$无限地趋近于 0，$\frac{n}{n+1}$无限地趋近于 1，关键字是“趋近”，下面我们从极限的层面来认识“趋近”.

探究——抽象概括

1. 数列的极限

一般地，如果当项数 n 无限增大时，无穷数列$\{a_n\}$的项 a_n 无限地趋近于某个常数 a（即$|a_n-a|$无限地接近于 0），那么就说数列$\{a_n\}$以 a 为极限，或者说 a 是数列$\{a_n\}$的极限，记作$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$（或当 $n\to\infty$ 时，$a_n\to a$）.

2. 几种常见数列的极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}A=A$（$A$ 为常数）.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=\begin{cases}0 & (|a|<1),\\ 1 & (a=1),\\ \text{不存在} & (|a|>1,\text{或 } a=-1).\end{cases}$

这四个结果要记住，它们是解题依据.较为复杂的求极限问题，大部分由它们复合而成

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^a}=0$ （$a>0$，a 是常数）.

(4)若 $f(n)$、$g(n)$分别是关于 n 的一元多项式，次数分别是 p、q，最高次项的系数分别为 a_p、a_q，且 $g(n)\neq0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\begin{cases}0 & (p<q),\\ \frac{a_p}{a_q} & (p=q),\\ \text{不存在} & (p>q).\end{cases}$$

解题方法指导

在数列的极限的学习中，要逐步体会四句话的内涵，这四句话是：

“从静止看运动，从有限看无限，从近似看精确，从量变看质变”.

1. 数列的极限的定义

［例 1］ 已知数列$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$.

(1)数列的第几项后面的所有项与 1 的差的绝对值都小于$\frac{1}{100}$？

(2)数列的第几项后面所有项与 1 的差的绝对值都小于任意指定的正数 ε？

(3)求数列的极限.

分析 (1)解关于 n 的不等式$|a_n-1|<\frac{1}{100}$；(2)由不等式$|a_n-1|<\varepsilon$寻找 N；(3)证

明 1 是数列的极限.

解 (1)$\because$ $|a_n-1|=\left|\dfrac{n}{n+1}-1\right|=\dfrac{1}{n+1}$,

$\therefore$ 要使$\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{100}$,就要使 $n+1>100$,

$\therefore$ $n>99$,

$\therefore$ 数列的第 99 项后面的项与 1 的差的绝对值都小于$\dfrac{1}{100}$.

(2)$\because$ $|a_n-1|=\dfrac{1}{n+1}$,

$\therefore$ 要使$\dfrac{1}{n+1}<\varepsilon$,就要使 $n+1>\dfrac{1}{\varepsilon}$,即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}-1$.

设$\dfrac{1}{\varepsilon}-1$ 的整数部分是 N,那么数列的第 N 项后面的所有项与 1 的差的绝对值都小于任意指定的正数 ε.

(3)由(2)及极限定义知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$.

点评 本例中,数列

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$$

的极限是 1,其本质是

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon.$$

其中,ε 是预先指定的任意小的正数.

一般地,对于数列$\{a_n\}$,如果存在一个常数 A,无论预先指定多么小的正数 ε,都能在数列中找到一项 a_N,使得这一项后面的所有项与 A 的差的绝对值都小于 ε(即当 $n>N$ 时,$|a_n-A|<\varepsilon$ 恒成立),就把常数 A 叫做数列$\{a_n\}$的极限,记作 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$,也可记作:当 $n\to\infty$ 时,$a_n\to A$.

上面我们实际上是给出了数列的极限的精确化定义,其几何意义是:

如图 1-1,不论 $\varepsilon>0$ 怎样小,当 $n>N$ 时,所有的 $a_{N+1},a_{N+2},\cdots$ 的对应点都落在开区间$(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$内,至多有有限个 $a_1,a_2,\cdots,a_N$ 的对应点落在这个开区间之外.

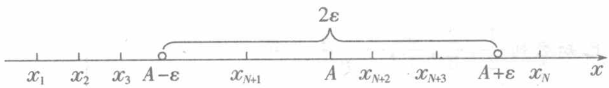


图 1-1

由于 $\varepsilon>0$ 可以任意小,所以开区间$(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$的长度 2ε 也可以任意小,由此可见:

$$x_{N+1},x_{N+2},\cdots$$

的对应点都凝聚在 A 的对应点的近旁.

［例 2］ 用极限的定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+2}{n^3+3n}=0$.

证明 任给 $\varepsilon>0$，要使 $\left|\frac{n^2+2}{n^3+3n}-0\right|<\varepsilon$，只需

$$\left|\frac{n^2+2}{n^3+3n}-0\right|=\frac{n^2+2}{n^3+3n}<\frac{n^2+2}{n^3}$$

$$\leqslant\frac{n^2+2n^2}{n^3}=\frac{3}{n},$$

这是对此式的"放大"，使"右边>左边"．放大的依据是：扩大分子，缩小分母

∴ 只需 $\frac{3}{n}<\varepsilon$ 即可，即 $n>\frac{3}{\varepsilon}$.

取 N 为 $\frac{3}{\varepsilon}$ 的整数部分，则

当 $n>N$ 时，恒有 $\left|\frac{n^2+2}{n^3+3n}-0\right|<\varepsilon$，

∴ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+2}{n^3+3n}=0$.

点评 为寻找满足条件的 N，将 $\left|\frac{n^2+2}{n^3+3n}-0\right|$ 放大为 $\frac{3}{n}$，再由 $\frac{3}{n}<\varepsilon$ 求得 N. 放大不等式寻找 N，必须注意：①放大要适度，将 $|a_n-A|$ 放大为 $f(n)$ 时，除了保证 $|a_n-A|<f(n)$ 成立外，还必须满足 $f(n)\to0(n\to\infty)$；②不等式 $f(n)<\varepsilon$ 易于求解.

2. 几种常见数列的极限

为了应用上的方便，这里向读者们介绍一下数列的极限的运算法则.

数列的极限的运算法则：

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$，那么

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A\pm B$；

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A\cdot B$；

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\frac{A}{B}(B\neq0)$；

$\lim\limits_{n\to\infty}c\cdot a_n=c\cdot\lim\limits_{n\to\infty}a_n=cA$.

这些运算法则必须背下来．可类比实数的四则运算法则去记忆

使用上面的运算法则时，必须注意：

第一，数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 的极限必须是存在的；

第二，$a_n\pm b_n$、$a_n\cdot b_n$ 可以扩充到有限个的情形，即

$$\lim_{n\to\infty}(\overbrace{a_n\pm b_n\pm c_n\pm\cdots\pm d_n}^{\text{有限个}})=\lim_{n\to\infty}a_n\pm\lim_{n\to\infty}b_n\pm\lim_{n\to\infty}c_n\pm\cdots\pm\lim_{n\to\infty}d_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}\overbrace{a_nb_nc_n\cdot\cdots\cdot d_n}^{\text{有限个}}=\lim_{n\to\infty}a_n\ \lim_{n\to\infty}b_n\ \lim_{n\to\infty}c_n\cdot\cdots\cdot\lim_{n\to\infty}d_n.$$

但是，不可以扩充到无限个的情形.

[例3] 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{1+2+3+\cdots+n}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n+b^n}{a^{n+1}+b^{n+1}}(|a|\neq|b|\neq0)$；

(4) $\lim(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{n}$.

解 (1)先进行有限运算，再求极限.

$\because\quad \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$，

$\therefore\quad \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{1+2+3+\cdots+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{\frac{n(n+1)}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{n}}=2$.

点评 求“$\frac{\infty}{\infty}$”型的极限，通常是先将分子、分母同时除以最高次项(不含系数)，再运用极限的运算法则求解.

(3)极限的运算法则的适用范围是各项都有极限. 本题中 a、b 的情况不明，必须分类讨论，先将其转化为各项都有极限的形式，再去求其极限.

分类讨论

当 $|a|>|b|$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n+b^n}{a^{n+1}+b^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}{a+\left(\frac{b}{a}\right)^n\cdot b}=\frac{1}{a}$；

当 $|a|<|b|$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n+b^n}{a^{n+1}+b^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n+1}{a\left(\frac{a}{b}\right)^n+b}=\frac{1}{b}$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot\sqrt{n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}$.

点评 本小题是“$0\times\infty$”型的极限问题，一般处理方法是把它转化为“$\frac{\infty}{\infty}$”型的极限问题，这里采用了有理化变形的方法，将“$0\times\infty$”型的问题转化成了“$\frac{\infty}{\infty}$”型的问题.

［例 4］ 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^{n+1}+(a+1)^n}=\frac{1}{3}$，求实数 a 的取值范围.

解 ∵ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^{n+1}+(a+1)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3+\left(\frac{a+1}{3}\right)^n}=\frac{1}{3}$，

∴ $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a+1}{3}\right)^n=0,$$

依据 $\lim\limits_{n\to\infty}p^n=0$，$|p|<1$

∴ $$\left|\frac{a+1}{3}\right|<1,$$

解得 $$-4<a<2.$$

∴ 实数 a 的取值范围是 $\{a|-4<a<2\}$.

3. 数列、极限的两段式问题

这里所说的两段式问题，是指问题的第一段以讨论数列为主，第二段以讨论数列的极限为主.

数列、数列的极限的两段式问题，一直是这些年来高考试题中的典范题型，而且出现频率越来越高.

［例 5］ 数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_n=\sqrt{a_{n-1}^2+4}$ $(n\in\mathbf{N}^*，n\geqslant2)$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}$.

分析 由 $a_n=\sqrt{a_{n-1}^2+4}$ 求出 $a_n^2-a_{n-1}^2=4$，此式对 $n\geqslant2$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 成立，再结合 $a_1=1$ 求出通项公式 $a_n=f(n)$，将 $a_n=f(n)$ 代入(2)中的式子，问题即可得到解决.

解 (1) ∵ $a_n=\sqrt{a_{n-1}^2+4}$ $(n\geqslant2，n\in\mathbf{N}^*)$，

∴ $a_n^2=a_{n-1}^2+4$，$a_n^2-a_{n-1}^2=4$.

又∵ $a_1=1$， ∴ $a_1^2=1$.

∴ $\{a_n^2\}$ 构成首项为 $a_1^2=1$，公差为 4 的等差数列，

∴ $$a_n^2=4n-3,$$

∴ $$a_n=\sqrt{4n-3}.$$

a_n、a_{n+1}、a_{n+2} 是什么？根据(1)小题结果讨论！

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n+5}-\sqrt{4n+1}}{\sqrt{4n+1}-\sqrt{4n-3}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n+1}+\sqrt{4n-3}}{\sqrt{4n+5}+\sqrt{4n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+\sqrt{4-\frac{3}{n}}}{\sqrt{4+\frac{5}{n}}+\sqrt{4+\frac{1}{n}}}=\frac{2+2}{2+2}=1.$$

[例6] 设数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 的前 n 项的和 S_n 和 a_n 的关系是 $S_n=1-ba_n-\frac{1}{(1+b)^n}$，其中 b 是与 n 无关的常数，且 $b\neq-1$.

(1)求 a_n 和 a_{n-1} 的关系式；

(2)写出用 n 和 b 表示 a_n 的表达式；

(3)当 $0<b<1$ 时，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

解 (1) $a_n=S_n-S_{n-1}=-b(a_n-a_{n-1})-\frac{1}{(1+b)^n}+\frac{1}{(1+b)^{n-1}}$

$$=-b(a_n-a_{n-1})+\frac{b}{(1+b)^n}(n\geqslant2),$$

解得
$$a_n=\frac{b}{1+b}a_{n-1}+\frac{b}{(1+b)^{n+1}}(n\geqslant2).$$

(2) ∵ $a_1=S_1=1-ba_1-\frac{1}{1+b}$,

∴ $a_1=\frac{b}{(1+b)^2}$.

∴
$$a_n=\frac{b}{1+b}\left[\frac{b}{1+b}a_{n-2}+\frac{b}{(1+b)^n}\right]+\frac{b}{(1+b)^{n+1}}$$

$$=\left(\frac{b}{1+b}\right)^2a_{n-2}+\frac{b^2+b}{(1+b)^{n+1}}$$

$$=\left(\frac{b}{1+b}\right)^2\left[\frac{b}{1+b}a_{n-3}+\frac{b}{(1+b)^{n-1}}\right]+\frac{b+b^2}{(1+b)^{n+1}}$$

$$=\left(\frac{b}{1+b}\right)^3a_{n-3}+\frac{b+b^2+b^3}{(1+b)^{n+1}}.$$

……

由此猜想：

$$a_n=\left(\frac{b}{1+b}\right)^{n-1}\cdot a_1+\frac{b+b^2+\cdots+b^{n-1}}{(1+b)^{n+1}}.$$

把 $a_1=\frac{b}{(1+b)^2}$ 代入上式，得

$$a_n=\frac{b+b^2+\cdots+b^n}{(1+b)^{n+1}}=\begin{cases}\dfrac{b-b^{n+1}}{(1-b)(1+b)^{n+1}} & (b\neq1)\\[2ex] \dfrac{n}{2^{n+1}} & (b=1).\end{cases}$$

这个结果是用不完全归纳法猜测出来的.由于本题只要求写出 a_n，所以没有对其进行证明