中国科学技术大学国家基础科学人才培养基地物理学丛书

主　编　杨国桢　副主编　程福臻

力学与理论力学

[下册]

秦　敢　向守平　编著

科学出版社
www.sciencep.com

中国科学技术大学国家基础科学人才培养基地物理学丛书
主　编　杨国桢
副主编　程福臻

力学与理论力学

（下册）

秦　敢　向守平　编著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是《力学与理论力学》的下册，即理论力学部分，具体内容如下：第1章从达朗贝尔原理和哈密顿变分原理两条途径建立拉格朗日方程，并分析对称性与守恒定律的内在联系.第2章是拉格朗日方程的一些有意义的应用，主要包括碰撞与散射和小振动，对非线性振动以及电磁场中的带电粒子也作了简单的介绍.第3章是哈密顿力学，包括哈密顿正则方程、正则变换、泊松括号以及哈密顿-雅可比方程等.第4章介绍刚体的运动学和动力学，其中后者采用拉格朗日方法来讨论.第5章对非线性力学的基本概念和重要结论作了简要介绍，如非线性与混沌、确定性的随机、分形与分维以及非线性波与孤立子等.

本书语言平实，在演绎基本内容的同时，也介绍了理论力学在其他物理学科上的应用，并结合一些具体内容尝试推出有关学习的认识论和方法论.

本书作为综合性大学及理工类院校的理论力学教科书或参考书，也可供大专院校物理类师生及物理教学研究者参考.

图书在版编目(CIP)数据

力学与理论力学.下册/秦敢，向守平编著.—北京：科学出版社，2008
(中国科学技术大学国家基础科学人才培养基地物理学丛书/杨国桢主编)
ISBN 978-7-03-021931-2

Ⅰ.力… Ⅱ.①秦…②向… Ⅲ.①力学-高等学校-教材②理论力学-高等学校-教材 Ⅳ.O3

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第066600号

责任编辑：胡云志 唐保军/责任校对：张小霞
责任印制：张克忠/封面设计：耕者设计工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008年7月第一版 开本：B5(720×1000)
2008年7月第一次印刷 印张：14 1/4
印数：1—4 000 字数：261 000

定价：23.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

丛 书 序

2008年是中国科学技术大学建校五十周年.值此筹备校庆之际,由几位长年从事基础物理教学的老师建议,编著一套理科基础物理教程,向校庆五十周年献礼.这一建议在理学院很快达成了共识,并受到学校的高度重视和大力支持.随后,理学院立即组织了在理科基础物理教学方面有丰富教学经验的老师,组成了老、中、青相结合的班子,着手编著这套丛书,并以此进一步推动理科基础物理的教学改革与创新.

中国科学技术大学在老一辈物理学家、教育家吴有训先生、严济慈先生、钱临照先生、赵忠尧先生、施汝为先生的亲自带领和指导下,一贯重视基础物理教学,历经五十年如一日的坚持,现已形成良好的教学传统.特别是严济慈和钱临照两位先生在世时身体力行,多年讲授本科生的力学、理论力学、电磁学、电动力学等基础课.他们以渊博的学识、精湛的讲课艺术、高尚的师德,带领出一批又一批杰出的年轻教员,培养了一届又一届优秀学生.这套丛书的作者,应该说都直接或间接受到过两位先生的教诲.出版这套丛书也是表达作者对先生的深深感激和最好纪念.

这套丛书共九本:《力学与理论力学(上、下)》、《电磁学与电动力学(上、下)》、《光学》、《原子物理与量子力学(上、下)》、《热学 热力学与统计物理(上、下)》.每本约40万字,主要是为物理学相关专业本科生编写的,也可供工科专业物理教师参考.每本书的教学学时约为72学时.可以认为,这套丛书系列不仅是普通物理与理论物理横向关联、纵向自洽的基础物理教程,同时更加适合我校理科人才培养的教学安排,并充分考虑了与数学教学的相互配合.因此,在教材的设置上,《力学与理论力学(上、下)》、《电磁学与电动力学(上、下)》中,上册部分分别是普通物理内容,而下册部分为理论物理内容.还要指出的是,在《原子物理与量子力学(上、下)》、《热学 热力学与统计物理(上、下)》中,考虑到普通物理与理论物理内容的界限已不再那样泾渭分明,而比较直接地用现代的、实用的概念、物理图像和理论来阐述,这确实不失为是一种有意义的尝试.

这套丛书在编著过程中,不仅广泛吸取了校内老师的经验,采纳了学生的意见,而且还征求了中国科学院许多相关专家的意见和建议,体现了"所系结合"的特点.同时,还聘请了兄弟院校及校内有丰富教学经验的教授进行双重审稿,期望将其错误概率降至最低.

历经几年,在科学出版社大力支持下,这套丛书终于面世,愿她能在理科教学改革与创新中起到一点作用,成为引玉之砖,共同来促进物理学教学水平的提高及其优秀人才的培养,并望广大师生及有关专家们继续提出宝贵意见和建议,以便改进.最后,对方方面面为这套丛书编著与出版的完成而付出艰辛努力及其给予关心、帮助的同志表示深切感谢!

中国科学技术大学理学院院长

杨国桢 院士

2007年10月

前　言

以"力"为研究着眼点的牛顿理论取得了从天上到人间的辉煌成功，证明了该理论是描述宏观低速力学体系的正确理论. 但这一事实并不能说明力学领域中牛顿理论是独一无二的. 如果我们能跳出"力"这个日常生活中比较熟悉的概念，寻找到其他恰当物理量作为研究的核心，以此为出发点，就可能建立起另一套力学理论.

几何光学的情况就是正确理论不唯一的一个例子. 我们知道在几何光学适用的范围里，光在均匀介质中直线传播，在两个介质的边界上有反射定律和折射定律. 这三个基本定律可以从惠更斯原理(更严格的是麦克斯韦电磁波理论)证明. 然而，还有一种思路完全不同的理论，即费马原理，其表述是，在起点和终点固定时，光的实际路径一定使光程取极值. 令人惊奇的是，从费马原理也能得到几何光学的三个基本定律.

经过以拉格朗日和哈密顿为杰出代表的众多数理科学家的努力，两大类全新的力学理论建立了起来，它们统称为分析力学. 分析力学以"能量"或"类能量"(拉格朗日函数)为立足点，只要得到某力学体系中它们的数学形式，将其代入到新理论体系的动力学方程后就可以对该力学体系进行求解. 由于能量是一个标量，与力矢量相比较，数学处理往往较简单，也容易推广到量子力学和相对论情形①. 对于约束问题，分析力学通过引入广义坐标和其他一些数学手段，可以很方便地进行求解；作为对比，牛顿理论中的运动方程涉及事先未知的约束力，求解比较繁琐. 当然，分析力学的更大意义在于，由于能量是所有运动形式的共同"度量"，分析力学较容易应用到力学体系之外的其他领域，特别是近代物理学科，如量子力学和统计物理等，这是以"力"为中心的牛顿理论难以做到的.

从"力"转到"能量"，刚开始需要一段适应过程. 希望同学们从现在开始，就有意识地培养新的习惯，以便在普通物理学知识的基础上更顺利地学习更高层次的物理学知识.

---

① 在相对论情形，能量作为四矢量的一个分量作相对论变换，而力的相对论变换较复杂.

本书是《力学与理论力学》的下册，上册中对于牛顿理论体系已经作了全面的阐述，所以在下册中，一开始就介绍分析力学，使大家能在有限的学时里充分熟悉和掌握这些新的理论体系. 具体安排如下：

第 1 章从达朗贝尔原理和哈密顿变分原理两条途径建立拉格朗日方程，并分析对称性与守恒定律的内在联系. 第 2 章是拉格朗日方程的一些有意义的应用，主要包括碰撞与散射和小振动，对非线性振动以及电磁场中的带电粒子也作了简单的介绍. 第 3 章是哈密顿力学，包括哈密顿函数和正则方程、正则变换、泊松括号以及哈密顿-雅可比方程等.

刚体是理论力学传统的内容之一，知识点颇多，单独成章是极其自然的. 尽管本书主要采用拉格朗日力学方法讨论其动力学问题，但由于刚体有太多属于自身的特别性质，所以为避免冲淡分析力学主体内容的连贯性，我们把这一章放到哈密顿力学之后的第 4 章.

自 20 世纪 60 年代以来，非线性科学开始了迅速发展，并逐渐引起人们普遍的关注. 不仅在数学和物理学，而且在化学、生物学、医学、气象学、天文学以及工程、信息科学等领域，甚至在经济学、金融学以及社会学等人文科学领域，对非线性问题的研究都日益广泛和深入. 现在人们了解到，非线性现象是普遍存在的，世界的本质可以说就是非线性的，而真正线性的问题反而只是一些特殊或局部的情况. 因此，我们深感有必要向大学生介绍一些非线性现象的基本知识. 考虑到数学处理非线性问题的复杂性以及教材篇幅的限制，本书只对非线性力学的基本概念和重要结论作简要介绍，如非线性与混沌、确定性与随机、分形与分维以及非线性波与孤立子等. 当然，这些概念和结论中，很多不仅适用于力学，而且在其他领域也是普适的.

理论力学是理论物理的第一门课程，所以指出学习理论物理与普通物理时的区别是很有必要的. 普通物理侧重于从个别的实验事实归纳出局部的理论规律，最后再上升到这一学科领域的统一规律. 在论述问题时采用的数学工具比较初等，有时在逻辑严密性上不太苛求. 而理论物理往往一开始就介绍最普遍的规律，之后才是这些规律在各种具体情形时的简化以及应用. 在论述问题时采用的数学工具更高级，推演过程有着严格的逻辑性. 这种风格上的差异决定了学习时的方法也应该有所不同. 比如说，相比于普通物理课程，在理论物理课程的学习中掌握基本原理，在做题时举一反三就显得更加重要.

在学习中，还要处理好“树木”和“森林”的关系，既要对每一个关键细节揣摩，也要注意学习的整体性，具体是两个方面：其一是各分析力学体系之间，以及它们与牛顿力学体系之间的比较；其二是分析力学与其他学科，如电磁学、光学、量子力学以及统计物理学等的联系.

此外，要顺利地学习这门课程，下列数学基础也是至关重要的——微积分、张量分析、线性代数、常微分方程和简单的偏微分方程.

在本书的编写过程中，中国科学技术大学理论力学教研组的全体同仁曾对本书的风格和结构展开积极的讨论，提供了一些建设性的思路. 中国科学院国家天文台邹振隆研究员、清华大学物理系安宇教授、中国科学技术大学李书民副教授和汪秉宏教授认真阅读了本书的初稿，并提出了很多重要的建议和修正意见. 本丛书全体编写组成员多次相互讨论，也使我们受益匪浅. 另外，在去年的试讲中，热心同学的得力相助使本教材增色不少. 在此我们一并表示衷心的感谢！

本书在编写过程参考了国内外很多理论力学教材，比较重要的列在附录中. 作者希望能博采众家之长，并在一些章节中加入了我们自己对若干基本概念、重要原理以及科学方法的理解，目的是抛砖引玉，激发同学们的进一步思考.

尽管我们已经尽心尽力，但限于自身的科研教学水平，本书可能还存在疏漏. 希望广大读者提出宝贵意见，以便再版时及时修正.

编　者
于中国科学技术大学
2008 年 3 月

目　录

第 1 章　拉格朗日方程

1.1　约束和广义坐标

物体的机械运动可以分为两类:一类称为**自由运动**,做此类运动的物体,其坐标和速度完全取决于有明确形式的力和初始条件;另一类运动,除了要满足运动方程外,物体的坐标和速度还存在一些形式上不涉及任何力的限制关系,我们称这些关系为**约束**,这类运动称为**非自由运动**或**有约束运动**.

在牛顿力学框架中,对于有 N 个自由运动质点的体系的求解,可归结为求解二阶微分方程组

$$m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{j=1,j\neq i}^{N} \boldsymbol{F}_{ji} + \boldsymbol{F}_i^e, \quad i = 1,2,\cdots,N \tag{1.1.1}$$

上式右边的第一项是除了第 i 个质点外的其余 $N-1$ 个质点对第 i 个质点的作用力,属于体系的内力,第二项是第 i 个质点所受到的体系外的作用力,即外力. 这些力都有给定的明确表达式,称为**主动力**. 求解上述方程组只是一个数学问题,简单情形有解析解,复杂情形则只有数值解. 所以原则上自由运动问题都已经解决了.

非自由运动的运动方程为

$$m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{j=1,j\neq i}^{N} \boldsymbol{F}_{ji} + \boldsymbol{F}_i^e + \boldsymbol{R}_i \tag{1.1.2}$$

与式(1.1.1)相比,上式右边多了最后一项 $\boldsymbol{R}_i$,它保证第 i 个质点的运动服从某种给定约束形式的**约束力**. 与主动力不同,约束力不能事先就给出确切的表达式,而是与质点的运动状态相关,所以在研究约束体系时必须对包含约束力的运动方程以及所有约束方程(详见 1.1.1 节)进行联合求解. 求解方式将由于约束情况的不同而千差万别,往往复杂繁琐,不再像自由运动情形那样简单明了.

与牛顿力学有所不同,分析力学通过一些数学手段,对于一些非自由运动问题,无需求解约束力就可以求得最终解. 此外,分析力学中“能量”或“类能量”代替了牛顿力学中“力”的地位,使其很方便地用于非力学体系.

分析力学是一个博大精深的理论体系,本章是其入门,所以首先要介绍一些基本概念. 首先对约束进行分类,然后引入简化此类运动问题的一个重要工具——广义坐标.

1.1.1　约束的分类

根据约束对质点或质点系运动的限制条件的不同性质，可以按以下三种方法对约束进行分类.

1. 完整约束与非完整约束

对于 N 个质点组成的质点系，所谓**完整约束**(或**几何约束**)，是指质点系满足约束方程

$$f(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_N;t)=0 \tag{1.1.3}$$

也就是说约束仅与时间以及各质点的坐标有关，而与各质点的速度无关.

常见的完整约束是：质点被约束在某一曲线或曲面上运动，则约束方程就是该曲线或曲面的方程. 例如，在水平圆环上运动的质点，在图 1.1.1 所示坐标系中，受到的完整约束是

$$\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ z=0 \end{cases} \tag{1.1.4}$$

而在图 1.1.2 中旋转抛物面上运动的质点，其完整约束方程是

$$x^2+y^2=2pz \tag{1.1.5}$$

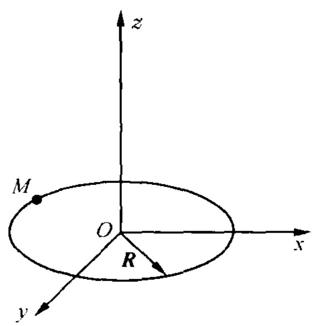

图 1.1.1　在水平圆环上运动的质点

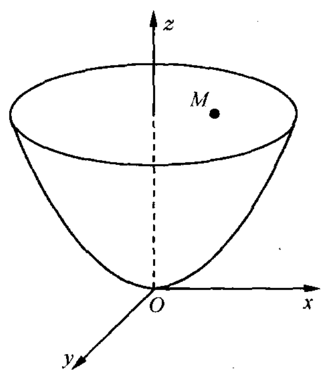

图 1.1.2　在旋转抛物面上运动的质点

又如，刚体中的任意两个质点之间的距离不变

$$|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|=d_{ij}=\text{const.} \tag{1.1.6}$$

但要注意，完整约束不仅仅只对坐标有约束. 如果将完整约束关系式对时间分别求一次或二次导数，就能得到与速度或加速度相关的约束. 可见这些约束也存在于完整约束之中，只是它们与简单的坐标约束并不独立.

在定义非完整约束之前，先介绍自由度的概念.

经典研究体系处于三维空间，因而确定一个质点的空间位矢需要三个独立的参量，而 N 个自由质点组成的体系则需要 $3N$ 个独立的参量来描述. 我们把描述一个体系所需的独立参量的数目叫做这个体系的**自由度**. 于是单个质点的自由度为 3，而 N 个自由质点体系的自由度是 $3N$.

如果该质点系存在 k 个完整约束

$$f_i(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_i,\cdots,\boldsymbol{r}_N;t)=0,\quad i=1,2,\cdots,k \tag{1.1.7}$$

则独立坐标的数目减少 k 个，自由度

$$s=3N-k \tag{1.1.8}$$

如果约束方程不仅含有坐标和时间，还与速度相关，即

$$f(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_N;\dot{\boldsymbol{r}}_1,\dot{\boldsymbol{r}}_2,\cdots,\dot{\boldsymbol{r}}_N;t)=0 \tag{1.1.9}$$

则称该约束为**微分约束**. 有些微分约束具有可积性，能转化为式(1.1.7)的形式. 例如，两个质点的速度有以下限制关系

$$\dot{\boldsymbol{r}}_1-\dot{\boldsymbol{r}}_2=\boldsymbol{v}_0 \tag{1.1.10}$$

其中$\boldsymbol{v}_0$是常量. 此式可以积分为

$$\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{v}_0t+\text{const.} \tag{1.1.11}$$

所以该约束关系等价于仅仅对坐标的限制. 这类具有可积性的微分约束仍然属于完整约束.

相反，有些微分约束不具有可积性，则称其为**非完整约束**. 例如，一个半径为 a 的圆盘保持竖直，在光滑的 xy 水平面上自由滚动，如图 1.1.3 所示. 全面描述此运动体系的坐标可以选取圆盘中心的坐标 x、y，盘轴与 x 轴的夹角 θ，以及圆盘的自转角 φ. 但这四个参量彼此不完全独立. 设盘心速度大小为 v，则

$$v=a\dot{\varphi},\quad \dot{x}=v\cos\theta,\quad \dot{y}=v\sin\theta \tag{1.1.12}$$

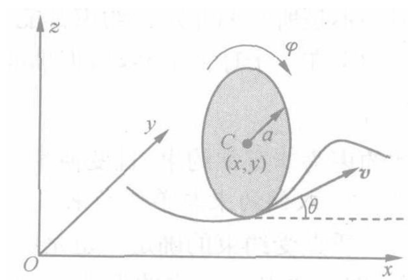

图 1.1.3　在水平面上滚动的竖直圆盘

消去 v，得到两个微分约束方程

$$\mathrm{d}x-a\cos\theta\mathrm{d}\varphi=0,\quad \mathrm{d}y-a\sin\theta\mathrm{d}\varphi=0 \tag{1.1.13}$$

由式(1.1.13)消去 φ 得

$$\mathrm{d}x\sin\theta-\mathrm{d}y\cos\theta=0 \tag{1.1.14}$$

数学上可以证明(见史捷班诺夫著的《微积分方程教程》)，微分式

$$F_x(x,y,z)\mathrm{d}x+F_z(x,y,z)\mathrm{d}y+F_z(x,y,z)\mathrm{d}z$$

乘以某积分因子 $\varphi(x,y,z)$后可积为 $f(x,y,z)$的充分必要条件是

$$F_x\left(\frac{\partial F_y}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial y}\right)+F_y\left(\frac{\partial F_z}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial z}\right)+F_z\left(\frac{\partial F_x}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial x}\right)=0 \quad (1.1.15)$$

或者写成紧凑的形式为

$$\boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F})=0 \quad (1.1.16)$$

其中 $\boldsymbol{F}$ 的三个分量分别是 F_x、F_y和 F_z.

将式(1.1.14)代入式(1.1.16)(将变量 z 换成θ),显然不能满足.所以此处的微分约束无法积分成直接的坐标参量之间的关系,属于非完整约束.

2. 定常约束与非定常约束

需要指出的是,这些对质点约束的曲线或曲面自身也可以处于已知的运动状态,比如匀速运动或更复杂的其他运动.如果从约束是否与时间有关的角度来考虑,我们把不显含时间的约束称为**定常约束**(或**稳定约束**),其一般形式的数学表示为

$$f(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_N;\dot{\boldsymbol{r}}_1,\dot{\boldsymbol{r}}_2,\cdots,\dot{\boldsymbol{r}}_N)=0 \quad (1.1.17)$$

而显含时间的约束称为**非定常约束**(或**不稳定约束**).

定常约束体系在另一个有相对运动的参考系中看,则是非定常约束,如一个质点在一个半径为 R 的固定球面上运动,则质点受定常约束 $x^2+y^2+z^2=R^2$,但在相对于实验室坐标系沿 x 正方向以速度 v 运动的坐标系中,约束关系变成了

$$(x+vt)^2+y^2+z^2=R^2 \quad (1.1.18)$$

但并不是所有的非定常约束都能通过变换参考系而转化成定常约束,如一个质点被约束在一个球面上运动,但球面半径是随时间变化的,则约束方程为

$$x^2+y^2+z^2=R(t)^2 \quad (1.1.19)$$

此约束为非定常约束,且变换参考系不能使其变换成定常约束.

3. 双侧约束与单侧约束

质点受约束的确定性也是约束的一个重要方面.如果质点始终不能脱离某约束,即该约束是等式的形式,则称该约束为**双侧约束**(或称**双面约束**、**不可解约束**[①]);如果质点可以在某一方面脱离约束,即该约束是不等式的形式,则称为**单侧约束**(或称**单面约束**、**可解约束**).

例如,两个质点在 xy 平面内运动,两质点由长为 l 的刚性杆相连.则该体系可以用直角坐标(x_1,y_1)和(x_2,y_2)来描述,这四个参量服从约束关系

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=l^2 \quad (1.1.20)$$

① 此处的"可解"是指可以解脱,不是常规所指的可以求解.

这就是双侧约束. 将此例中的刚性杆换成同样长度的柔软绳索时,约束关系为

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \leqslant l^2 \tag{1.1.21}$$

这就是单侧约束.

由于单侧约束中不等式的存在,一般认为它也是一种不完整约束. 但与不可积的微分约束不同的是,通过对该约束作进一步分析,可以将其从不完整约束中除去. 例如,当式(1.1.21)取等号时,显然是完整约束,两个质点体系的自由度为 3. 而当式(1.1.21)取严格的不等号时,两个质点在平面内做自由度为 4 的运动,不存在任何约束,直至两者距离拉大到 l,又回到完整约束情形.

在本教材的范围内我们重点讨论完整约束,理由是:其一,通过消除不独立的坐标,完整约束问题总可以有一个形式解;而不完整约束问题不存在一般解法,作为非力学专业的教材,重点应该是掌握分析力学的框架和基本内容,回避这个问题是明智的. 其二,通过线、面或容器壁加于系统的不完整约束只是研究宏观问题时的一种数学简化,由微观上原子分子的电磁力等效而来. 在微观领域的研究(在经典力学方法依然有效的情形)中,这些约束不复存在.

1.1.2 广义坐标

1. 广义坐标

前述具有 N 个质点的体系,在受到 k 个完整约束的情况下,自由度 $s=3N-k$. 所以在直角坐标系中,这些质点的位矢 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N$ 并不独立,这将给问题的求解带来困难. 考虑到自由度是体系的内禀属性,其大小与具体坐标形式的选取无关,所以如果能找到 s 个独立变量 $q_1, q_2, \cdots, q_s$ 来取代原来的直角坐标变量,并且使得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_1 &= \boldsymbol{r}_1(q_1, q_2, \cdots, q_s; t) \\
\boldsymbol{r}_2 &= \boldsymbol{r}_2(q_1, q_2, \cdots, q_s; t) \\
&\cdots\cdots \\
\boldsymbol{r}_N &= \boldsymbol{r}_N(q_1, q_2, \cdots, q_s; t)
\end{aligned} \tag{1.1.22}$$

则原来的约束问题就变成 s 个新独立变量下的自由运动问题,而原来所有的约束关系都包含在上式的方程中. 我们把任何一组能完全描述力学体系各部分位形的参数称为**广义坐标**.

2. 位形空间

具有 N 个自由质点的系统,其位形由它的 $3N$ 个直角坐标值完全给出. 也可以说 $3N$ 维普通空间的一点$(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N)$一一对应地表示了质点系的位形. 类似地,对于一个自由度为 s 的约束体系,可以将每一个广义坐标 q_α 看作抽象空间的一个维度,则这一组广义坐标就张成了一个 s 维空间,称为**位形空间**. 位形空间中的

一点$(q_1,q_2,\cdots,q_s)$完全规定了质点系的位形，当力学系统的位形随时间变化时，位形点在位形空间中划出一条曲线轨迹.

3. 广义坐标的选取

广义坐标的选择范围很广，既可以是直角坐标，也可以是球坐标或柱坐标等，甚至可以具有能量或角动量的量纲. 它们不必隶属于某个质点，而是若干质点坐标的组合，一般也不能像普通坐标那样适当地每三个分成一组来合成一个矢量.

有了位形空间的概念，就很容易理解，广义坐标的选取方式原则上可以有无限种. 比如，可以将一组广义坐标在位形空间做任意“旋转”，就可以得到新的一组广义坐标，而“旋转”的方式显然是无限多的.

当然，在求解具体问题时，我们一般不会去关心这种无限性，往往选取形式直观简洁、性质简单、能反映体系对称性的一组广义坐标. 最合适的选取方案有时凭借经验能够很自然地找到. 例如，图 1.1.4 中，双摆的自由度为 2，很容易想到选择两个摆动角θ_1和θ_2作为广义坐标. 有时候可以有几种选择方案，究竟采用哪一种取决于各人的偏好. 例如，图 1.1.5 中，一根刚性杆斜靠于墙(保持在一竖直平面内运动)时，自由度为 1，选取质心的横坐标x、纵坐标y或杆的倾斜角θ中的任意一个做广义坐标都是适宜的.

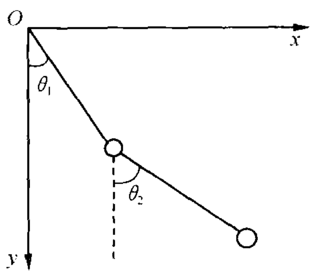

图 1.1.4　双摆

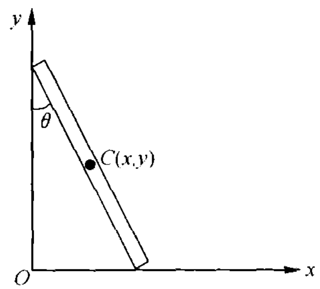

图 1.1.5　斜靠于墙的刚性杆

对于稍微复杂的体系，往往需要经过一定的分析才能确定广义坐标. 例如，前述竖直圆盘在水平面上纯滚动问题，经过了从式(1.1.12)到式(1.1.14)的分析后，才确定了以x、y和θ作为广义坐标(注意：该体系的约束是非完整约束，独立参量数和自由度不同！).

4. 广义速度

广义坐标对时间的一阶导数称为广义速度. 就像广义坐标不必表示常规的空间位矢一样，广义速度也不必是常规的速度.

与广义坐标和广义速度相配套的概念还有广义力、广义动量，我们将在以后陆续介绍.