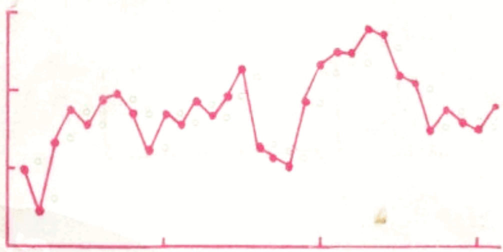
统计推断及应用

吴宝玉　姜兴起　华玉方　编著



大连海事大学出版社

统计推断及应用

上 册

吴宝玉　姜兴起　毕玉方　编著

大连海事大学出版社

(辽)新登字 11 号

图书在版编目(CIP)数据

统计推断及应用/吴宝玉编著. -大连:大连海事大学出版社,1994.11

ISBN 7-5632-0854-2

Ⅰ.统…

Ⅱ.吴…

Ⅲ.统计推断

Ⅳ.O212

中国版本图书馆 CIP 数据核字(94)第 13981 号

大连海事大学出版社出版

(大　连)

大连海事大学出版社印刷厂印刷　　大连海事大学出版社发行

1994 年 11 月第 1 版　　1994 年 11 月第 1 次印刷

开本:850×1168 毫米 1/32　　印张:9.625

字数:241 千　　印刷:001～600

定价:10.00 元

序　　言

本书是大连海事大学吴宝玉和旭川大学(日本)姜兴起、毕玉方合著的,将分成上、下两册分期出版。上册前四章论述统计推断,后两章及下册各章均论述统计推断的应用,也常称之为统计分析。

本书以讲述统计推断及应用的方法为主。除为数不多并必不可少的结论,给出了较为详细的论证外,其余书中涉及到的结论,都仅指出其证明的参考文献,供有兴趣的读者查阅,这样可减少书的篇幅。但是却详细并准确地讲述了书中所涉及到的每一个统计推断及应用的方法,还举出实例进一步说明每一种方法如何在实际问题上运用。就这一点说,本书很适合除数学专业以外的管理、理、工、农、医各专业的大学师生及工程技术人员阅读。

本册书中简明而准确地论述了一元数理统计的有关知识,是大学生学习数理统计有益的参考书。凭借作者长期在数理统计领域里的教学和科研实践,书中还提出了作者的一些新观点和新的论证方法。作者还试图用自己的工作,填平一元统计和多元统计之间的鸿沟,使理工科大学生,依靠有限的线性代数知识,能轻松地从一元数理统计过渡到多元数理统计。作者将一元和多元统计交叉地写入本书的每一章之中,有的还溶合在同一节。若能使读者对这个过渡不感到突然则是作者的愿望。

本册书还讲述了最节省样品的序贯抽样的统计推断,尤其是二阶段抽样法和序贯寿命测试的检验法是很有实用价值的方法。还讲述了从 K－L 信息量到著名的 AIC 准则的推导过程,并介绍了最近几年才渐成熟的,用最小 AIC 法识别回归和自回归模型的方法。用实例说明了最小 AIC 法的优良性。

利用统计推断及应用,解决实际问题的计算量都较大,有些求

不出解析表达式，只能求出数值解，使之不用计算机几乎无法求出解来。因此，书中稍微复杂的计算，均在书的后部配上了程序，每个程序都有若干个子程序组成，还做了使用说明，这样可改变其中的部分子程序，使程序的适用范围扩大。

本册书在我们编著和出版过程中，得到了大连海事大学和旭川大学各级领导的大力支持与鼓励，特在此向中日两所大学各级领导表示由衷的感谢，也感谢大连海事大学出版社和印刷厂各位的协助。

向曾给予作者许多关照和指导的世界著名统计学家赤池弘次博士表示真诚的感谢。向指导过该书写作的我们的老师：潘德惠教授、冯士英教授、田边国士教授、北川源四郎教授表示诚挚的感谢，也感谢为书稿和出版提出过宝贵意见的同事们：靳正大教授、刘兴权教授、邹开其教授和刘巍副教授、蔡颖副教授、刘晓东副教授等各位先生。

由于我们的水平所限和时间仓促，本册书中不够准确的地方可能不少，练习题的代表性可能不够，因此，作者热切希望各界人士及广大读者提出批评性意见，以待今后改正，谢谢各界朋友的协助。

作者

1994 年 5 月 5 日

目　录

第一章　统计推断的基本知识

统计推断是适当抽取所研究对象的一部分，利用对这一部分的观测所获得的信息，去分析和推断所研究对象全体可能具有的规律性。可见它与统计不同，但有时它也直接利用统计资料进行推断。这种依据部分去推断全体，一般不可能是确切的推断，只能是概率意义下的推断。因此概率论中的小概率事件实际不可能性原理，被广泛用在统计推断当中。就是这个统计推断，尤其利用过去和现在的资料去推断未来的状态，在促进管理工作从定性管理，发展成为定量管理中起了决定性的作用；也是研究人类社会现象和市场经济规律性的有力工具。因此高级管理人员，从事社会现象和市场经济规律性研究的人员等，都要懂得统计推断的思维方式和一些具体的作法。大的企业或事业单位都专门设立统计推断研究室，去研究与本单位有关的市场和社会等发展的趋势性和规律性，以便于利用。

§1.1　统计推断的基本概念

一、总体和样本

1. 总体：统计推断是一门应用性很强的学科，它所研究的对象都是我们日常生活当中或生产当中的实际问题。如某种物质的质量，机械零件的规格、电子元件的寿命、人们的健康状态，以及某种社会现象等等。另一方面它是数学，也就是说它不研究机械零件的制造方法，电子元件的生产工艺，而是就数量方面研究对象某一个或某几个方面的特点，通常称之为指标。

把就某个或某几个指标讲，研究对象的全体叫做总体（母体），

表成 G，并将前者叫单指标(一元)总体，后者叫多指标(多元)总体。还将所研究对象当中的每一个都叫做个体。

如研究某厂生产的某种机械零件，若研究它们的寿命时，是把就寿命这个数量指标而言该种零件的全体叫单指标总体。若研究它们的尺寸、体积和重量时，是把就这三个数量指标而言该种零件的全体叫三指标总体。

这里所谓的全体，若仅仅指存在于我们面前，供从中抽取的有限个同种类的物体时，往往就称之为抽样总体，它总是有限个。若将过去、现在和未来出现的，以及一切可能出现的同种类物体都包含在内时就称之为理想总体。由于就数量指标讲，理想总体往往是数量的无限集合，表征该无限数量集合中元素统计规律性的往往是连续型的随机变量。因此今后提到的总体往往是连续型的随机变量。

2. 样本：从总体(抽样总体)当中适当抽取的一部分个体如 n 个，叫抽样，所抽取的这 n 个统一称为样本，样本中的每一个都叫样品，其个数 n 叫样本的容量。根据所研究对象的允许和可能，去选择合适的抽样方式叫抽样设计。好的抽样设计，能用少的抽验费用，获得大的功效，而被人们所注视。但进行抽样设计时，必须遵循的两个原则是：

第一为独立性原则：这是为了论证上的方便，必须保证各样品之间是独立的或基本上是独立的。为此当抽样总体中的个体数 N，大于样本容量 n 十倍以上时，才可以采用不放回抽样，否则一定得采用放回抽样方式进行抽取。

第二为同分布原则：就是抽样时，必须保证每个个体被抽到的可能性相同。这样抽得的样品才有代表性，才能与总体服从同样的分布，这是正确进行统计推断的大前题。在我们国家的历史上，有不少次由于这个大前题被破坏，从没有代表性的样品中，得出的结论为根据，作出了错误的判断，而造成了悲剧性的结局。

现在的抽样方式中，一类是采用仅满足上述两条抽样原则所得到的样本，叫简单随机样本，今后就称为简单样本，多用在理论的论证上。另一类是根据实际选取的，如在生产流水线上，从一个随机的时刻开始，每隔一定间隔抽取一个样品，随时抽取就随时测试，并进行有关的推断，通常称为序贯抽样。它是最节省样品的抽样，所以对贵重物品，而且具有破坏性的测试(如寿命测试)时常常被采用。此外还有正交抽样，也就是当影响所研究问题的几个主要因素都能人工控制时，可按给定的正交表，安排抽试，这是最省测试费用并能获得相当好效果的抽试方法。以及其他在满足上述两原则的前题下，根据具体情况创造出的抽样方式。

若 $X_1,X_2,\cdots\cdots,X_n$ 是从总体 G 中抽取的简单样本，表成：

$$X \triangleq (X_1X_2\cdots\cdots X_n)' \tag{1.1.1}$$

当对 n 维随机列向量 X 进行了测试而获得数值 $x=(x_1\cdots x_n)'$ 时，称之为样本的实现，如果 $G\sim F_G^{(x)}$(分布函数)或 $G\sim f_G^{(x)}$(分布密度)时应有

$$F_X^{(x)}=\prod_{i=1}^{n}F_G^{(x_i)},\quad f_X^{(x)}=\prod_{i=1}^{n}f_G^{(x_i)} \tag{1.1.2}$$

二、统计量与顺序统计量

统计量是统计推断的出发点，为了进行各种统计推断，需要构造出各种形式的统计量，并推导出它们各自的概率分布，也就是所谓的抽样分布，它是实施和评价统计推断的基础。

设 $X=(X_1\cdots X_n)'$ 是总体 G 的简单样本。

若函数 $u=u(x)$，仅是上述样本 X 的可积函数(可放宽到可测函数)，且其中不含有任何未知的参数时，就称此函数为样本 $X=(X_1\cdots X_n)'$ 的统计量。如 $\overline{X}\triangleq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 和 $S^2\triangleq\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 都是统计量。而 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[X_i-E(G)]^2$，当总体的均值 $E(G)$ 未知时，它就不是统计量。构成适合统计推断的统计量一般并不困难，但利用

样本的分布，推导出所需统计量的分布，并使分布满足某种限制就比较困难了，然而这是统计工作者必须完成的任务，否则统计推断就不能进行下去。

将上述样本 $X=(X_1\cdots X_2)^{\tau}$ 的实现 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，按从小到大的顺序排列成 $x_1^*\leqslant x_2^*\leqslant\cdots x_n^*$ 时，若规定随机变量 $X_k^{(n)}$ 就总取值样本实现中的 x_k^*，可见随机变量 $X_k^{(n)}$ 是通过样本的实现与数值 x_k^* 建立起一一对应关系的。也就是说 $X_k^{(n)}$ 是样本 $X=(X_1\cdots X_n)^{\tau}$ 的函数，且符合统计量的定义，$k=1,2,\cdots,n$。如此得到的一组统计量 $X_1^{(n)},\cdots,X_n^{(n)}$ 就称为样本的顺序统计量。显然应有 $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}=X_1^{(n)}\leqslant\cdots\leqslant X_n^{(n)}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}$。

三、样本矩和经验分布函数

设 $X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 是总体 G_1 的简单样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 是总体 G_2 的简单样本，则称

$$\overline{X}\triangleq\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}X_i \text{ 为总体 } G_1 \text{ 的样本均值。} \tag{1.1.3}$$

$$A_K\triangleq\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}X_i^K \text{ 为总体 } G_1 \text{ 的样本 K 阶原点矩，} \tag{1.1.4}$$

其中 $K=2,3,\cdots$，而 $K=1$ 时就是样本均值 $\overline{X}$。

$$S_1^2\triangleq=\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2 \text{ 为总体 } G_1 \text{ 的样本方差。} \tag{1.1.5}$$

$$B_K\triangleq\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^K \text{ 为总体 } G_1 \text{ 的样本 K 阶中心矩。} \tag{1.1.6}$$

其中 $K=3,4,\cdots$，而当 $K=2$ 时则 $B_2=\frac{n-1}{n}S^2$

$$R_{1,2}\triangleq\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})}{\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$，当 $n_1=n_2\triangleq n$ 为两样本

的相关系数。 (1.1.7)

定理 1.1.1 若总体 G 的 2k 阶矩存在($k>1$)为 $E(G)=\mu$, $E(G^K)=\mu_K$, $D(G)=\sigma^2$, $E(G-\mu)^{2K}=\sigma^{2K}$则有

i) $E(A_K)=\mu_K$

ii) $D(A_K)=\frac{1}{n}(\mu_{2K}-\mu_K^2)$

iii) $E(S^2)=\sigma^2$

证明:

i) $\because E(A_K)=E(\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}X_i^k)=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}E(X_i^k)=\mu_k, k=1,2,\cdots$

ii) $D(A_k)=D(\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}X_i^k)=\frac{1}{n_1^2}\sum_{i=1}^{n_1}D(X_i^k)=\frac{1}{n_1^2}\sum_{i=1}^{n_1}\{E(X_i^k)^2-[E(X_i^k)]^2\}=\frac{1}{n_1^2}\sum_{i=1}^{n_1}(\mu_{2k}-\mu_k^2)=\frac{1}{n_1}(\mu_{2k}-\mu_k^2)$。

特别当 $k=1$ 时为 $E(\overline{X})=\mu$, $D(\overline{X})=\frac{1}{n_1}\{E(G)^2-[E(G)]^2\}=\frac{\sigma^2}{n_1}$常用到。

iii) $E(S^2)=E[\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2]=\frac{1}{n_1-1}E[\sum_{i=1}^{n_1}(X_i^2-2X_i\overline{X}+\overline{X}^2)]=\frac{1}{n_1-1}[\sum_{i=1}^{n_1}E(X_i^2)-n_1E(\overline{X}^2)]=\frac{1}{n_1-1}\{\sum_{i=1}^{n_1}[D(X_i)+(E(X_i))^2]-n_1[D(\overline{X})+(E(\overline{X}))^2]\}=\frac{1}{n_1-1}(n\sigma^2+n\mu^2-\sigma^2-n\mu^2)=\sigma^2$。(证完)

设函数 $F_n^*(x)$为:

$$F_n^*(x)\triangleq\begin{cases}0 & x\leqslant x_1^* \\ \frac{K}{n} & x_k^*<x\leqslant x_{k+1}^* \\ 1 & x>x_n^*\end{cases} \qquad (1.1.7)$$

其中 x_k^*, $k=1,2,\cdots,n-1$ 是样本实观排序后第 k 个数值。此函数是值域在(0,1]上的单调不减的函数,称之为经验分布函数(样本分布函数)。

苏联的格列文科曾证明了,经验分布函数 $F_n^*(x)$ 依概率为 1 的一致收敛于总体的分布函数 $F_G(x)$,即

$$p(\lim_{n\to\infty}\sup_{-\infty<x<\infty}|F_n^*(x)-F_G(x)|=0)=1 \qquad (1.1.8)$$

其证明见复旦大学著"概率论"第二册.利用此结论,可得到样本的各阶原点矩,也都依概率为 1 的,一致收敛于总体的各相应阶原点矩(如果存在时).这正是下一章中,总体参数矩估计可以采用的理论依据。有了经验分布函数 $F_n^*(x)$,对掌握了斯蒂尔吉斯积分知识的读者,就可将样本的各阶矩,表成经验分布函数的斯蒂尔吉斯积分的形式,会给书写和论证带来很大的方便。如 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\int xd(F_n^*(x))$, $S^2=\frac{n}{n-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=\frac{n}{n-1}\int(x-\overline{x})^2d(F_n^*(x))$。

§1.2 单指标正态总体时的抽样分布

正态分布是研究误差规律,射击弹着点的规律,分子运动速度的规律等问题,以及二项分布的极限问题时获得的.是一类相当普遍存在的分布,一般的一维正态分布表成 $N(\mu,\sigma^2)$,其分布密度为

$f_x(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\}$, 其中 $-\infty<\mu<+\infty$, $\sigma>0$ 的实数

一、正态分布

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是单指标总体 $G\sim N(\mu,\sigma^2)$, $\sigma>0$ 的简单样本。则对已知的实常数 a_i $i=1,2,\cdots,n$ 有:

$$U=\sum_{i=1}^{n}a_iX_i\sim N(\mu\sum_{i=1}^{n}a_i,\sigma^2\sum_{i=1}^{n}a_i^2) \tag{1.2.1}$$

特别当 $a_i=\frac{1}{n}$ 时有：

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})。 \tag{1.2.2}$$

$\because$ 设 $Y=\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_p\end{bmatrix}\triangleq\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{p1}&\cdots&a_{pn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\triangleq AX$，且 $R(A)=p(p\leqslant n)$

由于正态向量的线性变换，仍为正态向量，知 Y 仍服从 p 维正态分布，且可算得

$$E(y)=\begin{bmatrix}\mu\sum_{j=1}^{n}a_{1j}\\ \vdots\\ \mu\sum_{j=1}^{n}a_{pj}\end{bmatrix}_{p\times1}；\quad D(y)=[cov(y_i,y_j)]_{p\times p}，其中\ i=1,2,$$

$\cdots,p,j=1,2,\cdots,p$。$\therefore Y\sim N_p(E(y),D(y))$ (1.2.3)

当 $A=[a_1a_2\cdots a_n]$ 时，就得(1.2.1)式，$y=u=\sum_{i=1}^{n}a_iX_i\sim N(\mu\sum_{i=1}^{n}a_i,\sigma^2\sum_{i=1}^{n}a_i^2)$。

当 $A=[\frac{1}{n}\ \frac{1}{n}\cdots\frac{1}{n}]$ 时，就得(1.2.2)式，$Y=\overline{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$。

进而当 A 是 n 阶正交阵，且 $\mu=0$ 时，由正交性知 Y 也是 $E(y)=0$ 的 n 维独立正态向量，即独立正态向量在正交变换下具有不变性。

二、x^2 分布

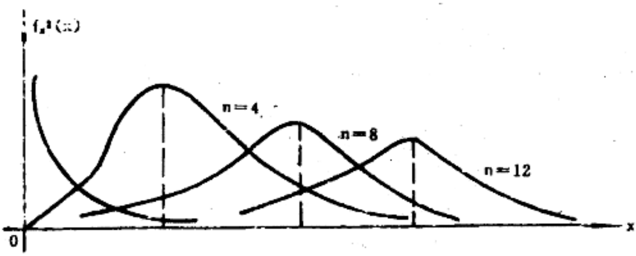
卡埃平方分布及其推广，是在统计推断中占有极其重要地位

的抽样分布，又由于它的优良性质，使它常在统计推断问题的论证中被运用。设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是单指标总体 $G \sim N(0,1)$ 的简单样本，称 $\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 为服从自由度 n 的 χ^2 分布，表成 $\chi^2(n)$，由于它也是当 $\alpha = \frac{1}{2}, p = \frac{n}{2}$ 的 $\Gamma(\alpha, p)$ 分布，因此它的分布密度（当然也可直接从定义求得）为

$$f_{\chi^2}(x) = \begin{cases} \dfrac{(\frac{1}{2})^{\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} & x \geqslant 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (1.2.4)$$

其中 $\Gamma(\frac{n}{2}) = \int_0^\infty t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t} dt$，叫 Γ（卡玛）函数。并且有 $E[\chi^2(n)] = n, D[\chi^2(n)] = 2n$。

$\chi^2(n)$ 的图象是：



图(1.2.1)

弗斯（Fisher）曾证得，当 $n \to \infty$ 时有 $\sqrt{2\chi^2(n)}$ 趋向于 $N(\sqrt{2n-1}, 1)$。

对 $\alpha \in (0,1)$，利用书后的 χ^2 分布表可查得：

当 $n\leqslant 45$ 时的数值 $\chi_\alpha^2(n)$，即求得使 $p(\chi^2(n)\geqslant\chi_\alpha^2(n))=\int_{\chi_\alpha^2(n)}^{+\infty} f_{\chi^2}(x)dx=\alpha$ 的数值 $\chi_\alpha^2(n)$，叫 χ^2 分布的上 α 分位点值。

当 $n>45$ 时，利用弗斯定理应近似的有，$\sqrt{2\chi^2(n)}-\sqrt{2n-1}\sim N(0,1)$。先查出正态分布的上 α 分位点的值 Z_α，就可算得

$$\chi_\alpha^2(n)\approx\frac{1}{2}(Z_\alpha+\sqrt{2n-1})^2 \tag{1.2.5}$$

三、χ^2 分布的性质

定理 1.2.1（柯赫伦(Cochran)定理），设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是单指标总体 $G\sim N(0,1)$ 的简单样本，具有 $\sum_{i=1}^{n}X_i^2=\sum_{i=1}^{k}Q_i$。其中 $Q_i=[X_1\cdots X_n]A_i\begin{bmatrix}X_1\\ \vdots\\ X_n\end{bmatrix}$ $k\leqslant n, A_i\geqslant 0, R(A_i)=n_i\leqslant n$。则 $\{Q_i\}$ $i=1,2,\cdots,k$ 相互独立且 $Q_i\sim\chi^2(n_i)$ 的必充条件是 $\sum_{i=1}^{k}n_i=n$。

证明：必要性，由于已知 $\{Q_i\}$ $i=1,2,\cdots,k$ 相互独立，且 $Q_i\sim\chi^2(n_i)$，也就是 $Q_i\sim\Gamma(\frac{1}{2},\frac{n_i}{2})$ 及 $i=1,2,\cdots,k$ 相互独立。利用 Γ 分布的可加性（即若 $Z_1\sim\Gamma(\alpha,p_1)$ 与 $Z_2\sim\Gamma(\alpha,p_2)$ 相互独立，则有 $Z_1+Z_2\sim\Gamma(\alpha,p_1+p_2)$，可得 $\sum_{i=1}^{k}Q_i\sim\Gamma(\frac{1}{2},\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{2})$，即是 $\sum_{i=1}^{k}Q_i\sim\chi^2(\sum_{i=1}^{k}n_i)$。另一方面按 χ^2 分布的定义有 $\sum_{i=1}^{n}X_i^2\sim X^2(n)$。两边的自由度是相同的。

$\therefore$ 有 $\sum_{i=1}^{k}n_i=n$。

充分性：根据线性代数的知识，一个秩为 n_i 的二次型 $Q_i=[X_1\cdots X_n]A_i\begin{bmatrix}X_1\\ \vdots\\ X_n\end{bmatrix}$，$i=1,2\cdots,k$，经适当的线性变换，都可化成仅有 n_i