全国工程硕士专业学位教育指导委员会推荐教材

李元科 著
Li Yuanke

工程最优化设计
学习辅导与习题解答

Optimization Principles and Techniques for Engineering Design

http://www.tup.com.cn
清华大学出版社

全国工程硕士专业学位教育指导委员会推荐教材

工程最优化设计
学习辅导与习题解答

Optimization Principles and Techniques for Engineering Design

李元科 著
Li Yuanke

清华大学出版社
北京

内容简介

本书是与《工程最优化设计(第三版)》(清华大学出版社)配套的学习参考书。内容包括每章的内容概述和习题解答两部分。

本书的习题解答包含3种解题方式：手工计算、应用MATLAB软件中的有关函数运算求解和用C语言编程计算。有利于学生开拓思路，培养和提高分析与解决工程实际问题的能力。

本书适用于有关工科专业和管理专业的研究生和本科生，特别适用于具有丰富实践经验和解决工程实际问题要求的工程硕士研究生和工程技术人员学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

工程最优化设计学习辅导与习题解答/李元科著. —北京：清华大学出版社，2009.6

(全国工程硕士专业学位教育指导委员会推荐教材)

ISBN 978-7-302-19854-3

Ⅰ. 工…　Ⅱ. 李…　Ⅲ. 工程－最优设计－研究生－教学参考资料　Ⅳ. TB21

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第047704号

责任编辑：庄红权　赵从棉
责任校对：王淑云
责任印制：王秀菊
出版发行：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦A座
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084
社　总　机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质　量　反　馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京国马印刷厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185×230　**印　张**：10.5　**字　数**：222千字
版　　次：2009年6月第1版　**印　　次**：2009年6月第1次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：22.00元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：(010)62770177转3103　　产品编号：031791-01

前言

本书是与《工程最优化设计》(第三版)(清华大学出版社)配套的学习辅导与习题解答参考书。其内容包括每章的内容概述和习题解答。内容概述部分简要列出了各章的知识要点,习题解答部分对教材每章所列计算题作了详尽的解答。特别在第3章习题解答中给出了用C语言编写的黄金分割法计算程序,以及相关习题的求解实例。在第8章习题解答中给出了教材第1章所列实际问题的数学模型及计算结果,还给出了前7章习题中所有计算题的MATLAB计算程序和计算结果。

书中习题解答部分包含3种解答方式:①手工计算,目的在于通过手算体会算法的基本原理和运算步骤;②应用MATLAB软件中的有关函数进行运算求解,目的在于教给学生一个求解复杂问题的软件工具;③C语言编程计算,目的在于进一步理解算法实现的全过程。

本书的特点在于叙述简要、计算详尽、方法多样。在辅导学生基本理论和知识学习的同时,多方面开拓学生的思路,培养学生用数学方法分析和解决工程实际问题的能力。

书中学习辅导部分的章节编号与《工程最优化设计》教材的完全一致。

书中所有习题解答都由作者本人反复手算和用计算机运算核对,如有个别错误之处诚恳欢迎读者批评指正。书中解答的个别习题与《工程最优化设计》中的习题有部分修改,如果因此给读者带来不便的话,敬请谅解。

本书适用于有关工科专业和管理专业的研究生和本科生,特别适用于具有丰富实践经验和解决工程实际问题要求的工程硕士研究生和工程技术人员学习参考。

作　者

2008.10

Foreword

目录

Contents

第 1 章

最优化问题的数学模型

本章重点

数学模型、图解法、下降迭代解法。

基本要求

(1) 理解设计空间、可行域、起作用约束等基本概念；

(2) 理解设计变量与设计空间、约束边界与可行域、目标函数与等值线之间的关系；

(3) 理解下降迭代解法的基本思想、基本格式及其要解决的基本问题；

(4) 掌握简单问题的图解法；

(5) 能够建立简单的最优化问题的数学模型。

内容概述

工程最优化设计就是把工程设计问题转化为数学问题，利用最优化数值计算方法和程序，借助计算机求得最优设计方案的过程和方法。

数学模型是对实际问题的数学描述和概括，是进行最优化设计的基础。根据设计问题的具体要求和条件建立完备的数学模型是最优化设计成败的关键。

1.1 设计简例

(内容略)

1.2 数学模型的一般形式

最优化设计的数学模型是对实际问题的数学描述，由设计变量、目标函数和约束条件3部分组成。可以概括为如下的一般形式：

求设计变量

$$x_1, x_2, \cdots, x_n$$

极小化目标函数

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

满足约束条件

$$g_u(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leqslant 0 \quad (u = 1,2,\cdots,p)$$
$$h_v(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \quad (v = 1,2,\cdots,m)$$

向量形式：

$$\left.\begin{array}{ll} \min f(\boldsymbol{X}) & \boldsymbol{X} \in \mathbf{R}^n \\ \text{s.t.} & g_u(\boldsymbol{X}) \leqslant 0 \quad (u = 1,2,\cdots,p) \\ & h_v(\boldsymbol{X}) = 0 \quad (v = 1,2,\cdots,m) \end{array}\right\} \tag{1-1}$$

1.3 数学模型的组成

1.3.1 设计变量与设计空间

在最优化问题的数学模型中，设计变量是一组待定的未知数，它对应于工程实际问题的一组特征主参数，它的任意一组确定的数值代表该工程问题的一个特定的设计方案。

以 n 个设计变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为坐标轴，形成的 n 维实欧氏空间，记作 $\mathbf{R}^n$，称这样的空间为设计空间，称 n 为空间的维数，称 $\boldsymbol{X}=[x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}}$ 为空间中的设计点。求解最优化问题的目的就是要在设计空间内的无穷多个设计点中，找到一个既满足所有约束条件，又使目标函数取得极小值的点，即最优点，它所代表的解称为设计问题的最优解。

1.3.2 约束条件与可行域

任何设计问题都附带有大量的设计规范和设计要求，将这样的规范和要求表示成为设计变量 $\boldsymbol{X}$ 的函数 $h_v(\boldsymbol{X})$ 和 $g_u(\boldsymbol{X})$，并进而构成如下的数学不等式或等式：

$$g_u(\boldsymbol{X}) \leqslant 0 \quad (u = 1,2,\cdots,p)$$

$$h_v(\boldsymbol{X}) = 0 \quad (v = 1,2,\cdots,m)$$

则这样的一组表达式就称为该设计问题的约束条件。

将不等式约束中的不等号改成等号后得到的方程

$$g_i(\boldsymbol{X}) = 0$$

称约束方程,对应的图形称为约束边界。

每一个不等式约束和等式约束都将设计空间分为满足约束和不满足约束的两个区域。满足所有约束条件的部分一般是由多个约束边界所围成的一个封闭区域,称为最优化问题的约束可行域,记作 $\&$。

可行域可用集合的方式表示如下:

$$\& = \{\boldsymbol{X} \mid_{g_u(\boldsymbol{X})\leqslant 0,h_v(\boldsymbol{X})=0(u=1,2,\cdots,p;\ v=1,2,\cdots,m)}\} \tag{1-2}$$

如果在点 $\boldsymbol{X}^k$ 上,某个不等式约束条件 $g_i(\boldsymbol{X}^k)\leqslant 0$ 变成等式,即有

$$g_i(\boldsymbol{X}^k) = 0$$

也就是说,该点位于这个约束边界上时,则称 $g_i(\boldsymbol{X}^k)\leqslant 0$ 是点 $\boldsymbol{X}^k$ 的起作用约束。

一个点 $\boldsymbol{X}^k$ 的起作用约束的数目和对应的约束条件序号可以用集合形式表示如下:

$$I_k = \{u \mid_{g_u(\boldsymbol{X}^k)=0\quad(u=1,2,\cdots,p)}\} \tag{1-3}$$

其中的 I_k 称为点 $\boldsymbol{X}^k$ 的起作用约束的下标集合。

1.3.3 目标函数与等值线

在最优化设计的数学模型中,目标函数是衡量设计方案优劣的定量标准。对于极小化问题,目标函数的值越小对应的设计方案越好。

对于简单的问题,函数的一组等值线(面)可以直观地描绘函数的变化趋势,成为判断和确定最优解的重要依据。

令函数 $f(\boldsymbol{X})$等于常数 c,即

$$f(\boldsymbol{X}) = c \tag{1-4}$$

则满足此式的点 $\boldsymbol{X}$ 在设计空间定义了一个点集。该点集是设计空间内的一条直线、一个平面、曲面或超曲面。在这样的一条线或一个面上,所有点的函数值均相等,因此,称这种线或面为函数的等值线或等值面。

1.4 最优化问题的图解法

对简单的二维最优化问题,可以用作图的方法,得到问题的近似最优解,这就是最优化问题的图解法。

图解法的基本步骤是:

(1) 确定设计空间；

(2) 画出由约束边界围成的约束可行域；

(3) 作出 1～2 条目标函数的等值线，并判断目标函数值的下降方向；

(4) 判断并确定最优点。

一般来说，线性规划问题的等值线(面)是一族平行的直线或平面，约束可行域是由线性约束边界围成的凸多边形或凸多面体，故最优点必定位于可行域的某个顶点上。而非线性最优化问题的最优点通常位于某个约束边界上。

1.5 最优化问题的下降迭代解法

1.5.1 下降迭代解法的基本格式

在最优化方法中，迭代点的产生一般采用如下迭代算式：

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^k + \alpha \boldsymbol{S}^k$$

为了让每一次迭代都能使目标函数获得最大的下降量，新的迭代点通常取方向 $\boldsymbol{S}^k$ 上的极小点，亦称一维极小点，记作 $\boldsymbol{X}^{k+1}$，即有

$$\boldsymbol{X}^{k+1} = \boldsymbol{X}^k + \alpha_k \boldsymbol{S}^k \tag{1-5}$$

下降迭代解法的基本迭代格式可概括为：

(1) 给定初始点 $\boldsymbol{X}^0$ 和一个足够小的收敛精度 $\varepsilon>0$，并置计数单元 $k=0$；

(2) 选取搜索方向 $\boldsymbol{S}^k$；

(3) 确定最优步长因子 α_k，并由 $\boldsymbol{X}^{k+1}=\boldsymbol{X}^k+\alpha_k\boldsymbol{S}^k$ 计算得到新的迭代点 $\boldsymbol{X}^{k+1}$；

(4) 最优解判断：若点 $\boldsymbol{X}^{k+1}$ 满足收敛精度要求，亦称终止准则，则以 $\boldsymbol{X}^{k+1}$ 作为最优解，输出计算结果并终止迭代；否则，以 $\boldsymbol{X}^{k+1}$ 作为新的起点，即令 $k=k+1$，转(2)进行下一轮迭代。

不难看出，要构成一个下降迭代解法必须解决以下 3 个基本问题：

(1) 选择合适的搜索方向，不同的搜索方向构成不同的下降迭代解法。

(2) 寻找最优步长因子和新的迭代点，一般采用一维搜索算法。

(3) 给定适当的终止判断准则。

1.5.2 算法的收敛性与终止准则

常用的终止准则有以下 3 种。

1. 点距准则

当相邻迭代点间的距离充分小，并且小于给定的收敛精度 $\varepsilon>0$，即有

$$\| X^{k+1} - X^k \| \leqslant \varepsilon \tag{1-6}$$

时，便可认为点 X^{k+1} 是满足给定收敛精度的最优解。

2. 值差准则

将相邻迭代点的函数值之差作为判断近似最优解的另一个准则，这就是值差准则。即当

$$| f(X^k) - f(X^{k+1}) | \leqslant \varepsilon$$

或者

$$\left| \frac{f(X^k) - f(X^{k+1})}{f(X^k)} \right| \leqslant \varepsilon \tag{1-7}$$

成立时，则令 $X^* = X^{k+1}$，输出 X^* 和 $f(X^*)$ 后终止迭代。

3. 梯度准则

梯度的模小于给定精度（$\varepsilon>0$）的点就是函数的近似最优点。即当

$$\| \nabla f(X^{k+1}) \| \leqslant \varepsilon \tag{1-8}$$

时，令 $X^* = X^{k+1}$，输出 X^* 和 $f(X^*)$ 后终止迭代。

1.5.3 最优化算法分类

（内容略）

习题解答

1. 试建立下列问题的数学模型

（1）某制造企业用 A，B，C 3 种设备生产 4 种产品，每件产品在生产中需要占用设备的工时数及单件产品的利润如表 1-1 所列，试制订利润最大化的产品生产计划。

表 1-1 题（1）的参数

产品 / 工时/(h/件) / 设备	1	2	3	4	每周可利用工时/h
A	1.5	1	2.4	1	200
B	1	5	1	3.5	800
C	1.5	3	3.5	1	500
利润/(元/件)	52.4	73	83.4	41.8	

解 设每天生产 4 种产品的件数依次为 $x_i(i=1,2,\cdots,4)$，则该问题的数学模型为

$$\min f(\boldsymbol{X}) = -52.4x_1 - 73x_2 - 83.4x_3 - 41.8x_4$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad & 1.5x_1 + x_2 + 2.4x_3 + x_4 \leqslant 200 \\ & x_1 + 5x_2 + x_3 + 3.5x_4 \leqslant 800 \\ & 1.5x_1 + 3x_2 + 3.5x_3 + x_4 \leqslant 500 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0 \end{aligned}$$

(2) 用长 3m 的某种型号角钢切割钢窗用料。每副钢窗需长 1.5m 的料两件，1.2m 的料 3 件，1m 的料 4 件，0.6m 的料 6 件。若需制作钢窗 100 副，问最少需要多少根这种 3m 长的角钢？

解 分析可知，长 3m 的角钢切割成 4 种长度的窗料，共有如表 1-2 所列 11 种截法。

表 1-2 题(2)的参数

截法 / 根数 / 长度/m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	需求量/件
1.5	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	200
1.2	0	1	0	0	2	1	1	0	0	0	0	300
1	0	0	1	0	0	1	0	3	2	1	0	400
0.6	0	0	0	2	1	1	3	0	1	3	5	600
料头长/m	0	0.3	0.5	0.3	0	0.2	0.5	0	0.4	0.2	0	

设 11 种截法所用角钢根数依次为 $x_i(i=1,2,\cdots,11)$，则该问题的数学模型如下：

$$\min f(\boldsymbol{X}) = x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} + x_{11}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad & -2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \leqslant -200 \\ & -x_2 - 2x_5 - x_6 - x_7 \leqslant -300 \\ & -x_3 - x_6 - 3x_8 - 2x_9 - x_{10} \leqslant -400 \\ & -2x_4 - x_5 - x_6 - 3x_7 - x_9 - 3x_{10} - 5x_{11} \leqslant -600 \\ & x_1, x_2, \cdots, x_{11} \geqslant 0 \end{aligned}$$

(3) 某建筑企业 3 年内有 5 项工程可以承担施工任务，每项选定的工程必须在 3 年内完成，每项工程的年建设费用、期望收入和各年可利用资金数如表 1-3 所列，试制订此企业的投标计划，以使 3 年的总收入最大。

注：本书个别题目的部分数据与教材有更正或改动，但求解过程和方法完全相同。

表 1-3 题(3)的参数

工程 \ 费用/万元 \ 年度	第一年	第二年	第三年	各项工程预期收入/万元
1	5	1	8	20
2	4	7	10	40
3	3	9	2	20
4	7	4	1	15
5	8	6	10	30
各年可用资金/万元	25	25	25	

解 设是否投标 5 个项目的变量(0 或 1)为 $x_i(i=1,2,\cdots,5)$,则该问题的数学模型为

$$\min f(\boldsymbol{X}) = -20x_1 - 40x_2 - 20x_3 - 15x_4 - 30x_5$$

$$\begin{aligned} \text{s. t.} \quad & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8x_5 \leqslant 25 \\ & x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 + 6x_5 \leqslant 25 \\ & 8x_1 + 10x_2 + 2x_3 + x_4 + 10x_5 \leqslant 25 \\ & x_1, x_2, \cdots, x_5 \in \{0,1\} \end{aligned}$$

(4) 甲、乙两煤矿供应 A,B,C 3 城市的生产和生活用煤。两煤矿的产量、各城市的需求量以及煤矿与各城市的距离如表 1-4 所列,试制订合理的煤炭调运计划,在保证城市需求的情况下,使运输的总吨公里数最少。

表 1-4 题(4)的参数

煤矿 \ 距离/km \ 城市	A	B	C	日产量/t
甲	90	70	100	200
乙	80	65	80	250
日需求量/t	100	150	200	

解 设甲矿每天运往 A,B,C 城的煤的数量为 x_1,x_2,x_3(t),乙矿每天运往 A,B,C 城的煤的数量为 x_4,x_5,x_6(t),则该问题的数学模型为

$$\min f(\boldsymbol{X}) = 90x_1 + 70x_2 + 100x_3 + 80x_4 + 65x_5 + 80x_6$$

$$\begin{aligned} \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 200 \\ & x_4 + x_5 + x_6 \leqslant 250 \\ & -x_1 - x_4 \leqslant -100 \\ & -x_2 - x_5 \leqslant -150 \end{aligned}$$

$$-x_3-x_6 \leqslant -200$$

$$x_1, x_2, \cdots, x_6 \geqslant 0$$

(5) 已知 5 名运动员各种姿势下的 50m 游泳成绩如表 1-5 所列,试选拔一个 4 人组成的 200m 混合泳接力队,使其预测成绩最好。

表 1-5　题(5)的参数

成绩/s　姓名　泳姿	赵	钱	孙	李	周
仰泳	37.7	32.9	33.8	37	35.4
蛙泳	43.4	33.1	42.2	34.7	41.8
蝶泳	33.3	28.5	38.9	30.4	33.6
自由泳	29.2	26.4	29.6	28.5	31.1

解　设选中赵的仰泳、蛙泳、蝶泳、自由泳的变量(0,1)分别是 x_1, x_2, x_3, x_4;
选中钱的仰泳、蛙泳、蝶泳、自由泳的变量(0,1)分别是 x_5, x_6, x_7, x_8;
选中孙的仰泳、蛙泳、蝶泳、自由泳的变量(0,1)分别是 $x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}$;
选中李的仰泳、蛙泳、蝶泳、自由泳的变量(0,1)分别是 $x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}$;
选中周的仰泳、蛙泳、蝶泳、自由泳的变量(0,1)分别是 $x_{17}, x_{18}, x_{19}, x_{20}$。
则该问题的数学模型为

$$\begin{aligned}\min f(\boldsymbol{X}) = {} & 37.7x_1 + 43.4x_2 + 33.3x_3 + 29.2x_4 + 32.9x_5 + 33.1x_6 + 28.5x_7 + 26.4x_8 \\ & + 33.8x_9 + 42.2x_{10} + 38.9x_{11} + 29.6x_{12} + 37x_{13} + 34.7x_{14} + 30.4x_{15} + 28.5x_{16} \\ & + 35.4x_{17} + 41.8x_{18} + 33.6x_{19} + 31.1x_{20}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{s.t.}\quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ & x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 1 \\ & x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} = 1 \\ & x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} = 1 \\ & x_{17} + x_{18} + x_{19} + x_{20} = 1 \\ & x_1 + x_5 + x_9 + x_{13} + x_{17} = 1 \\ & x_2 + x_6 + x_{10} + x_{14} + x_{18} = 1 \\ & x_3 + x_7 + x_{11} + x_{15} + x_{19} = 1 \\ & x_4 + x_8 + x_{12} + x_{16} + x_{20} = 1 \\ & x_1, x_2, \cdots, x_{20} \in \{0,1\}\end{aligned}$$

(6) 某快餐店一周中每天需要如表 1-6 所列不同数目的雇员。规定应聘者需连续工作 5 天,每天雇员的工资均为 100 元。问每天需要聘请多少雇员,既满足工作的需要,又使支

出的工资最少。

表 1-6 题(6)的参数

日期	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六	星期日
雇员数	16	15	16	19	14	12	18

解 设一周内每天招聘的员工数为 $x_i(i=1,2,\cdots,7)$,则该问题的数学模型为

$$\min f(\boldsymbol{X}) = 100\sum_{i=1}^{7} x_i$$

$$\begin{aligned}
\text{s. t.}\quad & -x_1-x_4-x_5-x_6-x_7 \leqslant -16 \\
& -x_1-x_2-x_5-x_6-x_7 \leqslant -15 \\
& -x_1-x_2-x_3-x_6-x_7 \leqslant -16 \\
& -x_1-x_2-x_3-x_4-x_7 \leqslant -19 \\
& -x_1-x_2-x_3-x_4-x_5 \leqslant -14 \\
& -x_2-x_3-x_4-x_5-x_6 \leqslant -12 \\
& -x_3-x_4-x_5-x_6-x_7 \leqslant -18 \\
& x_1,x_2,\cdots,x_7 \geqslant 0
\end{aligned}$$

(7)某公司有 400 万元资金,要求 4 年内投资用完。若每年使用资金 $x_i(i=1,2,3,4)$万元,可获得利润$\sqrt{x_i}$万元(已使用资金和效益不能再使用),当年不用资金存入银行,年利率 10%(利息可再使用),要求制订资金的最优使用计划,以使 4 年效益之和最大。试写出该问题的数学模型。

解 设每年使用的资金量依次为 x_1,x_2,x_3,x_4,则每年的资金使用量和效益情况见表 1-7。

表 1-7 题(7)的参数

年份	使用资金	获得效益	未使用资金	年末可使用资金
1	x_1	$\sqrt{x_1}$	$400-x_1$	$1.1(400-x_1)$
2	x_2	$\sqrt{x_2}$	$1.1(400-x_1)-x_2$	$1.1(1.1(400-x_1)-x_2)$
3	x_3	$\sqrt{x_3}$	$1.1(1.1(400-x_1)-x_2)-x_3$	$1.1(1.1(1.1(400-x_1)-x_2)-x_3)$
4	x_4	$\sqrt{x_4}$	0	

于是,则该问题的数学模型为

$$\min f(\boldsymbol{X}) = -\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}-\sqrt{x_3}-\sqrt{x_4}$$

$$\begin{aligned}
\text{s. t.}\quad & x_2-1.1(400-x_1) \leqslant 0 \\
& x_3-1.1(1.1(400-x_1)-x_2) \leqslant 0 \\
& x_4-1.1(1.1(1.1(400-x_1)-x_2)-x_3) = 0
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, \cdots, x_4 \geqslant 0$$

整理后为

$$\begin{aligned} \min f(\boldsymbol{X}) = & -\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} - \sqrt{x_3} - \sqrt{x_4} \\ \text{s.t.} \quad & 1.1x_1 + x_2 \leqslant 440 \\ & 1.21x_1 + 1.1x_2 + x_3 \leqslant 484 \\ & 1.331x_1 + 1.21x_2 + 1.1x_3 + x_4 = 532.4 \\ & x_1, x_2, \cdots, x_4 \geqslant 0 \end{aligned}$$

2.（略）

3. 用图解法求解以下最优化问题

(1) $\min f(\boldsymbol{X}) = (x_1-1)^2 + (x_2-2)^2$

s.t. $\quad x_1 + x_2 = 1$

解 如图 1-1 所示，最优点是等值线与约束边界的交点 A。

由解析几何知，直线 $x_1+x_2=1$ 的斜率为 -1，

其垂线的斜率为它的负倒数 1，由此知半径 OA 的方程为

$$x_2 - 2 = x_1 - 1$$

将其与等式约束

$$x_1 + x_2 = 1$$

联立求解，得点 A 的坐标

$$x_1 = 0, x_2 = 1$$

即最优解为

$$\boldsymbol{X}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f^* = 2$$

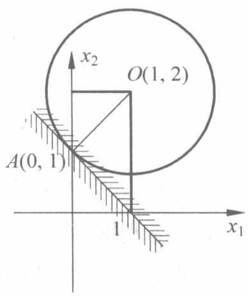

图 1-1 习题 3 图(1)

(2) $\min f(\boldsymbol{X}) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + 2x_2 + 5$

s.t. $\quad x_1^2 + x_2 - 2 \leqslant 0$

$\quad 2x_1 - x_2 - 1 \leqslant 0$

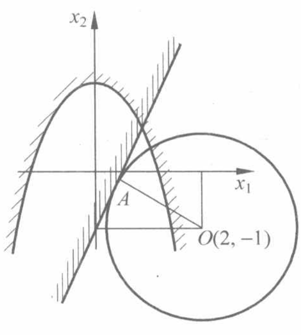

图 1-2 习题 3 图(2)

解 如图 1-2 所示，最优点是等值线（圆）与线性约束边界的切点 A。分析可知，直线 $2x_1 - x_2 = 1$ 的斜率为 2，其垂线 OA 的斜率为 $-1/2$，则半径 OA 的方程为

$$x_2 + 1 = -(x_1 - 2)/2$$

于是联立解方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

得点 A 的坐标

$$x_1 = 0, x_2 = -0.2$$