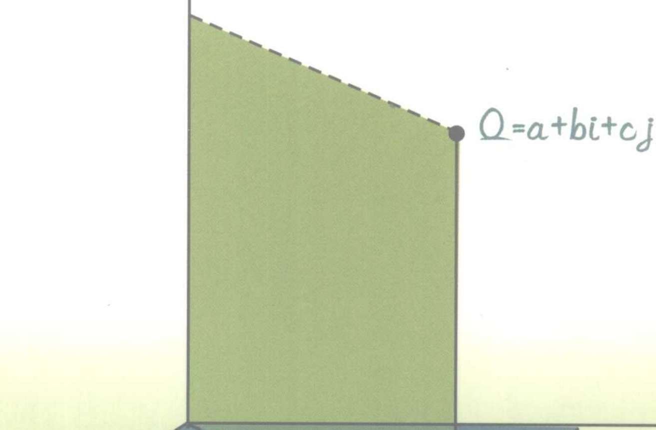
The discussion on theory of Super-variable function

超变函数论

周 军 徐红霞
于涤尘 著
朱秀莲 孙大为



陕西科学技术出版社

中英文对照

超变函数论

于涂尘 周军 徐红霞 朱秀莲 孙大为 著

陕西科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

超变函数论/于涂尘等著.—西安:陕西科学技术出版社,2005.5
ISBN 7-5369-3960-4

Ⅰ.超... Ⅱ.于... Ⅲ.函数论 Ⅳ.0174

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 055095 号

出 版 者	陕西科学技术出版社 西安北大街 131 号 邮编 710003 电话(029)87211894 传真(029)87218236 http://www.snstp.com
发 行 者	陕西科学技术出版社 电话(029)87212206 87260001
印 刷	长安大学雁塔印刷厂
规 格	850mm×1168mm 32 开本
印 张	4
字 数	100 千字
印 数	1-1000
版 次	2005 年 6 月第 1 版 2005 年 6 月第 1 次印刷
定 价	10.00 元

序

由第四运算引出的一门新的数学——《超变函数论》,是一片待开垦的沃土。在这块土地上我艰难奋斗,苦苦耕耘了四十余年。

错误的但却又是强大的"复数域封闭"论,使这门新生的、将会使物理学发生巨大变革的数学面临夭折的境地。

我曾经灰心过!欲驾一叶轻舟,垂钓于山水之间,再也不想去眷恋它。后来,在我最亲密的朋友的鼓励下,我又重新奋起,本着对数学研究的执著与责任,现将已研究成熟的部分成果编撰成书,宣示世人,以期得到同志同行的支持和探讨。

美国北卡莱罗纳大学卫国教授和他的同事们是《超变函数论》的知音。他们给了这门数学以高度的评价,指明了它在物理学上应用的前景。正因为这样,才坚定了我出书的信念。

历史将铭记:智慧的卫国教授是《超变函数论》的助产师!

本书的译制工作由长安大学朱秀莲老师、陕西省科学技术信息所白葆红女士主持完成,大连理工大学孙大为老师在计算机上检验了"超复数"的代数运算各个公式的正确性,长安大学周军博士与乌鲁木齐市第四中学徐红霞老师对此书给予了很大的支持,提供了许多有益的建议。

有人说,天才数学家提出问题,高明数学家解决问题。我在此再补充两句:严密的数学家完善着这个问题,挑剔的数学家修饰和发展着这个问题。不管您属于上述哪一类数学家,我都把您的关注,您的意见视为上帝赐予给这门数学的福音!

于涤尘

2005.2.18 于西安

E-mail:ydc20031@hotmail.com

北卡莱罗纳大学卫国教授关于本文的意见*

"The Introduction of Super – Variable Function"

1. The research topics/problems and applications are interested by those who study Foundations of Mathematics including Field Theory and Complex Analysis, and Fluid Mechanics/Dynamics.

2. The research proposes a frame work (outlines) on the so – called "Super numbers, and Super – variable functions and their analytic conditions".

3. The contribution of this research to the Field Theory: The well – known Fundamental Theorem of Algebra says that the field of complex numbers is algebraically closed (i. e., every polynomial equation over this field can be completely solved, or any polynomial of degree 1 or higher over the field of complex numbers can be factored completely into a product of linear factors including multiplicity). The new number system intended to build in this paper is not through an ordinary/usual algebraic extension, nor through the ordinary transcendental extension (because the resulting structure is no longer an ordinary field). It is extended in terms of a transcendental equation (not an algebraic equation), i. e., $z^z = w$, and the resulting structure is new and has not been discovered before. On the other hand, it is necessary to include detailed operational properties of the super – numbers. For instance, what exact properties the ad-

* 这是卫国教授应西北大学学报(网络版)的要求,为作者的文稿《超变函数探讨》等的审稿意见。

dition holds, what exact properties the multiplication holds, and what exact relationship, e.g., distributive laws etc, exists between addition and multiplication? It would be more interesting to compare all the properties of super numbers and that of ordinary complex numbers, again in details.

4. The contribution of this research to the Fluid Mechanics/Dynamics: For three dimensional (and n-dimensional in general) vector fields, potential, flow, flux, rotational and circulation are critically important concepts. The paper intends to study these concepts in terms of the supper variable function defined on the structure of super numbers. The methods are similar to that for two dimensional vector fields, e. g., analytic conditions for supper variable functions. The results would be useful for both theory and application involving higher dimensional vector fields.

5. Reference books and papers, if any, should be indicated and their sources should be included. The paper should be organized in the correct format required for publication.

6. This paper can be considered as a typical research paper. The paper needs to be revised and clarified for publication, because of the reasons specified in 3, 4 and 5 above.

Guo Wei, Ph.D.
Dept of Mathematics & Computer Science
University of North Carolina at Pembroke
Pembroke, NC 28372
U.S.A.
Phone: (910) 521 6582
E-mail: guo.wei@uncp.edu

卫国教授意见的译文(节选)

“超变函数论的介绍”

1. 这个课题的研究、应用将使那些学习基础数学包括场论和复分析以及流体力学的人感到兴趣。

2. 这项研究提出了一个框架(大纲)被称为“超数和超变函数以及它们的解析条件”。

3. 本文对场论研究的贡献:众所周知,根据代数学基本原理,复数是完备的(即,n 次方程式在复数域中是可求解的,或者说,任意 n 阶多项式可以表示成一次因式的连续乘积的形式),本文中创建的超数体系不是通过平常代数扩充得出,也不是一般代数方程的扩充(因为它的结果、结构已不属于代数域),而是通过超越方程扩充得出的,也就是 $Z^Z = W$。它得出的结果是全新的,是以前尚未发现的数学体系。另一方面(既然是新的数学体系)它必须包含对这样的超数具体的运算特性,例如,它的加法有哪些属性,乘法有哪些属性及其他有关的运算规则是什么?比较这类超数和一般数系之间的差别,将是很有意义的。

4. 本文对流体动力学的贡献:势、统、墒、旋度和环流量是三维(一般是 n 维)向量的重要概念,该文用超变函数的术语研究这些概念,其方法类似二维向量中的方法。举例来说,超变函数的解析条件其结果将会对高维向量的理论和应用有益。

Guo Wei, Ph. D. (卫国)
Dept of Mathematics & Computer Science
University of North Carolina at Pembroke
Pembroke, NC 28372
U. S. A.

目　　录

1 引论

1.1 历史的记录

我们先引入俄罗斯数学家 А. Д. Алексадров 在《数学——它的内容、方法与意义》中关于超复数研究的一段历史记录。

应用代数方法解决实际问题时，在比较简单的情形，通常归结为一个或若干个方程，其中以所要求的值作为其未知量。这时未知量是所研究对象的数量描述；而方程的布列是借分析对象间存在着的实际关系而得出。

当所讨论的最简单的量是类似于质量、体积、长度的这些情形，为了描述它们的数量，用一个数即已足够。然而，在一些具体问题中，常遇到不仅仅用于一个数描述的对象。恰恰相反，随着技术的发展，具有较复杂性质的对象，常具有较大的价值，而描述它们，必须要用到几个数甚至是无限多个数。例如像力、速度、加速度这样一些重要的物理量，描述它们，就需要三个数。其次，我们都知道，描述空间中点的位置，需要用三个数，描述空间中平面的位置，也要用三个数，而描述空间中直线的位置，需要用四个数，而刚体的位置，甚至需要用六个数来描述。因此，在利用代数方法解决涉及较复杂对象的问题时，常会得到多个未知量的方程。而解这样的方程，常常比利用这个对象的几何性质或物理性质直接解答困难得多。由此自然发生这样的思想：企图描述较复杂的对象，不利用一组通常的数，而是利用某种较复杂的广义的数，对于这种

广义的数，也可以施行与通常算术运算类似的运算。问题的这样提法是比较自然的，科学的历史告诉我们，数的概念不是不变的，而其变化，都是逐次扩张数的集合。由自然数扩张至分数，然后由分数扩张至正负数，至实数(有理数与无理数)，最后，至复数。

复数 读者已经知道复数的基本性质及其简单应用。现在，我们的兴趣仅在于复数概念的基础。让我们回忆一下复数概念的本身通常是如何定义的。开始仅讨论通常的实数，并指出负数的平方根没有意义，因为实数的平方是正数或者零。进一步指出，科学的迫切需要，使得数学家作为一种特殊种类的数来讨论表示式 $a+b\sqrt{-1}$，把它称之为虚数，以区别于通常的实数。如果认定这些虚数也适合通常的数所适合的算术运算法则，则所有负数的平方根都可用量 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 来表示，而对实数和虚数进行有限次算术运算的结果，永远可表示为 $a+b\mathrm{i}$ 的形状，此处 a,b 是实数。

显然，虚数这样的定义在很大程度上是与正常的思维矛盾的，因为开始断言表示式$\sqrt{-1}$，$\sqrt{-2}$ 等等没有意义，然后又称这些没有意义的表示式为虚数，这种情况使得 17 世纪和 18 世纪的数学家对使用复数的合理性引起极大怀疑。但是，这种怀疑在 19 世纪初便消失了，因为这时发现了复数用平面上点的几何表示。稍后不久，匈牙利数学家伯依阿依和英国数学家汉弥登给出了复数理论严格的纯算术的基础，这个基础叙述在下面。

讨论实数对(a,b) 以代替数 $a+b\mathrm{i}$。两个数对当它们的第一个位置的数和第二个位置的数分别相等时，称之为相等的数对，即当且仅当 $a=c,b=d$ 时，认为$(a,b)=(c,d)$。数对的加法和乘法用下面式子来定义：

$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$；$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$。例如，我们有

$(2,3)+(1,-2)=(3,1)$，$(2,3)\cdot(1,-2)=(8,-1)$，

$(3,0)+(2,0)=(5,0)$，$(3,0)\cdot(2,0)=(6,0)$。

后面的例子告诉我们，特别当数对的第二个位置的数是 0 时，这时数对的运算可归结为第一个位置的数的运算，因此，这样的数对可简单的用其第一个位置的数来表示。其次，对于数对(0,1)，我们用符号来表示，于是，有

$$(a,b)=a(1,0)+b(0,1)=a+bi,$$
$$i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1.$$

这样，便得出了复数的通常表示法。

因此，从叙述的观点来看，复数是普通实数的数对，复数的运算不过是特殊种类的实数对的运算。

超复数　复数的多种多样有成效的应用，促使数学家在 19 世纪头几十年就考虑这样问题：是否可以像由实数对建立复数那样，由三个实数的数组、四个实数的数组等等建立超复数。从上一世纪的中叶开始，各种各样不同的特殊的这类超复数被研究着，而在上一世纪末以及本世纪初研究了超复数的一般理论，并且发现它在数学和物理的相间领域中有着许多的重要应用。

这样，称 n 个实数的数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 为 n 阶超复数，其中的每一个实数，称之为这个超复数的坐标。两个超复数 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 与 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 当其对应坐标相等，即 $a_1=b_1,a_2=b_2,\cdots,a_n=b_n$ 时叫作相等的。加法运算自然的被类似于复数的加法公式所定义，即

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)+(b_1,b_2,\cdots,b_n)=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n).$$

很自然地引入实数对超复数的乘法：规定

$$a(a_1,a_2,\cdots,a_n)=(aa_1,aa_2,\cdots,aa_n).$$

除此之外，应规定两个超复数的乘法，而且，其结果应该是一个超复数。

把通常复数的乘法定义推广到一般情形是很困难的。乘法可以用各种不同的方法来定义，因而将得出各种不同的超复数系。因

此，首先应该弄清楚，这样的定义应该达到什么目的。毫无疑问，希望所定义的超复数的运算将具有通常实数运算所具有的性质。然而，这些通常运算具有哪些性质？

仔细地考查数及其运算在代数上最常利用的性质，很容易发现，可归结为以下几条：

(1) 对于任意两个数，它们的和是唯一确定的。

(2) 对于任意两个数，它们的积是唯一确定的。

(3) 存在着一个数零，它具有性质：对于任意 a，均有 $a+0=a$。

(4) 对于每一个数 a，均存在其负数 x，适合等式 $a+x=0$。

(5) 加法适合交换律

$$a+b=b+a。$$

(6) 加法适合结合律

$$(a+b)+c=a+(b+c)。$$

(7) 乘法适合交换律

$$ab=ba。$$

(8) 乘法适合结合律

$$(ab)\cdot c=a\cdot(bc)。$$

(9) 乘法对加法适合分配律

$$a(b+c)=ab+ac,(b+c)a=ba+ca。$$

(10) 对于每一 a 以及每一 $b\neq 0$，存在唯一的数，满足等式 $bx=a$。

仔细分析的结果，得出了上面性质 1—10。近百年来数学的发展指出这些性质的极大重要性。现在，每一个满足性质 1—10 的量的系统，称之为域。例如，全体有理数的集合、全体实数的集合、全体复数的集合都是域，因为，对于这些集合中的每一个数来说，任意两个数的相加、相乘都还在这个集合内，并且具有性质 1—10。除了这三个最重要的域外，可以举出数所做成的无限多个域。然

而，除了数目做成的域以外，对于其他性质的量所做成的域，我们也有很大的兴趣。例如，在中学，我们曾对被称之为代数分式的东西进行过运算，所谓代数分式，即这样的分式，其分子分母都是某些字母的多项式。代数分式可以相加、相减、相乘、相除，而且这些运算具有性质 1—10。因之，代数分式所组成的元素的系统是一个域。可以举出各种各样的由具有复杂性质的量所组成的域的例子。由于作为域的定义的性质 1—10 的重要性，首先，我们将提出这样问题，求出超复数这样的乘法运算，使得超复数作成一个域。如果这样问题能够顺利解答，那么，我们将得到新的、更一般的复数。然而，在上世纪一开始，就已发现仅对于阶数 2 的超复数，这个问题才是可能的，而且得出的仅是通常的复数。这个结果指出，复数占有完善的、特殊的地位。如果不改变性质 1—10 的要求，希望得到一个广义的数系，超过复数范围，是不可能的。因此，为了进一步尝试建立新的数系，必须放弃性质 1—10 中的一个或者某几个。

1.2 历史的延伸

1.2.1 这段历史说明什么？

首先，数学界很明白，超复数在数学和物理的相间领域中有许多重要的应用。就是说，超复数的研究是客观的需求。人们都知道，不可压缩流体的势函数 $\varphi(x,y)$ 和流函数 $\psi(x,y)$ 满足复函数论的柯西 — 黎曼条件。由此，二维向量场在复数域中获得了深刻的认识。

很自然地可以提出一个问题：三维向量场的研究是否需要更广义的数域呢？就是说，数域应该由复数域继续扩充到超复数域，空间一点 $M(a,b,c)$ 应对应着一个超复数 $Q = a + \mathrm{i}b + \mathrm{j}c$。

其次，当时的人们企图沿袭由实数对建立复数那样的路线去

建立超复数,而且是在数域的10个条件下去确立超复数的运算,结果得出的仍然是通常的复数。因而得出一个结论:复数占有完善而特殊的地位。

再次,当时的人们看到,如果不改变数域性质1－10的要求,希望建立一个广义的数系,超过复数范围,是不可能的。这个认识可以说是这段历史研究的最重大的成果!

现在应如何看待这段历史研究呢?

"复数的完善而特殊的地位"是相对于数域10个条件而言,而数域10个条件是人们概括三大运算(加、乘、乘方)性质后得出。如果再有一类新的运算(第四运算)出现,且出现一类新数,那么在逻辑上就要放弃以往数域的10个条件中的一条或几条。如果这样地认识,就可得出另一个结论:走实数对建立复数那样的路线是错误的。

1.2.2 正确的研究路线是什么?

必须去建立第四运算并在此基础上去扩充数的概念,建立更广义超复数数域。这才是正确的研究路线。应该注意到一个事实:每一类运算的逆运算都导致数的概念的扩充。因此,欲要建立比复数更广义的数域,必须建立第四运算,由第四运算(第一运算:加法;第二运算:乘法;第三运算:乘方运算)的逆运算去完成数域的扩充。

这是数域扩充的唯一正确的途径。

1.2.3 复数域封闭论是错误的

有一种观点认为,当 $x^2+1=0$ 这个方程在复数域中得以求解后,任何代数方程都可解了。所以,复数域封闭了,不必再扩充了。

这似乎是目前数学界的一个定论,而且是很难冲破的定论。

是这样吗?任何代数方程在复数域中都有解这一事实,只能得出复数域具有代数封闭性!复数对解超越方程够用吗?如果不够用的话,还能说复数域是个封闭的数系吗?

显然,复数域的封闭性理论在逻辑上是不通的。武断地说“数域不必再扩充了”,则更是错误的。

1.2.4 笔者的主要结论

应该有第四运算、第五运算 …… 即运算类应是无穷类型的。

第四运算的逆运算引出一个新数 —— 空数 j,空间任意一点都对应着一个超数。

超数的运算性质放弃了通常数域 10 个条件中的“乘积唯一性”这一条件。

超变函数 $f(Q)=u(x,y,z)+\mathrm{i}v(x,y,z)+\mathrm{j}w(x,y,z)$ 的实、虚、空三部 u、v、w 的解析条件由九个偏微分方程组所确立。

笔者证明了超变函数的解析条件和积分与路径无关的等价性;解析条件与保角变换条件的等价性,给出了超变函数的初等函数的解析性的部分证明。

笔者预言,在三维向量场中,除沿主法线方向的散度、沿切线方向的旋度外,沿副法线方向上理应存在一个类似于散度和旋度的另一未知的“度”。在三维向量场中,有三个“度”才是合理的。对平面向量场,存在两个主要函数,即势函数 $\varphi(x,y)$ 和流函数 $\psi(x,y)$。于是,可以猜测在三维向量场中,除势函数 $\varphi(x,y)$ 和流函数 $\psi(x,y)$ 外,还应存在一个至今未被研究过的第三函数 $w(x,y,z)$。这三个函数应满足超变函数的解析条件。超变函数的解析条件应该是柯西 — 黎曼条件的推广。

2　第四运算与超数的代数运算

2.1　数域的扩充必须与运算类扩充联系在一起

数域的扩充课题并不是新课题。在19世纪初期，对所谓超复数的研究就曾风云一时。当时的代表人物是匈牙利的伯依阿依及英国的汉弥登，他们给出了复数理论的纯算术基础，即由实数对来建立复数[1]。

当时的数学界已经有许多可贵的理由要求数域再继续扩展下去。为此数学家们就希图沿着伯依阿依之路利用三个实数的数组或四个实数的数组等等去建立更为广义的新数域。

他们总结了截止于复数域的一切数域的10个共性，也称为数域的10个条件即：

(1) 对于任意两个数，它们的和是唯一确定的。

(2) 对于任意两个数，它们的积是唯一确定的。

(3) 存在一个数零它具有性质：对于任意 a，均有 $a+0=a$。

(4) 对于每一个数 a，均存在负数 x，适合等式 $a+x=0$。

(5) 加法适合交换律：$a+b=b+a$。

(6) 加法适合结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$。

(7) 乘法适合交换律：$a\cdot b=b\cdot a$。

(8) 乘法适合结合律：$(ab)\cdot c=a\cdot(bc)$。

(9) 乘法对加法适合分配律：$a(b+c)=ab+ac$。

(10) 对于每一 a 以及每一 $b\neq 0$，存在唯一的数 x，满足等式

$bx = a$。

围绕这 10 个条件，他们想求出超复数的乘法运算，使得超复数作为一个域，从而得到更广义的数域。但结果得出的仍然是通常的复数。

在这个研究过程中，他们得出一个重要的结论，即如果不改变上面的域的 1—10 的条件，欲建立一个广义的数域是不可能的。也就是说，新的数域必须放弃 1—10 中的某项或某几项才行。

伯依阿依和汉弥登之路到了一个突破口上。但后来人们仅仅看到了他们失败的一面，而没有看到他们揭示的突破口 —— 新数域的生命力建立在必须放弃以往全体数域的 1—10 条件中的一项或数项；反而出现了“复数占有完善而特殊的地位”的顶峰论，也称为复数域封闭论[2]。

依我的看法，数域的扩充必须与运算类的扩充联系起来，这才是唯一正确的研究路线。

2.2 第四运算与空数 j

2.2.1 运算类的扩充

数域的拓广必须与运算类的扩充紧密联系起来。为此，我们应该对人类截止到目前所具有的三大类运算加以考查，从中找出其规律性的东西。

第一运算（加法）的一般式是 $a + b = c$；其特殊式是 $a + a = c$，即两个相同的数相加。如果人们把自己的思维停滞在这里，而不升华到第二运算（乘法）的话，数学也就僵化了。人类终究做到了这一点。他们在两个相同的数相加时，把自己的思维升华成 $a + a = 2a$，新的运算产生了。