



上海市本科教育高地建设
与上海大学教材建设专项经费资助

JINSHU NINGGU GUOCHENG
SHUZH I MONI JI YINGYONG

金属凝固过程 数值模拟及应用

杨弋涛 编著



化学工业出版社

上海市本科教育高地建设与上海大学教材建设专项经费资助

金属凝固过程数值模拟及应用

杨弋涛 编著



化学工业出版社

· 北京 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

金属凝固过程数值模拟及应用/杨弋涛编著. —北京:
化学工业出版社, 2009. 1
ISBN 978-7-122-04398-6

I. 金… II. 杨… III. 熔融金属-凝固-数值模拟
IV. TG111. 4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 200654 号

责任编辑: 刘丽宏

装帧设计: 周 遥

责任校对: 战河红

出版发行: 化学工业出版社 (北京市东城区青年湖南街 13 号 邮政编码 100011)

印 装: 北京云浩印刷有限责任公司

720mm×1000mm 1/16 印张 9½ 字数 176 千字 2009 年 3 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询: 010-64518888 (传真: 010-64519686)

售后服务: 010-64518899

网 址: <http://www.cip.com.cn>

凡购买本书, 如有缺损质量问题, 本社销售中心负责调换。

定 价: 35.00 元

版权所有 违者必究

前 言



计算机技术的飞速发展，已使其成为自电力发明以来最具生产潜力的工具之一，数字化时代正一步步向我们走来。计算机辅助设计（CAD）、计算机辅助工程分析（CAE）、计算机辅助制造（CAM）等技术在材料科学领域的应用正在不断扩大和深入，已经成为材料科学领域的技术前沿和十分活跃的研究领域。就铸造领域而言，铸件凝固过程计算机模拟是计算机在铸造研究与生产应用中最为核心的内容之一，涉及铸造理论、凝固理论、传热学、工程力学、数值分析、计算机图形学的多个学科^[1~5]，是公认的材料科学的前沿领域。把铸造图样、铸型材料、铸造合金物性值、凝固特性的描述数据及数学模型输入计算机，即可通过计算机计算出合理的浇注系统和冒口系统，对于优化产品设计，提高质量和缩短制造周期起着重要作用。

为适应当前时代的发展潮流，笔者以这一领域核心之一的凝固过程的计算机模拟为主要内容，总结了笔者以及近几年国内外该领域同行从事研究和应用的最新结果，编著了本书。读者可从本书了解金属液的流动和凝固过程计算机数值模拟的基本原理，通过从简单形状零件的三维造型到实际模拟操作以及对模拟结果的分析这一全过程的学习，初步具备把流动、凝固过程数值模拟的方法应用于相应的科研和生产实际中去的基本能力，并学会举一反三地理解计算机模拟在其他领域上的应用方法，促进和拓宽思维能力。书中的实例主要来自笔者解决的科研和工程问题的实际工作。

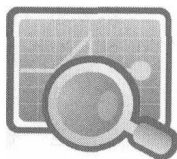
全书主要介绍了数值模拟的基本理论和方法，数值模拟在材料加工中的应用基础，模拟前的预备工作，模拟软件的使用方法与结果分析，大型合金钢锭铸造应力的解析，铝合金半固态压铸成形过程的模拟和模拟技术在生产实践中的应用。本书可作为高等学校金属材料成形相关专业本科生和研究生的使用教材，也可供企业技术工作者参考使用。

希望本书的出版能为计算机模拟技术在材料加工领域的研究与应用添砖加瓦。

在本书的编著过程中先后获得上海高等学校本科教育高地建设项目（金属材料工程）、上海市教育委员会重点课程建设项目以及上海大学重点教材建设项目的大力支持，谨在本书出版之际，致以诚挚谢意。

杨弋涛

目 录



第 1 章 数值模拟的基本理论和方法	1
1.1 传热解析	1
1.1.1 传热的基本形态	1
1.1.2 傅立叶 (Fourier) 定律和热传导率	1
1.1.3 热能守恒与热传导的微分方程	2
1.1.4 初期条件和边界条件	3
1.1.5 有限差分法	4
1.2 流动解析	6
1.2.1 质量守恒	6
1.2.2 动量守恒 (Navier-Stokes 方程)	7
1.3 凝固解析	7
1.3.1 目的	7
1.3.2 凝固现象的基础	7
1.3.3 凝固模式	10
1.4 CAE 的基本知识	11
1.4.1 CAE 系统的组成	12
1.4.2 解析方法	12
第 2 章 数值模拟在材料加工中的应用基础	14
2.1 凝固过程的模拟	15
2.1.1 概述	15
2.1.2 缩孔的推断方法	15
2.1.3 铝合金砂型铸件的分析	17
2.2 流动过程的模拟	21
2.2.1 概述	21
2.2.2 压铸充型过程	22
2.2.3 充填顺序的改进	23

2.2.4	浇不足缺陷的克服	23
2.2.5	冷隔的消除	27
2.2.6	浇注系统中考虑过滤器的流场	27
2.3	应力解析初步	33
2.3.1	基本原理	33
2.3.2	解析实例	34
第3章	模拟前的预备工作	37
3.1	三维 CAD 基础知识	37
3.2	解析模型的建立	40
第4章	模拟软件的使用方法与结果分析	42
4.1	模拟软件的基本组成与操作	42
4.2	重力铸造过程的模拟	48
4.2.1	进入计算功能	48
4.2.2	结果处理与分析	48
4.2.3	数据库的管理	50
4.3	压力铸造过程的模拟	56
4.3.1	预测半固态铸铁合金用压铸模的受热过程	56
4.3.2	金属液的温度和充填模式变化	58
4.3.3	压室内的计算	59
4.4	背压计算	63
4.4.1	铸模材料透气性的背压设定	64
4.4.2	铸模缝隙之间的背压设定	65
4.4.3	实例求解	67
4.5	倾斜铸造	67
4.5.1	基本 CAD 模型	67
4.5.2	主要倾斜工艺参数	69
4.5.3	充型过程	69
4.6	连续铸造	70
4.6.1	圆形坯料的连铸模拟	70
4.6.2	方形坯料的连铸模拟	70
4.6.3	两种坯型的应力对比	73
4.6.4	完整连铸模拟(铸钢)的结果显示	73
第5章	大型合金钢锭铸造应力的解析	75
5.1	几何模型与物性参数	75

5.2	应力的计算结果	76
5.3	减低应力和工作效率的兼顾	79
5.3.1	均匀吹风冷却	79
5.3.2	增加钢锭模的厚度	80
5.3.3	锭型的对比	85
第6章	铝合金半固态压铸成形过程的模拟	96
6.1	实验工艺	96
6.1.1	基本过程	96
6.1.2	压铸模形状	97
6.1.3	压铸充型过程的测试	97
6.2	模拟/实验结果	97
6.2.1	改变若干主要参数进行的模拟比较	97
6.2.2	模具设计的优化	106
6.3	在汽车零件研制上的应用	126
第7章	模拟技术在生产实践中的应用	132
7.1	大型铸件开箱时间的求解	132
7.1.1	CAD 模型	132
7.1.2	求解的目的	132
7.1.3	物性值的修正与方向的确立	133
7.1.4	从冷却过程的求解寻求对策	134
7.2	热处理工艺的温度控制	137
7.2.1	解析的目的	137
7.2.2	解析模型及解析结果	137
7.3	铸铁半固态过程的流动、凝固缺陷预测	139
7.3.1	解析模型	139
7.3.2	不同固相率的充型计算结果	139
7.3.3	不同铸型条件下凝固缺陷的预测	139
参考文献		143

第1章

数值模拟的基本理论和方法

1.1 传热解析

1.1.1 传热的基本形态

基于温度梯度的热量移动被称为传热，传热主要包括热传导（因固体或液体的原子、分子、电子的运动所致）、热辐射（因电磁波或光所致）、对流换热（因流体的移动所致）三种形式。

三种基本传热形态如图 1-1 所示。

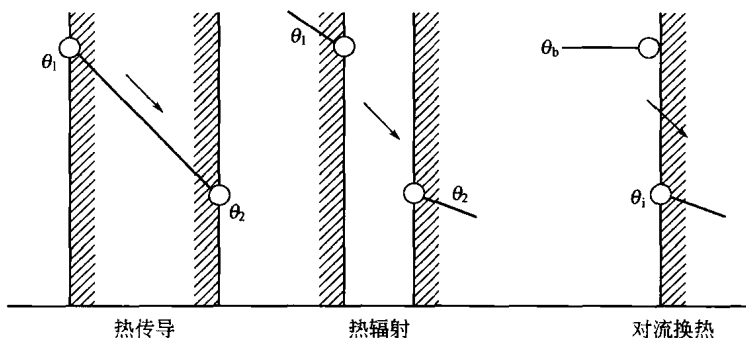


图 1-1 传热基本形态^[1]

1.1.2 傅立叶（Fourier）定律和热传导率

热是从高温流向低温，这种由于热传导引起的热移动满足傅立叶定律：单位时间内通过单位截面积的热量（热流密度）大小与温度梯度成正比。其一维方程式可以表述为式(1-1)：

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \quad (1-1)$$

式中, q 为热流密度, W/m^2 ; T 为绝对温度, K ; x 为位置坐标; λ 为热导率, $\text{W}/(\text{K} \cdot \text{m})$ 。

为简便起见, 考虑图 1-2 所示的一维热传导模式, 沿 x 方向温度场呈线形分布, 温度梯度 $\partial T/\partial x$ 则可表述为式(1-2):

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1} \quad (1-2)$$

方程式(1-2) 代入式(1-1) 可以得到沿 x 方向的热流密度表达式(1-3):

$$q = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1} \quad (1-3)$$

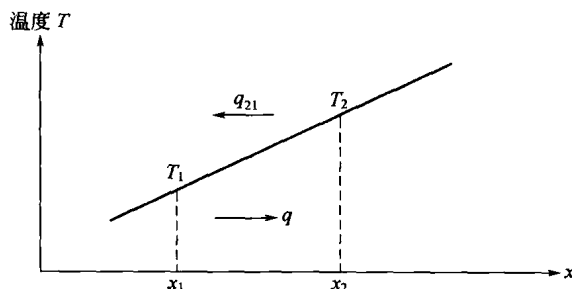


图 1-2 一维状态下热传导引起的热流移动^[2]

1.1.3 热能守恒与热传导的微分方程

解析热传导问题须考虑热能守恒, 并可用以下方程式表示:

时间 $t \sim (t + \Delta t)$ 之间某个
区域内所积蓄的热量 $Q = \Delta t$ 之间流入的热量 Q_{in} - Δt 之间流出的热量 Q_{out}

考虑图 1-3 中 x 方向存在温度变化的微小单元 $aa'bb'$ (体积 V) 上热能守恒的情形, 假定该微小单元的密度 $\rho(\text{kg}/\text{m}^3)$ 、比热容 $C_p [\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})]$ 、温度 $T(\text{K})$ 均为恒定的情况下, 积蓄的热量 Q 可以用下式表示。

$$Q = (\text{时刻 } t + \Delta t \text{ 时的热量}) - \text{时刻 } t \text{ 时的热量} = \rho C_p V T^{t+\Delta t} - \rho C_p V T^t$$

设 ab 间的距离是 Δx , aa' 面和 bb' 面的热流密度分别为 q_a 、 q_b , aa' 和 bb' 之间的热流密度存在如下线性关系:

$$q_b = q_a + \Delta q = q_a + \Delta x \times \tan\theta = q_a + \Delta x \left(\frac{\Delta q}{\Delta x} \right) \quad (1-4)$$

若把 aa' 面和 bb' 面的面积视为单位面积, 则有

$$\begin{aligned} Q_{\text{in}} - Q_a &= 1 \times q_a \Delta t - 1 \times q_b \Delta t \\ &= -\Delta x \left(\frac{\Delta q}{\Delta x} \right) \Delta t \quad (1-5) \end{aligned}$$

亦即 $\rho C_p V T^{t+\Delta t} - \rho C_p V T^t =$
 $-\Delta x \left(\frac{\Delta q}{\Delta x} \right) \Delta t$, 可改写为

$$\rho C_p V \frac{T^{t+\Delta t} - T^t}{\Delta t} = - \left(\frac{\Delta q}{\Delta x} \right) \Delta x \quad (1-6)$$

此处 $V = 1 \times \Delta x$, 考虑无限小单元 ($\Delta x \rightarrow 0$) 和无限小的时间增量 ($\Delta t \rightarrow 0$), 上式可改写为

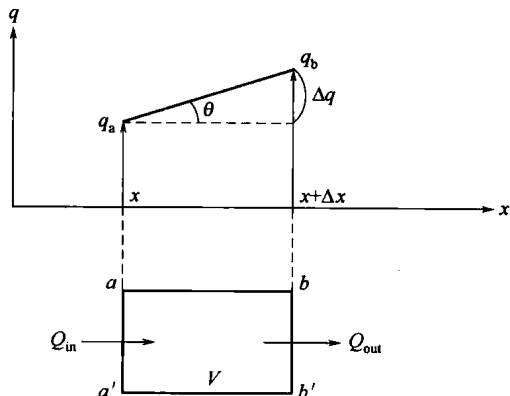


图 1-3 一维状态下热传导微分方程的导出

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial q}{\partial x} \quad (1-7)$$

将方程(1-1) 代入式(1-7) 可得, 热传导的微分方程为

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (1-8)$$

当热导率 λ 为常数时, 方程(1-8) 可改写为

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (1-9)$$

或

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \left(\alpha = \frac{\lambda}{\rho C_p} \right) \quad (1-10)$$

式中, α 为热扩散率或导温系数。

1.1.4 初期条件和边界条件 ●

求解热传导问题, 也就是求解考虑了热能守恒的以上一组热传导的微分方程。为此, 我们需要知道某一时刻 (通常是时间的零时刻) 的温度分布 (初期条件) 和边界上的传热条件 (边界条件)。

初期条件可描述为:

$$t=0 \text{ 时 } T = T_0 (\text{常数})$$

或

$$t=0 \text{ 时 } T = T(x)$$

边界条件可描述为：

在如图 1-4 所示与边界相邻的微小单元内，热能守恒式可写为

$$\rho C_p V (T^{i+\Delta t} - T^i) = q_s A \Delta t - \lambda A \Delta t \left[\frac{\partial T}{\partial x} \right]_{x=\Delta x}$$

式中 $\rho C_p V (T^{i+\Delta t} - T^i)$ —— Δt 间隔积蓄的热量；

$q_s A \Delta t$ —— Δt 间隔从边界流入的热量；

$\lambda A \Delta t \left[\frac{\partial T}{\partial x} \right]_{x=\Delta x}$ —— Δt 间隔从边界由于热传导流出的热量。

对于单位断面积 ($A=1$, $V=1 \times \Delta x$)， Δx 趋于无限小时，左边项可忽略不计，上式可改写为：

$$x = x_s (\text{边界}), q + \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0 \quad (1-11)$$

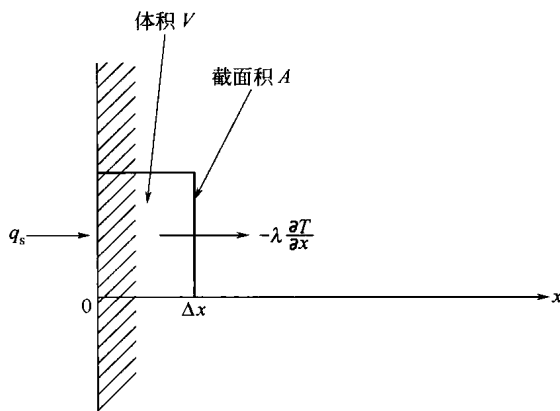


图 1-4 在微小边界上热量的变化

1.1.5 有限差分法 ●

仅有初期条件和边界条件，用计算机还无法解上述的热传导微分方程。这是因为计算机只能处理离散后的数值。所以，每个时间增量 Δt 用跳跃式的点来计算，点与点之间的位置采用内插法或外插法求解。为此首先要对微分方程以及边界条件进行差分处理。从微分方程式导出差分式的最常用方法是有限差分法（亦称泰勒展开）。

假设 $x = x_i$ 时温度为 T_i ，则 $x = x_{i+1}$ 和 $x = x_{i-1}$ 时的温度可分别用以下两个式子表示。

$$T_{i+1} = T_i + \Delta x \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_i + \frac{\Delta x^2}{2!} \times \left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_i + \frac{\Delta x^3}{3!} \times \left. \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \right|_i + \dots \quad (1-12)$$

$$T_{i-1} = T_i - \Delta x \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_i + \frac{\Delta x^2}{2!} \times \left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_i - \frac{\Delta x^3}{3!} \times \left. \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \right|_i + \dots \quad (1-13)$$

泰勒展开法就是按图 1-5 定义的时间步长 Δt ，接点距离 Δx ，在格子的两点之间引入泰勒公式把微分方程改变为差分方程。现以方程(1-8) 为讨论对象，方程(1-9) 和方程(1-10) 两式相加并省略 $(\partial^4 T/\partial x^4)$ 以上高阶的项，即可得到二元微分的差分方程式。

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_i^t = \frac{T_{i+1}^t - 2T_i^t + T_{i-1}^t}{\Delta x^2} \quad (1-14)$$

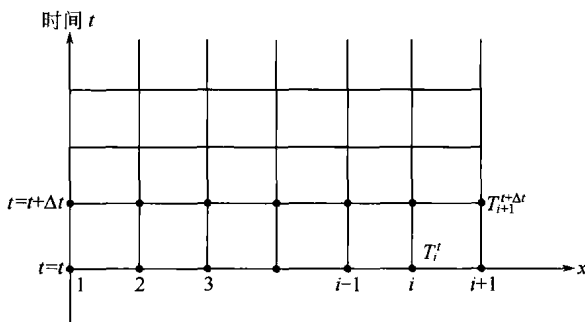


图 1-5 有限差分法的一维问题

同理类推：

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_i = \frac{T_i^{t+\Delta t} - T_i^t}{\Delta t} \quad (1-15)$$

考虑 $(\partial T/\partial t)|_i = (\partial T/\partial t)|_i^t$

$$\frac{T_i^{t+\Delta t} - T_i^t}{\Delta t} = \frac{a}{\Delta x^2} (T_{i+1}^t - 2T_i^t + T_{i-1}^t) \quad (1-16)$$

若已知 t 时刻的 T_i^t , T_{i+1}^t , T_{i-1}^t ，可利用上式求 $T_i^{t+\Delta t}$ 。这种方法被称为前进差分法或显式解法。

考虑 $(\partial T/\partial t)|_i = (\partial T/\partial t)|_i^{t+\Delta t}$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_i = \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_i^{t+\Delta t} = \frac{T_i^{t+\Delta t} - T_i^t}{\Delta t} = \frac{a}{\Delta x^2} (T_{i+1}^{t+\Delta t} - 2T_i^{t+\Delta t} + T_{i-1}^{t+\Delta t}) \quad (1-17)$$

单凭 i 点的数值无法求解 $T_i^{t+\Delta t}$ ，需要建立关于 $T_1^{t+\Delta t}$, $T_2^{t+\Delta t}$, ..., $T_i^{t+\Delta t}$ 的联立方程式方可求解。这种方法叫做后退差分法或隐式解法。

随后对边界条件进行差分化处理，考虑以下两个泰勒展开式

$$T_2 = T_1 + \Delta x \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_1 + \frac{\Delta x^2}{2!} \times \left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_1 + \frac{\Delta x^3}{3!} \times \left. \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \right|_1 + \dots \quad (1-18)$$

$$T_3 = T_1 + 2\Delta x \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_1 + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} \times \left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_1 + \frac{(3\Delta x)^3}{3!} \times \left. \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \right|_1 + \dots \quad (1-19)$$

忽略不计 $\partial^2 T/\partial x^2$ 以上的项，可以得到

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_1 = \frac{T_2 - T_1}{\Delta x} \quad (1-20)$$

即

$$\lambda \frac{T_2 - T_1}{\Delta x} + q_s = 0 \quad (1-21)$$

1.2 流动解析

1.2.1 质量守恒

某领域的质量在无流入和流出的情况下保持一定，这是流体必须满足的条件。用如图 1-6 的 ABCD 小区域来考虑质量守恒问题，即

单位时间质量的增量 = 单位时间流入的质量 - 单位时间流出的质量

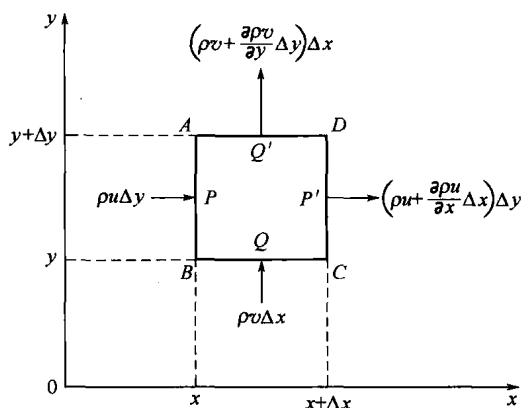


图 1-6 微小区域 ABCD 的质量收支平衡

在 P、Q 两点单位时间单位面积上通过的质量为 ρu 、 ρv ，距离点 P、Q 分别为 Δx 、 Δy 的点 P'、Q' 的质量流速为

$$\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} \Delta x, \quad \rho v + \frac{\partial \rho v}{\partial y} \Delta y$$

从平面 AB、BC 流入微小区域 ABCD 的单位时间的质量为

$$\rho u \Delta y + \rho v \Delta x$$

从平面 CD、AD 流出微小区域 ABCD 的单位时间的质量为

$$\left(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y + \left(\rho v + \frac{\partial \rho v}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x$$

假定微小时间增量 Δt 之间的微小区域的质量 $\Delta \rho \Delta x \Delta y$ 增大的话，质量守恒可以用以下式子来描绘：

$$\frac{\Delta \rho \Delta x \Delta y}{\Delta t} = (\rho u \Delta y + \rho v \Delta x) - \left(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y - \left(\rho v + \frac{\partial \rho v}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x \quad (1-22)$$

亦即

$$\frac{\Delta \rho}{\Delta t} = - \left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} \right) \quad (1-23)$$

当 Δt 趋近于零, 可以得到 $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y}\right)$ 连续性方程。

当流体密度为恒定时

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

1.2.2 动量守恒 (Navier-Stokes 方程) ●

根据以下的原理方程式:

单位时间动量的增量 = 单位时间流入的动量 - 单位时间流出的动量 + 外力
可以得到被称为 Navier-Stokes 方程的动量守恒方程 (推导过程从简)。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{\rho} \times \frac{\partial P}{\partial x} \quad (1-24)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{\rho} \times \frac{\partial P}{\partial y} - g \quad (1-25)$$

1.3 凝固解析

1.3.1 目的 ●

可归纳为以下几点:

- ① 为掌握铸造生产效率, 希望知道凝固时间;
- ② 开箱时间的了解;
- ③ 收缩的预测;
- ④ 组织偏析的预测;
- ⑤ 凝固组织、性能的推测;
- ⑥ 铸造应力的推测;
- ⑦ 铸型条件的预测;
- ⑧ 凝固条件的控制。

1.3.2 凝固现象的基础 ●

为进行凝固解析, 首先要理解基本的凝固现象, 设想读者已学过金属凝固原理为前提, 在此仅做简要概述。

(1) 平衡状态图和平衡凝固 从图 1-7 所示的相图可以为我们提供平衡凝固时的固相和液相的种类、数量、溶质浓度等基本信息。

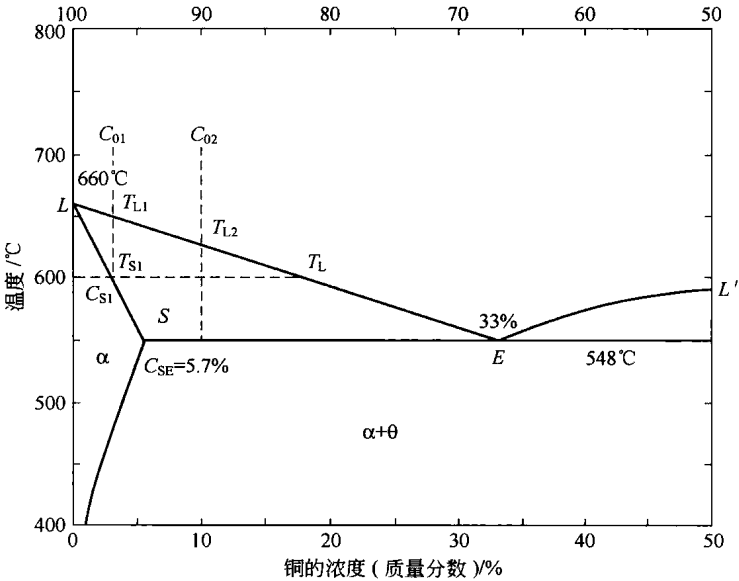


图 1-7 Al-Cu 二元合金的平衡状态图

① 液相线、固相线和共晶线。图 1-7 曲线 LE 、 $L'E$ 是液相线，该液相线上的温度叫液相线温度，其上方是液相区。 LS 是固相线，该固相线上的温度叫固相线温度，在它的下方为固相区。直线 SE 是共晶线，两种固相（Al-Cu 系 α 相和 θ 相）会同时析出。

② 固液共存区。液相线和固相线，还有共晶线所围成的区域（ LES ）是液相，固相共同存在的区域。凝固是从液相线温度（ T_L ）开始，至固相线温度（ T_S ）或共晶温度（ T_E ）结束，这之间的温度范围称为凝固区间或凝固温度范围。该范围越大越容易产生缩孔缺陷。

③ 固相浓度、液相浓度和平衡分配系数。液相中溶质浓度 C_0 的合金被冷却至固液共存区，发生凝固，浓度 C_S 的固相和浓度 C_L 的液相，这两种浓度是不同的，从固相线和液相线上可以读出。例如，图 1-7 中 600°C 时固相（ α 相）浓度为 3%，液相浓度约 17.5%。此时固相和液相的浓度比 $k_0 = C_S/C_L$ 被称为平衡分配系数。

④ 固相率、液相率和杠杆定律。从质量守恒出发， $\rho_S V_S + \rho_L V_L = \rho V$ ，可得到 $\rho_S V_S / \rho V + \rho_L V_L / \rho V = 1$ ，即 f_S （固相率）+ f_L （液相率）= 1。假设固相和液相的密度、溶质浓度分别为 ρ_S 、 ρ_L 和 C_S 、 C_L ，满足质量守恒原理， $\rho_S V_S C_S + \rho_L V_L C_L = \rho V C_0$ （ ρ 、 C_0 分别为凝固前的密度、浓度）可推得 $f_S = (C_L - C_0) / (C_L - C_S)$ ，即杠杆

定律。

⑤ 冷却曲线。从相图可以了解到凝固时的温度变化，即冷却曲线的模式。图 1-7 中的浓度 C_{01} 、 C_{02} 的合金以及其缓慢的速度能得到图 1-8 所示的冷却曲线。

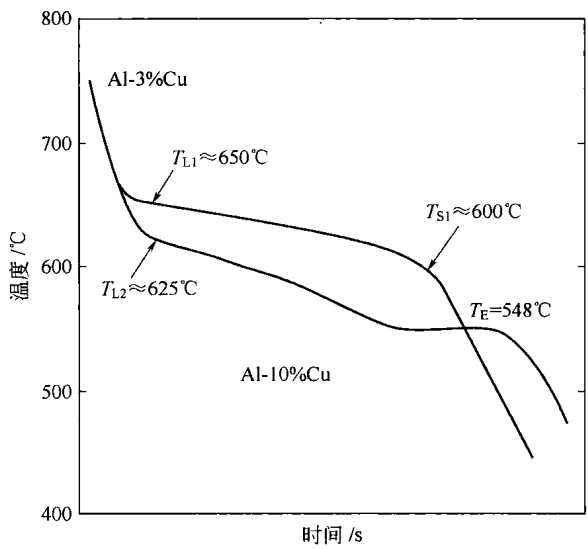


图 1-8 凝固时的冷却曲线

对于浓度 C_{01} 的合金，从液相线温度 T_{L1} 开始凝固，随着潜热的放出冷却速度降低。到达 T_{S1} 时凝固结束无潜热再放出，所以冷却速度又变快。浓度 C_{02} 的合金在 T_{L2} 时冷却速度发生变化，到达共晶温度 T_E 为止随着固相析出，潜热的不断放出，温度下降。到达共晶温度 T_E 时，从杠杆定律可推算出固相率 f_S ，例如， $C_{02} = 10\%$ ， $f_S = (33 - 10) / (33 - 5.7) \approx 0.84 = 84\%$ ，则液相率为 16%，这部分液体全部转换为固相后，潜热就停止放出，冷却速度再次变快。

(2) 非平衡凝固 如上所述的是平衡凝固，即以充分缓慢的速度冷却，使扩散充分进行，但对实际问题应当考虑非平衡凝固。

① 过冷。温度虽达到液相线温度 T_L 但凝固并不开始，在 T_L 以下的某个温度 T'_L 才开始凝固。这个温度差 $\Delta T = T_L - T'_L$ 被称为过冷度。

② 溶质分布。平衡凝固时析出固相的溶质浓度是随固相线而变化，由于充分的扩散使溶质移动，得到

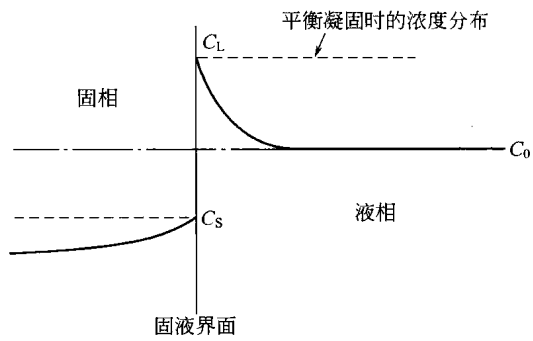


图 1-9 局部平衡凝固的溶质分布