普通高等学校精品课程教材

财经类
核心课程
系列教材
主编 伍中信

XIAN XING
线性代数

主　编　吴建国
副主编　刘平兵　谭　立

湖南人民出版社

X I A N X I N G D A I S H U　线性代数

普通高等学校精品课程教材

财经类
核心课程
系列教材
主编 伍中信

线性代数

主　编　吴建国

副主编　刘平兵　谭　立

湖南人民出版社

X I A N X I N G D A I S H U　线性代数

图书在版编目（CIP）数据

线性代数／吴建国主编．—长沙：湖南人民出版社，2009．3

ISBN 978－7－5438－5660－8

Ⅰ．线…　Ⅱ．吴…　Ⅲ．线性代数－高等学校－教材　Ⅳ．0151．2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 040983 号

线 性 代 数

主　　编：吴建国

出 版 人：李建国
策　　划：莫金莲　杜小念
责任编辑：李　茜　邓胜文　封亮楚
装帧设计：周　云

出版、发行：湖南人民出版社
网　　址：http://www.hnppp.com
地　　址：长沙市营盘东路 3 号
邮　　编：410005
经　　销：湖南省新华书店
印　　刷：长沙科地印务有限公司
印　　次：2009 年 3 月第 1 版第 1 次印刷
开　　本：787×1092　1／16
印　　张：12
字　　数：261000
印　　数：1－5000
书　　号：ISBN 978－7－5438－5660－8
定　　价：26．00 元

营销电话：0731－2226732　（如发现印装质量问题请与承印厂调换）

总序
ZONGXU

在钟灵毓秀的岳麓山下，林立的高校似争奇斗艳的奇葩；在“唯楚有才，于斯为盛”的大学城内，群贤荟萃，荆玉焕彩。这里，源远流长的湖湘文化孕育了一代代贤哲俊彦，经世致用的湖湘精髓砥砺着一批批乡贤名士，而今，湖湘文化的接力棒依然鞭策着湖南财专的莘莘学子。为了传承文明，他们焚膏继晷，著书立说，撰写了一部部较高质量的著作。

湖南财专，兴学久远，私立起源，几经合并、迁址易名，改革开放后拓址新建，前后70余年。虽历尽坎坷，仍薪火相传，弦歌不绝。历代师生，筚路蓝缕，励精图治，春华秋实。正值高教突飞猛进、日新月异之际，湖南财专同仁审时度势，踏上了跨越式发展之路。为了抢抓机遇，夯实基础，内强实力，外树形象，财专人在办学理念上进行了不懈的探索。

近几年来，为实现学校跨越式发展战略目标，根据高等职业教育学科专业建设、课程建设、教材建设的发展趋势，结合我校实际，进一步明确了办学理念，理清了办学思路，调整和完善了学科与专业结构，形成了既注重人才培养模式的优化，又能适应现代化建设对财经类应用型人才的需求，体现和反映学校办学特色、办学风格和办学传统。为此，学校先后启动了“学科专业建设工程”、“重点课程建设工程”和“重点教学改革研究工程”，并于2008年5月资助出版12门重点建设课程教材。这次资助出版的重点建设课程教材，涉及市场营销、公共投资、经济数学、西方经济学、会计信息系统等方面。集中体现了学校主动适应人才市场需求的变化，重视实践教学，注重学生的自学能力、思考能力、应用能力的培养，不断优化课程体系，更新教学内容，优化知识结构，突出个性化养成，努力提高人才培养质量等

方面所取得的成果。这批教材的出版，标志着我校的办学理念日趋成熟，专业结构日益优化，学校办学特色进一步彰显。

这批教材的作者长期在教学科研一线工作，既有丰富的教学经验，又有一定的教学积累和良好的专业基础，这批教材体现了财专学人的学术视野和教学理念，我们感谢湖南人民出版社为我们提供了这样的平台。当然，这批教材也存在着这样或那样的不足。我们恳请学者贤达关注、批评、指正。

衷心希望这批教材能够成为湖南财专实现跨越式发展的隆重献礼！

是为序。

伍中信

2008 年 5 月于湖南财经高等专科学校

（总序作者为湖南财经高等专科学校校长，教授，湖南大学会计学院博士生导师）

前言

QIANYAN

由于科学技术的迅猛发展，数量分析已渗透到社会经济的各个领域，数学的重要性已被整个社会所公认，数学的应用日益广泛深入．高等院校作为培育人才的摇篮，其数学课程的开设具有特别重要的意义．

线性代数作为高等院校专业的基础数学课程之一，具有较强的逻辑性和抽象性．针对本书面向的高职高专应用型学生，确定本书编写的宗旨：坚持“以应用为目的，以必需够用为度”的原则，以“掌握概念，强化应用，培养技能”为重点，以“数学为本，经济为用”为目标．本书既突出了数学方法与应用的介绍，又不失数学理论的系统性和科学性．

本书作为普通高等学校精品课程教材，适用于高职高专经济管理类专业的教学．教材内容包括行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型、线性代数应用问题共六章，并附有数学实验、习题参考答案．教学时可根据专业需要、学生基础、课时实际，有针对性地选择，实行模块化教学，使学生能更扎实地掌握所学知识，提高教学效果．

本书由吴建国教授任主编，刘平兵副教授、谭立副教授任副主编．吴建国教授拟定全书编写大纲并负责修改补充和总纂定稿．全书编写分工如下：第 1 章：邓永辉；第 2 章：刘平兵、李兰平；第 3 章：谭立、陈丽萍；第 4 章：吴建国；第 5 章：李建伟；第 6 章：刘平兵；附录部分：吴建国．

本书在讨论编写过程中，博采众长，借鉴了许多同行的论著、编著等科研成果，得到了学校领导、教务处、基础课部的大力支持，湖南人民出版社为本书的编写出版给予了大量的帮助，在此一并表示深深的谢意！

由于编写水平有限，教材中的不妥之处在所难免，恳请专家、同行和读者予以指正．

编　者

2009 年 1 月

目录

contents

第1章 行列式

行列式是研究线性代数的一个重要工具，本章将由简单的二、三阶行列式推广到 n 阶行列式，然后讨论 n 阶行列式的性质及其计算方法，最后介绍利用行列式来解线性方程组的克莱姆 Cramer 法则.

学习本章要求理解 n 阶行列式的定义，了解并能应用行列式的基本性质，掌握行列式的计算方法以及利用行列式解有关线性方程组的 Cramer 法则.

第2章 矩阵

矩阵是数学中一个重要内容，也是经济模型、工程计算等问题中强有力的解决问题的工具. 在本课程中，矩阵作为研究线性变换、向量的线性相关性及求解线性方程组的工具，在线性代数中具有尤其重要的地位.

学习本章，要求掌握矩阵的概念，熟练掌握矩阵的运算，理解逆矩阵的概念与性质，会求逆矩阵，会对矩阵进行初等变换，并会求矩阵的秩.

目录 contents

第3章 线性方程组

线性方程组是线性代数的重要内容之一，自然科学和经济管理中的许多问题都可以归结为求线性方程组的解.

学习本章，应掌握线性方程组有解的判别定理，熟练求解线性方程组；理解向量的概念，掌握向量的运算法则；理解向量组的线性相关性及其有关性质，会求向量组的极大无关组及其秩，并能熟练地用导出组的基础解系表示线性方程组的解.

第4章 矩阵的特征值与特征向量

在经济理论及其应用研究中，经常需要讨论矩阵的特征值等问题. 本章将对向量的内积、方阵的特征值与特征向量以及方阵的相似与对角化等问题进行探讨，这些内容在许多学科中都有非常重要的作用.

学习本章，应理解距阵的特征值和特征向量的概念，会计算矩阵的特征值和特征向量；了解矩阵与对角矩阵相似的充分与必要条件；了解实对称矩阵的特征值和特征向量的性质；熟练掌握实对称矩阵的对角化.

第5章 二次型

前面我们主要研究线性问题，但在实际问题中还存在大量解线性问题，其中最简单的模型就是二次型. 本章利用矩阵工具来研究二次型，介绍化二次型为标准形的几种方法.

学习本章，应理解二次型及其矩阵的概念；理解二次型的标准形和规范形的概念，会化二次型为标准形，并能判断一个二次型的正定性.

第6章　应用问题

矩阵理论在自然科学、社会科学和经济管理领域有着广泛的应用. 以下用三方面实例来介绍这类应用.

学习本章,主要掌握以下三类问题的求解:交通流问题;递归关系式的矩阵解法;投入产出数学模型.

附录　数学实验、答案及参考文献

计算机是学习数学的重要工具,它运用一些数学软件完成必要的计算、分析和判断,来解决一些典型的数学问题,从而避免繁琐的公式推导和数学运算. 我们将数学内容与计算机应用有机结合起来就是数学实验. 本附录将介绍 Mathematica 数学软件及其在线性代数方面的基础实验.

目录 contents

第 *1* 章 CHAPTER

行列式

行列式是研究线性代数的一个重要工具，本章将由简单的二、三阶行列式推广到n阶行列式，然后讨论n阶行列式的性质及其计算方法，最后介绍利用行列式来解线性方程组的克莱姆Cramer法则．学习本章要求理解n阶行列式的定义，了解并能应用行列式的基本性质，掌握行列式的计算方法以及利用行列式解有关线性方程组的Cramer法则．

第1节 n 阶行列式

§1.1.1 二阶行列式

行列式的概念是从解线性方程组的需要中引进来的．所谓线性方程组是指未知项的最高次数是一次的方程组，其中最简单的是在中学时已经学习过的二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 a_{ij} 表示第 i 个方程中第 j 个未知数的系数，b_i 表示第 i 个方程的常数项．用加减消元法来解方程组(1.1)，第一、二两个方程分别乘以 a_{22}、a_{12}，然后相减，消去未知数 x_2，得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$$

同理消去未知数 x_1，得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，方程组(1.1)有唯一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases}$$

为了便于记忆上述公式，我们引入如下记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.2}$$

称为二阶行列式，其中 a_{ij} 称为这个行列式第 i 行第 j 列的元素，横排为行，竖排为列.

在(1.2)式，二阶行列式是四个数排列成两行两列，用一种称为对角线法则计算得出的数，从左上角到右下角(主对角线)上元素相乘，取正号，右上角到左下角(次对角线)上元素相乘，取负号，两个乘积的代数和就是二阶行列式的值.

当 $D \neq 0$ 时，利用二阶行列式，方程组(1.1)的解可以用公式表示成：

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}, \tag{1.3}$$

其中 D_1、D_2 分别是用常数项 b_1、b_2 代替 D 中的第一、二列所得到的二阶行列式,即

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

因 D 的每个元素是方程组(1.1)的未知数的系数按原来顺序排列,故称为方程组(1.1)的系数行列式.

引入二阶行列式来表达二元线性方程组(1.1)的解的公式(1.3),它形式简单,便于记忆,且鲜明地给出了方程组(1.1)的解与其系数和常数项的关系.

例 1 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 = 22 \\ 5x_1 - 3x_2 = 1 \end{cases}$$

【解】

$$\because \qquad D = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -41$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 22 & 7 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -73$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 22 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -108$$

故

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{73}{41} \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{108}{41}$$

§1.1.2 三阶行列式

对于三元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$ (1.4)

与解二元线性方程组类似,先由第一、二两个方程消去 x_3,得到只含有 x_1、x_2 的一个二元方程,再由第一、三两个方程消去未知数 x_3,得另一个只含有 x_1、x_2 的二元方程,由所得两方程消去 x_2,得到仅含有一个未知数 x_1 的方程

$$(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32})x_1$$
$$= b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - a_{13}a_{22}b_3 - a_{12}b_2a_{33} - b_1a_{23}a_{32}$$

记 x_1 的系数为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1.5}$$

称为三阶行列式.

若此行列式 $D \neq 0$,则得未知数 x_1 的值

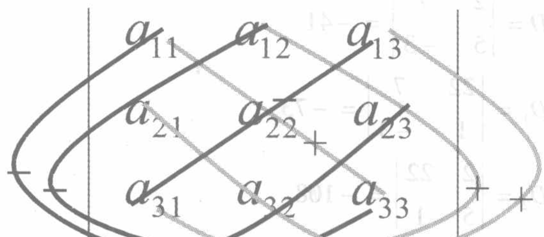
$$x_1 = \frac{D_1}{D}$$

同理可得 $$x_2 = \frac{D_2}{D} \qquad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

其中 $D_j (j=1,2,3)$ 是用常数项 b_1、b_2、b_3 代替 D 中第 j 列所得到的三阶行列式,即

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

由(1.5)式,三阶行列式是九个数排成的三行三列,表示(1.5)右边的六个乘积的代数和. 可采用对角线法则来计算:



$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

说明:对角线法则只适用于二阶与三阶行列式.

例 2 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = -3 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -5 \end{cases}$$

【解】 用对角线法计算四个行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 11$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ -5 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 33$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 11$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&2&3\\-2&1&-3\\1&-4&-5\end{vmatrix}=-22$$

故 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=3,\ x_2=\dfrac{D_2}{D}=1,\ x_3=\dfrac{D_3}{D}=-2$

§1.1.3 n 阶行列式

为了定义 n 阶行列式,我们先来看三阶行列式(1.5)是按照什么规律构成的.

把三阶行列式(1.5)改写成

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}\tag{1.6}$$

(1.6)式的右端是三项的和,每一项恰恰是左端三阶行列式的第一行的元素与从该三阶行列式中删去 a_{1j} 所在的行和列以后所得的二阶行列式的乘积;每一项前面的符号由 a_{1j} 的行数与列数之和 $(1+j)$ 来决定,即每一项的前面冠以符号 $(-1)^{1+j}$.

为了方便计算,我们规定在三阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

中删去 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 所在的行与列,余下的元素按原来的顺序构成的一个二阶行列式,称为元素 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij},称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式,记作 A_{ij},即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

例如:a_{21} 的余子式和代数余子式分别是

$$M_{21}=\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

(1.6)式可写为

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}\tag{1.7}$$

这说明:三阶行列式可以表示成第一行元素与对应于它们的代数余子式的乘积之和. 也就是说,三阶行列式可以由相应的三个二阶行列式来定义.

我们规定:一阶行列式就是这个数的本身,即

$$|a_{11}|=a_{11}$$

这样,二阶行列式也同样可以用余子式和代数余子式来定义,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\left|a_{22}\right| - a_{12}\left|a_{21}\right| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} \tag{1.8}$$

类似地,定义四阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \tag{1.9}$$

我们从二、三、四阶行列式的展开式(1.7)、(1.8)、(1.9)中发现它们遵循着一个共同的规律——可以按第一行展开. 因此,我们用递归法给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.1 规定 $n(n\geqslant 2)$ 阶行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j} \tag{1.10}$$

其中 A_{1j} 为元素 a_{1j} 的代数余子式,即

$$A_{1j} = (-1)^{1+j}M_{1j}$$

$$= (-1)^{1+j}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3j-1} & a_{3j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

M_{1j} 称为 a_{1j} 元素的余子式.

(1.10)式通常称为 n 阶行列式按第一行元素的展开式. $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 所在的对角线称为行列式的主对角线,相应地 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 称为主对角元素. $a_{n1},a_{n-12},\cdots,a_{1n}$ 所在的对角线为行列式的次对角线,其元素称为行列式的次对角线元素.

由定义 1.1 可知 n 阶行列式是个数值,它是由其 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 中所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积的代数和,它总共有 $n!$ 项,其中带正号的项和带负号的项各占一半.

例 3 证明 n 阶下三角行列式(当 $i<j$ 时,$a_{ij}=0$,即主对角线以上的元素全为零)等于主对角元素的乘积,即

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

【证】 对 n 用数学归纳法.

当 $n=2$ 时,结论显然成立. 假设当 $n=k$ 时,结论成立. 则对 D_{k+1} 按第一行展开,有

$$D_{k+1}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k+11} & a_{k+22} & a_{k+33} & \cdots & a_{k+1k+1} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k+12} & a_{k+13} & \cdots & a_{k+1k+1} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}\cdots a_{k+1k+1})=a_{11}a_{22}\cdots a_{k+1k+1}$$

由数学归纳法可知,结论对一切自然数 n 均成立.

特别地,对于 n 阶对角形行列式,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

例 4 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \begin{smallmatrix} & \cdot \\ \cdot & \end{smallmatrix} & & \\ a_n & & & * \end{vmatrix}$$

其中次对角线以上的元素全为零,次对角线以下 * 处元素可为任意数.

【解】依定义 1.1,得

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \begin{smallmatrix} & \cdot \\ \cdot & \end{smallmatrix} & & \\ a_n & & & * \end{vmatrix}=(-1)^{1+n}\cdot a_1\begin{vmatrix} 0 & & & a_2 \\ & & a_3 & \\ & \begin{smallmatrix} & \cdot \\ \cdot & \end{smallmatrix} & & \\ a_n & & & * \end{vmatrix}=(-1)^{1+n}a_1D_{n-1}$$

由此递推公式可得

$$D_n=(-1)^{1+n}a_1D_{n-1}=(-1)^{n-1}a_1D_{n-1}$$

$$
\begin{aligned}
&=(-1)^{n-1}a_1(-1)^{(n-1)-1}a_2D_{n-2}\\
&=(-1)^{(n-1)+(n-2)}a_1a_2D_{n-2}\\
&=\cdots=(-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1}a_1a_2\cdots a_n\\
&=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n
\end{aligned}
$$

定义 1.2 规定 $n(n>1)$ 阶行列式为

$$
D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}(i=1,2,\cdots,n) \tag{1.11}
$$

或 $D_n=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}(j=1,2,\cdots,n)$ (1.12)

它们称为 n 阶行列式按第 i 行(或第 j 列)元素的展开式. 可以证明,定义 1 和定义 2 是等价的.

例 5 证明 n 阶上三角形行列式(当 $i>j$ 时,$a_{ij}=0$,即主对角线以下的元素全为零)等于主对角元素的乘积,即

$$
D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}
$$

【证】 由定义 1.2,将按 D_n 第 1 行展开得

$$
D_n=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}D_{n-1}
$$

由此递推公式,继续将 D_{n-1} 按第 1 行展开……得

$$
D_n=a_{11}a_{22}D_{n-2}=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}
$$

例 6 用行列式定义计算下列 n 阶行列式:

$$
(1)D_n=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n\end{vmatrix}
$$