



譯 者 序

薛爾吾與泰勒兩氏所著的微積分一書，是今日大專各校共同採用的初等微積分最優良教本。譯者不揣譾陋，將這中文譯本介紹給研習此書的讀者，以節讀者推敲英文語句之勞，而能專注於數學理論的探索。

本書所用數學譯名均以最通用者為準，使讀者於參考他書時，不致感到困難。

本書的譯述，以直譯為主，內容力求忠實，文字力求流暢；但紕謬之處，在所難免，希讀者隨時見示為幸。

四十六年八月 譯者謹識

著 者 序

本書旨在對微積分之基本原理與運算法以及實際運用，作一完整而有系統之介紹。此一版本（第三版）在原則上與前二版完全一致；但在學理之闡明，圖形之繪製，章節之編排，及練習之選取等方面頗有改進之處，此種更動，均為著者與其同事以及在教學上使用本書的人士，研討所得之結論，其目的在使讀者能有一更清晰有味而多益之教科書。

本書在使讀者對於微積分之觀念及其應用，能有較透澈之了解，對於微積分之邏輯結構亦能領悟，並給予讀者各種解題之經驗與訓練。在例題與習題之選取，不局限於數學一科，亦包括物理學，化學，工程學等，並略涉經濟學與其他科目。

研習微積分時，讀者首應對極限法深思熟練，而教師亦應首先注意於指導學生對極限之基本定義與定理能有充分了解，由此而瞭然於微積分的結構上之邏輯協調，且使讀者對極限觀念能作有效而合理之運用。極限之觀念，不能完全依賴於讀者直覺上之領悟。而在日常所接觸之幾何及物理問題中，隨時需仔細培養其對極限方法之了解，但讀者應由基本定義及假設開始，體會微積分之數學推理，一若幾何及其他科目然，進而將各個可以正確表達與證明定理之推演予以系統化，讀者更需明白導數之定義實乃極限之一例，而微分運算之技巧實基於極限之和，積與商等定理之運算。定積分之觀念，亦為有別於導數之另一極限記法之運用。藉一連串之一般性定理之連繫，吾人得知如何利用反微分法以計算積分之值。

本版之特色，厥為反微分法之提前介紹，在第二章 §16, 17, 與 18 中即將此問題提出，但在該處，反微分法僅限於多

項式而已。同時，在此並有一節討論其對於直線運動之速度與加速度之運用，對於兼習物理學之讀者，此等介紹頗為有益。由於第一章中對於曲線面積之討論及定積分之概略定義，（即將一區域分為 n 個相同之區域。）以及第二章中運用反微分法求面積之介紹，俾初學者亦能計算簡單之面積問題。

微分與積分關係之完整討論，見於第九章。定積分被定義為近似和之極限值；而積分與微分之連繫亦於此時以解析法導出；在此以前，積分一詞實即為反微分法。事實上若欲對積分觀念澈底了解，此種處理方法極為重要。

物理與幾何上量之定義法與積分之定義法極為相似，但不完全相同。吾人可依一般性之推理，將其表之為定積分；若將此項理論予以公式化，即吾人所謂之杜漢莫原理，若 §93 所述，此一原理之主要部份多成於歐斯古教授之手。鑑於此一原理係由於以均勻連續性之觀念為其出發點，本書無需加以證明。吾人討論杜漢莫原理之目的有二：（一）在證明若吾人對弧長，旋轉體之形心等定義，能予以仔細研討，則吾人所了解者即不僅限於定積分之定義而已；（二）在使吾人對此類問題之處理，有一系統化之步驟。

第一，二，十四，十五及十六章中，均經極大之變動，在其他各章中亦略有更改，導數之觀念儘先予以介紹；在新版中，第一章形式之改進，可使初學者不致對本科感到畏懼，並藉以便利對於微積分基本概念與各項有趣的應用之介紹。極限之和積與商之基本定理在第一章中即予以敘述，但其證明留在第十四章中始再加討論。與三角函數有關之極限定理均由第一章移至第五章，第五章與附錄所討論之 e 均重加改寫，不定積分則由第十一章移至第十四章，洛霍斯比特法則之證明，包括有 $\frac{\infty}{\infty}$ 之形式，均經重新校訂，但此法則之運用早在第六章中即

已提及，柯熙之收斂原理及有界單調叙列之收斂性，都曾從新改稿，無窮級數之處理及函數之冪級數展開式等之先後次序亦已重行安排；由於此類編排之更改，本書較前二版更具伸縮迴轉之餘地。同時吾人並插入泰勒公式之積分形式之討論，而關於冪級數運算之研討，亦較前版詳盡。

不論對教師與學生而言，微積分之教學均不宜刻板，隨歲月之推進，吾人對微積分之意旨與目標均時有更改，且希冀有更新之途徑，以達成此目的。本書所有改進之處，有類於同仁之合作與同學對優劣各點之指出，謹在此一併致謝。

薛爾吾

泰勒

致 讀 者

何謂微積分，諸君現尙茫然無知；因此，吾想在研習本學科之前，先就微積分之內容與應用，作一簡略的介紹。

微積分主要之用途是在物理與幾何上之應用，它能使吾人對許多物理現象作有效之研究，例如：速度；加速度；受已知力作用之運動的一般性質；已知條件下已知力所做的功；液體對於容器所施之力；各種不同形狀與組成之物體間之吸引力。在另一方面它能使吾人計算或度量若干重要事物，例如：面積；體積；不均勻密度物體之質量；物體質量中心之位置，物體對一軸旋轉時之轉動慣量。此外，電磁學之定律，原子物理之所有發展，均有賴於微積分之幫助而能“百尺竿頭，更進一步”。

除此以外，化學，生物學及其他自然科學均有賴於微積分之運用以推廣之；在經濟學之探討中，微積分之重要性亦與日俱增。

至於研習微積分之方法，諸君可由已熟悉之科目，如：代數，三角及幾何科中引伸得之，此外，吾人並引用極限法爲其新觀念，此極限觀念爲微積分最重要之基石，無此，微積分將無以發揮其功效。是以在本書首章即論到極限觀念，而在第十四章中，再作更深入之探討，但僅由此兩章，諸君並不能對極限獲得明確印象，必須繼續不斷的體驗其在各種不同情形下所發現時之意義，方能澈底領悟。

如同研究其他數學科目一般，在研究微積分時，諸君必須養成一種良好之習慣。在閱讀書本時，必須預備紙筆，以便在發現任何疑難時得隨時練習。並望將各例題自行演算一次，以補足書中所省略之處。演算習題時，須憑自己的思考，全力以

赴，使能對各種方法深切了解，以減少對於書本之依賴。由於此種方法，諸君將能解決所有之困難問題。

薛爾吾
泰勒

希臘字母、參考公式及表格

I. 希臘字母

字母	讀音	字母	讀音	字母	讀音
A	α alpha	I	ι iota	P	ρ rho
B	β beta	K	κ kappa	Σ	$\sigma\varsigma$ sigma
Γ	γ gamma	Λ	λ lambda	T	τ tau
Δ	δ delta	M	μ mu	Υ	υ upsilon
E	ε epsilon	N	ν nu	Φ	ϕ phi
Z	ζ zeta	Ξ	ξ xi	χ	χ chi
H	η eta	O	o omicron	Ψ	ψ psi
Θ	θ theta	Π	π pi	Ω	ω o mega

II. 初等幾何學

1. 設 r 表半徑; h 為高度; B 為底面積; θ 為中心角 (弧度); s 為 θ 所對之弧長; l 為斜高, 則可有下列各公式:

圓: $s = r\theta$, 周長 $= 2\pi r$, 面積 $= \pi r^2$, 扇形面積 $= \frac{1}{2}r^2\theta$.

弓形面積 $= \frac{1}{2}r^2(\theta - \sin \theta)$.

球: 體積 $= \frac{4}{3}\pi r^3$, 表面積 $= 4\pi r^2$.

球之切割體: 體積 $= \pi h^2\left(r - \frac{h}{3}\right)$, 面積 $= 2\pi hr$.

角柱: 體積 $= Bh$.

角錐體: 體積 $= \frac{1}{3}Bh$.

正圓柱體: 體積 $= \pi r^2h$, 側面積 $= 2\pi rh$.

正圓錐體: 體積 $= \frac{1}{3}\pi r^2h$, 側面積 $= \pi rl$.

2. 三角形: 面積 $= \frac{1}{2}ab \sin C$, a 及 b 為二邊長, C 為其夾角.

3. 平行四邊形：面積 $= ab \sin C$, a 及 b 為二相隣邊, C 為其夾角.

4. 圓錐臺或角錐臺：體積 $= \frac{1}{3} (B_1 + B_2 + \sqrt{B_1 B_2}) h$, B_1, B_2 為二底面積, h 為高.

III. 初等代數

1. 二次方程式：若 $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$. 則

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2. n 次一般方程式：方程式 $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$ ($a_0 \neq 0$, n 為正整數, a_i 為實數) 必有 n 根, 其中重根均一一計算, 而虛根必成對出現.

3. 對數： $\log_b N = x$ 表示 $b^x = N$, $\log_b b = 1$, $\log 1 = 0$,
 $\log xy = \log x + \log y$, $\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$, $\log x^n = n \log x$
 $\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b}$, $b \neq 1$, $c \neq 1$.

4. 二項式定理：(n 為正整數)

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2}b^2 + \cdots \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!} a^{n-r}b^r + \cdots \\ &+ nab^{n-1} + b^n \end{aligned}$$

此處

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!} = {}_n C_r$$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1, \quad 0! = 1$$

5. 算術級數： $a, a+d, a+2d, \cdots$, a 為首項, d 為正差, n 為項數, S 為 n 項之和, l 為末項(第 n 項).

$$l = a + (n-1)d, \quad S = \frac{n}{2}(a+l), \quad A = \frac{a+b}{2}$$

A 爲 a 及 b 之算術平均值.

6. 幾何級數: $a, ar, ar^2, \dots, a$ 爲首項, r 爲公比, n 爲項數, S_n 爲 n 項之和, l 爲末項 (第 n 項). $l = ar^{n-1}$, $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$, $G = \sqrt[n]{ab}$. G 稱爲 a 及 b 之幾何平均值 (a, b 爲正).

$$S_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-r}$$

其充要條件爲 $r^2 < 1$.

$$7. \text{調和級數: } \frac{1}{a}, \frac{1}{a+d}, \frac{1}{a+2d}, \dots, \quad H = \frac{2ab}{a+b}$$

H 稱爲調和中項. $G^2 = AH$.

8. 排列與組合: 於 n 中取 r .

$${}_nP_r = n(n-1)\dots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}, \quad 0! = 1$$

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r(r-1)\dots 1} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \\ = {}_nC_{n-r}$$

9. 行列式: n 階行列式.

$$D \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

共 n^2 元素, 於展開式中有 $n!$ 項.

$$D = \sum (\pm) a_{1i} a_{2j} a_{3k} \dots a_{ni}$$

式中符號之選擇視其中一組足數 $i, j, k, \dots, l$ 依次序排列時, 另一組足數 $1, 2, 3, \dots$ 之逆序數目爲奇爲偶而定. 奇數取負,

割外，下列各函數亦常採用。 versine $\theta = \text{vers } \theta = 1 - \cos \theta$;
 coversine $\theta = \text{covrs } \theta = 1 - \sin \theta$; haversine $\theta = \text{hav } \theta =$
 $\frac{1}{2} \text{vers } \theta$; exsecant $\theta = \text{exsec } \theta = \sec \theta - 1$.

三角函數之圖示：

OP 為單位圓， $\sin \theta = MP$ ， $\cos \theta = OM$ ， $\tan \theta = AT$ ，
 $\text{ctn } \theta = BR$ ， $\sec \theta = OT$ ， $\csc \theta = OR$ ， $\text{vers } \theta = MA$ ， covers
 $\theta = SB$ ， $\text{hav } \theta = \frac{1}{2} MA$ ， $\text{exsec } \theta = PT$.

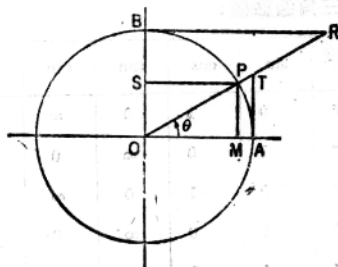


圖 1

四象限中六函數之符號：

$\sin$	}	+	全部 +	x
$\csc$				
其他				
$\tan$	}	+	全部 +	y
ctn				
其他				

化為第一象限角之公式：

	$-\theta$	$90^\circ \pm \theta$	$180^\circ \pm \theta$	$270^\circ \pm \theta$	$*k(360^\circ) \pm \theta$
sin	$-\sin \theta$	$+\cos \theta$	$\mp \sin \theta$	$-\cos \theta$	$\pm \sin \theta$
cos	$+\cos \theta$	$\mp \sin \theta$	$-\cos \theta$	$\pm \sin \theta$	$+\cos \theta$
tan	$-\tan \theta$	$\mp \cot \theta$	$\pm \tan \theta$	$\mp \cot \theta$	$\pm \tan \theta$
ctn	$-\cot \theta$	$\mp \tan \theta$	$\pm \cot \theta$	$\mp \tan \theta$	$\pm \cot \theta$
sec	$+\sec \theta$	$\mp \csc \theta$	$-\sec \theta$	$\pm \csc \theta$	$+\sec \theta$
csc	$-\csc \theta$	$+\sec \theta$	$\mp \csc \theta$	$-\sec \theta$	$\pm \csc \theta$

* k 爲任意整數

特別角之三角函數值：

角 度 (弧)	角 度 (角)	sin	cos	tan	ctn	sec	csc
0	0°	0	1	0	∞	1	∞
$\frac{1}{2}\pi$	90°	1	0	∞	0	∞	1
π	180°	0	-1	0	∞	-1	∞
$\frac{3}{2}\pi$	270°	-1	0	∞	0	∞	-1
2π	360°	0	1	0	∞	1	∞
$\frac{1}{6}\pi$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2
$\frac{1}{4}\pi$	45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{1}{3}\pi$	60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$

三角恆等式：

$$\sin \theta \csc \theta = 1; \cos \theta \sec \theta = 1; \tan \theta \cot \theta = 1;$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}.$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1; \tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta; \cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta.$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta; \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}.$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta.$$

$$\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta; \cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta.$$

$$\sin k\theta = 2 \sin (k-1)\theta \cos \theta - \sin (k-2)\theta;$$

$$\cos k\theta = 2 \cos (k-1)\theta \cos \theta - \cos (k-2)\theta.$$

$$2 \sin^2 \theta = 1 - \cos 2\theta; 2 \cos^2 \theta = 1 + \cos 2\theta;$$

$$\tan^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}.$$

$$1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}; 1 + \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2};$$

$$\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \tan \frac{\theta}{2}.$$

$$4 \sin^3 \theta = 3 \sin \theta - \sin 3\theta; 4 \cos^3 \theta = 3 \cos \theta + \cos 3\theta.$$

$$\sin \theta + \sin \phi = 2 \sin \frac{\theta + \phi}{2} \cos \frac{\theta - \phi}{2};$$

$$\sin \theta - \sin \phi = 2 \cos \frac{\theta + \phi}{2} \sin \frac{\theta - \phi}{2}.$$

$$\cos \theta + \cos \phi = 2 \cos \frac{\theta + \phi}{2} \cos \frac{\theta - \phi}{2};$$

$$\cos \theta - \cos \phi = -2 \sin \frac{\theta + \phi}{2} \sin \frac{\theta - \phi}{2}.$$

$$\sin (\theta \pm \phi) = \sin \theta \cos \phi \pm \cos \theta \sin \phi;$$

$$\cos (\theta \pm \phi) = \cos \theta \cos \phi \mp \sin \theta \sin \phi;$$

$$\tan (\theta \pm \phi) = \frac{\tan \theta \pm \tan \phi}{1 \mp \tan \theta \tan \phi}.$$

$$\sin \theta \sin \phi = \frac{1}{2} \cos (\theta - \phi) - \frac{1}{2} \cos (\theta + \phi).$$

$$\cos \theta \cos \phi = \frac{1}{2} \cos (\theta - \phi) + \frac{1}{2} \cos (\theta + \phi).$$

$$\sin \theta \cos \phi = \frac{1}{2} \sin (\theta - \phi) + \frac{1}{2} \sin (\theta + \phi).$$

一平面三角形，三邊爲 a, b, c ，其對角各爲 A, B, C 。
 s 爲半周長， R 爲外接圓半徑， r 爲內切圓半徑，

$$\text{正弦定理：} \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$\text{餘弦定理：} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\text{面積} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} = rs$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{abc}{4R}$$

V. 平面解析幾何

1. P 點之直角坐標 (x, y) ，極坐標 (r, θ) 。則直角坐標與極坐標之關係如下：

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned} \right\}; \quad \left. \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{aligned} \right\}$$

2. 二點間距離及斜率。

二點 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$

距離 $P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

若 P_1P_2 與正 x 軸夾一正角 ϕ ，則 P_1P_2 之斜率 $= \tan \phi = m$
 $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ 。

若二直線其斜率爲 m_1 及 m_2 ，則夾角 β 由下式得之，

$$\tan \beta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

僅當 $m_1 = m_2$ 時，二直線平行。

僅當 $m_1 m_2 = -1$ 時，直線互相垂直。

將 P_1P_2 分成 $r_1:r_2$ 之點之坐標爲 $\left(\frac{r_1 x_2 + r_2 x_1}{r_1 + r_2}, \frac{r_1 y_2 + r_2 y_1}{r_1 + r_2} \right)$

3. 三角形之面積. 三頂點爲 P_1, P_2, P_3 . 則面積爲

$$\pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{當 } P_1, P_2, P_3 \text{ 之次序依反時鐘方向時, 取正號.}$$

4. 直角坐標之變換.

(1) 將新原點平移至 (h, k) , 新軸與原軸平行.

$$x = x' + h$$

$$y = y' + k$$

(2) 對原點將軸轉 θ 角

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

5. 直線.

(1) 由二獨立條件所決定方程式之形式有下列各種:

(a) 斜截式: $y = mx + b$;

(L) 點斜式: $y - y_1 = m(x - x_1)$;

(c) 二點式: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$;

(d) 截距式: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, (a, b \neq 0)$;

(e) 法線式: $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$;

(f) 一次一般式: $Ax + By + C = 0$.

(2) 由 $P_0(x_0, y_0)$ 至直線 $Ax + By + C = 0$ 之距離.

$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}$$

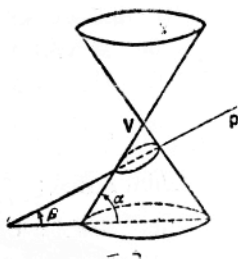
6. 直角坐標二次方程式之軌跡.

(1) 圓心於 (a, b) , 半徑爲 r 之圓: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

(2) 橢圓: $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$. 中心在 (h, k) , a, b 爲半軸. 若長軸平行 x 軸, 則自中心 (h, k) 至焦點之距離爲 $\sqrt{a^2 - b^2}$; 正焦弦長 $= \frac{2b^2}{a}$; 離心率 $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$. 準線方程式 $x-h = \pm \frac{a}{e}$. 若 P 爲橢圓上任一點, F 及 F' 爲二焦點, 則 $PF + PF' = 2a$.

(3) 雙曲線: $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$. 中心在 (h, k) , a, b 爲半軸. 貫軸平行 x -軸; 中心至任一焦點之距離爲 $\sqrt{a^2 + b^2}$, 正焦弦長 $= \frac{2b^2}{a}$, 離心率 $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$, 準線方程式 $x-h = \pm \frac{a}{e}$, 漸近線方程式 $y-k = \pm \frac{b}{a}(x-h)$. 若 P 爲雙曲線上任一點, F, F' 爲二焦點, 則 $PF - PF' = 2a$.

(4) 拋物線: $(y-k)^2 = 4p(x-h)$, 頂點在 (h, k) . 拋物線之軸平行 x -軸, p 爲頂點至焦點之距離, 並等於頂點至準線之距離. 正焦弦長 $= 4p$, 離心率 $e = 1$. 準線方程式: $x-h = -p$.



(5) 雙葉正圓錐體之切面: α 爲圓錐週邊與垂直於軸之任一平面所交之定角, β 乃爲任意平面 p 與垂直於軸之任一平面所交之變角. 則一般二次方程式爲:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}$$