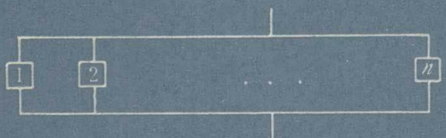
·运筹学小丛书·

运筹学介绍

越民义 著



辽宁教育出版社

·运筹学小丛书·

运筹学介绍

越民义 著

辽 宁 教 育 出 版 社
一九八五年·沈阳

运筹学介绍

越民义 著

辽宁教育出版社出版　辽宁省新华书店发行

（沈阳市南京街6段1里2号）　沈阳新华印刷厂印刷

字数：33,000　开本：787×1092 1/32　印张：1 7/8

印数：1—5,500

1985年6月第1版　1985年6月第1次印刷

责任编辑：杨　力　责任校对：广　东

封面设计：周晓风

统一书号：7371·16　定价：0.34 元

出 版 说 明

运筹学是二十世纪四十年代开始形成的一门学科，是现代数学的一个重要组成部分。在科学技术迅速发展的今天，运筹学有着广泛的应用。

为了向广大读者普及运筹学知识，在中国运筹学会的关心和支持下，尤其是在徐利治教授的积极倡导和组织下，编辑出版了这套《运筹学小丛书》。

这套丛书用通俗的语言，系统地介绍了运筹学中各个分支的基础知识和应用方法，其中包括规划论、对策论、排队论等方面的二十多个专题。在编写内容上，注重科学性、知识性和趣味性相结合，论述一般先从实例谈起，由浅入深，引出完整的数学理论。并且，大部分内容的引出方法都是初等的，因此，凡是具有高中以上文化程度的读者，都可以阅读。

目　　录

这本小册子的目的是想对于什么是运筹学（它是如何产生的，它所要解决的是哪些问题）作一简单的介绍。我们想通过几个简单的例子来说明：运筹学是如何解决问题的。

一、运筹学的含义及其简单历史

什么是运筹学？这是一个颇难回答的问题。按照世界上最早出现的运筹学会——英国运筹学会——所下的定义，运筹学是“运用科学方法来解决工业、商业、政府、国防等部门里有关人力、机器、物资、金钱等大型系统的指挥或管理中出现的复杂问题的一门学科”。其目的是要帮助管理者以科学方法确定其方针和行动。但是，即使在这一定义出现的年代，关于运筹学也已经出现了几十个不同的定义，到了现在，它的定义则是数以百计了。这些定义虽各有不同，但其核心部分则是“用科学方法来处理自然环境中有关人和物的运行体系（所谓物，包括从机器一直到按人们已经接受的某些规律运转的复杂的社会结构）”。

人类社会的组织和生产只要进入某种水平，人们在考虑有关战争、管理等方面的问题时，自然就会仔细筹划，设法得到对自己尽可能有利的结果。而要达到这一点，他的思维

方法和使用的手段必须合乎客观规律，也就是说，必须具有一定的科学性。因此，某些朴素的运筹学思想可说是“自古有之”。下面的一个例子来自宋朝沈括所著《梦溪笔谈》。

“庆历中，河决北都商胡，久之未塞。三司度支副使郭申锡亲往董作。凡塞河决，垂合，中间一埽，谓之‘合龙门’，功全在此。是时屡塞不合。时合龙门埽长六十步。有水工高超者献议，以谓：‘谓埽身太长，人力不能压，埽不至水底，故河流不断，而绳缆多绝。今当以六十步为三节，每节埽长二十步，中间以索连属之。先下第一节，待其至底，方压第二、第三。’旧工争之，以为不可，云：‘二十步埽不能断漏，徒用三节，所费当倍，而决不塞。’超谓之曰：‘第一埽水信未断，然势必杀半。压第二埽，止用半力，水纵未断，不过小漏耳。第三节乃平地施工，足以尽人力。处置三节既定，即上两节自为浊泥所淤，不烦人功。’申锡主前议，不听超说。……既定而埽果流，而河决愈甚，申锡坐谪。卒用超计，商胡方定。”（译文见附录）

在这个例子中我们可以看出，对待如何堵塞黄河的决口这一问题，就是两种显然不同的思想在那里斗争，一种思想来自于靠经验，可能历史上曾有过几次用六十步长的埽去塞龙门得到成功，这次由于水太大或者别的原因，用老办法“屡塞不合”。面对此种情况，郭申锡等人并不认真去分析失败的原因，及至别人提出了建议，他们也不认真考虑，还是照老一套办事，直到“河决愈甚”，丢了乌纱帽；另一种思想来自于对事情作科学的分析：由于埽身太长，人力不能压，埽不至水底，故河流不断，而绳缆多绝。然后根据这

点，提出了埽分三节的想法，对于三节的好处作了科学的分析，因而在采用之后，"商胡方定"。高超不仅提出了模型（埽分三节），而且还作了量的分析，这正是运筹学方法的核心。

上面的例子所用的分析方法可以认为是一种朴素的运筹学方法。近代运筹学之所以成为一门学科，主要是在于它的研究对象不只是一些单个的具体实际问题。它的研究对象主要是某些带有典型性的问题，从其中提出具有共性的模型，寻求解决这种模型的方法。它的研究成果不应仅局限于使用在某个具体问题上面，而应是适用于某些类型的问题。当然，运筹学的这种性质，只是在它发展到一定的阶段才形成的。在三十年代，当运筹学处于萌芽状态的时候，它也是对具体问题作具体分析，情况与上述例子类似。

早在1938年，英国研制成功了雷达、新式作战飞机等武器，对这些武器，没有实际作战使用的经验。为了检验它们在大型作战演习中的效果，成立了一个科学小组来研究如何评价演习的结果，以及如何制定武器的使用方案。"运筹学"（意即作战研究）一词就被提出。在第二次世界战争期间，英国、美国、加拿大等国的各个主要兵种，为了更有效地使用武器，为了组织军事运输等，便相继成立了"运筹学"小组或作战分析小组，它们由一些科学工作者、工程师和数学家所组成，他们的主要任务是研究一些涉及军事作战的战术和战略问题。他们的一部分工作成果后来由Morse和Kimball写入了《运筹学》一书。在战争年代，只能对具体问题进行具体研究，谈不上把"运筹学"提到学科的高度。我们可以认为：运筹学在当时是处于一种孕育阶段。

这一孕育阶段对于运筹学的形成和发展是极其重要的。当时参加“运筹学”的科学工作者，在战争结束时，估计超过700人。他们用许多实际例子证明了：即使对于象战争这样紧急、复杂、变化多端的事件，科学方法对于诸如提供技术上的支持、各种战术结果的评估、某些战术上的革新创造、战术上的规划以至战略上的选择等等，也皆能起到重要的成效。不仅如此，更为重要的是：后来这些人当中不少人通过自己的实践，从战争年代的科学工作中看到了一门从事于系统运行研究的新兴学科的萌芽，并看到了当时所获得的许多知识有可能在和平时期的许多活动中得到应用。

正是由于这种体会，在战争结束之后，英国的一部分先驱者即举行了一些非正式的会议，讨论如何把他们在战争中发展起来的“运筹学方法”转移到民用方面来。在1948年，他们成立了一个运筹俱乐部，使得这类非正式会议能持续下去。俱乐部里除了讨论运筹学在工、农、服务等行业中（如棉纺、钢铁、煤、电、制鞋、牲畜饲养、建筑、运输，等）应用的各种可能性之外，还为第一份运筹学杂志（《运筹学》季刊，1950年）的创办奠定了基础。俱乐部在1953年改为（英国）运筹学学会。

在美国，国家研究院在1949年设立了一个运筹学委员会，其任务是培养人们对于非军事运筹学的兴趣。1952年，美国运筹学学会成立，这是世界上第一个运筹学学会。同年，该学会的机关刊物《运筹学》创刊。我国的运筹学学会成立于1980年，《运筹学杂志》创刊于1982年。现在，至少有三十五个国家成立了全国性的运筹学学会。

二、运筹学所研究的对象及其方法论

要使一门学科得到发展，特别是象运筹学这样在短期内得到了快速的发展，单凭某些人的努力是不可能的。它首先必须适应当时社会的需要，特别是社会生产的需要，否则即使风行一时，也会很快销声匿迹。其次，必须具备使该学科得到发展的条件，否则它也难健康地成长。在第二次世界战争之后，由于战争中发展起来的一些技术转为民用，出现了一些新兴工业，其中不少在生产过程方面很复杂，规模庞大，人们遇到了一些前所未有的问题。这些问题单凭个人的经验和直观的判断是无法处理的。再加上市场竞争的剧烈和产品新陈代谢的加速，经验和直观的判断更是难起作用，运筹学的思想和方法正适合于帮助处理这类问题；另一方面，在战争之后，计算机科学得到了迅速发展和广泛采用，这对于利用运筹学方法及时地解决大型的、复杂的问题提供了有力的工具，因而使运筹学方法（至少是一部分）成为切实可行。

一般地说来，运筹学所做的事情就是：把当事人所提出的问题以及所涉及的系统，以科学的态度弄清楚，并以科学的语言表达出来。若有可能，尽量用数学语言来陈述。同时又必须以严格的科学态度搜集和分析可以得到的资料，挑选出其中与问题有关的，并根据过去的经验考察其中与当前情

况有因果关系的部分，然后再看缺少哪些要用到的资料并设法补充。假若这些缺少的资料由于某种原因不能搜集到，则需要考察所研究的系统在某种给定的情况之下会产生什么结果。特别要着重考察那些可控制的因素，注意它们的变化对于整个系统可能产生的影响。研究的目的就是要对问题所涉及的系统得到确切的了解，提出解决问题的途径，以便最优地去控制系统，使之服从于当事人的最大利益。总之，运筹学工作者在处理实际问题时，其目的就是要帮助当事人作出决策：对情况作出客观的分析，对各种可能出现的情况作出科学的估计，提出控制系统的途径和方法。若此方法得到采用，还须对执行的情况和结果随时加以注意和分析，必要时提出改进的意见，或中止实施。

总括起来说，对于应用运筹学在处理实际问题时，其步骤大致如下：

1）将问题提清楚，即用明确的语言把问题表达出来；

2）构造模型，包括数据的收集和处理；

3）对模型求解；

4）对模型加以检验，并对所求出的解进行评价；

5）具体实施。

三、作为一门学科来看待的运筹学

前面提到：运筹学的研究对象主要是某些带有典型性的问题，从其中提出具有共性的模型寻求解答，然后将所得结果应用于该类问题以及与之具有共同结构的问题。根据处理方法的相近，运筹学中又把问题加以归类。例如我们把排队问题并入一类，它们的共性是（有形的或无形的）排队现象。这一类中包括大量的不同性质的问题，不同的问题要求不同的方法去处理。但这些方法都带有某些共同的基本特征（例如都使用随机过程来描述），因而对这类问题就可从一种或几种不同的角度进行系统的深入的研究。这种将问题归类的结果，在运筹学中就产生了许多相对独立的分支。它们是：数学规划（包括线性规划、非线性规划、整数规划、几何规划、分数规划、参数规划、多目标规划，等），组合最优化、图论与网络流、动态规划、对策论、排队论、可靠性理论（包括更新和维修）、库存论、搜索论、决策论、随机控制、模拟技术，等。

现在我们对其中一部分作一些简单介绍。

1. 数学规划

数学规划所要解决的问题是：决定某些可控制的因素在

服从预先给定的约束条件之下应该取什么样的值使得所选定的目标达到最小（或最大）。用数学的语言来表示，就是要解决下面的极值问题：

$$\min_{x\in A} f(x), \quad x=(x_1, \cdots, x_n)。^*$$

这里的A表示n维欧氏空间中的某一个集合，也就是我们所说的"约束条件"。若$f(x)$是$x_1, \cdots, x_n$的一个线性（一次）函数，而且A又可用x_1，…，x_n的一组线性等式或不等式来表示，我们就称这一问题为线性规划问题。若$f(x)$为非线性的，或者用来表示A的（不）等式中出现非线性的，则称该问题为一非线性规划问题。若规定x_1，…，x_n只能取某些整数值（例如正整数，或只取0或1），则称此问题为一整数规划问题。若目标函数$f(x)$是一个向量函数，即$f(x)=(f_1(x), \cdots, f_m(x)), m>1$，则此问题称为多目标规划问题。当然这时极大、极小的概念就不能象通常那样理解了。

例1 设某工厂欲生产一种合金，要求含铅量为百分之三十，含锌量为百分之三十，含锡量为百分之四十。今设市场上可以买到的含铅、锌、锡之合金有A、B、C、D四种，其各所含铅、锌、锡之百分数以及每公斤之价格如下表所示：

合金	A	B	C	D	要生产的合金
% 铅	10	10	40	60	30
% 锌	10	30	50	30	30
% 锡	80	60	10	10	40
价格/公斤	3.2元	2.8元	3.5元	1.9元	求极小

---

* $\min_{x\in A} f(x)$表示在集合A上求函数$f(x)$的极小值。

试问按比例各买多少，使得所生产的合金单价最低？

设需要买的A、B、C、D所占的百分比分别为x_1，x_2，x_3，x_4。则根据假设，应有下列的方程

$$x_1+x_2+x_3+x_4=100$$

$$10x_1+10x_2+40x_3+60x_4=30$$

$$10x_1+30x_2+50x_3+30x_4=30$$

$$80x_1+60x_2+10x_3+10x_4=40$$

此外，我们还要求$x_1\geqslant0$，$x_2\geqslant0$，$x_3\geqslant0$，$x_4\geqslant0$。在这些条件之下，我们需要求出一组 x_i，使得

$$3.2x_1+2.8x_2+3.5x_3+1.9x_4$$

达到极小。

例 2：设要建造两个工厂 A_1和 A_2，又设有三个地点B_1，B_2，B_3皆适合设置这两个厂房。问题是：要从经济上来考虑如何从 B_1，B_2，B_3 中选出两个。

令 C_{ij} 表示将单位货物从 B_i 运到 B_j 的运费；d_{kl} 表示要从 A_k 运输到 A_l 的货物的总量。令

① $$x_{ik}=\begin{cases}1，若将\ A_k\ 设置在\ B_i，\\0，若不然。\end{cases}$$

由于每一工厂必须要建造在一个地点，故

② $$x_{1k}+x_{2k}+x_{3k}=1，\ k=1，\ 2。$$

又因每一个地点至多只能建造一个工厂，故

③ $$x_{i1}+x_{i2}\leqslant1，\ i=1，\ 2，\ 3。$$

若将 A_k 设置在 B_i，A_l 设置在 B_j，则运输费为 $c_{ij}d_{kl}+c_{ji}d_{lk}$。于是，总的运费为

④ $$\sum_{\substack{i=1}}^{3}\sum_{\substack{j=1\\i\neq j}}^{3}\sum_{k=1}^{2}\sum_{\substack{l=1\\k\neq l}}^{2} c_{ij}d_{kl}x_{ik}x_{jl}。$$

（上式一共有122页。）我们的问题于是变成：在条件①、②、③之下，求出一组 x_{ik}，使④取极小值。

例 1 是一个典型的线性规划问题，例 2 是一个所谓的 0 － 1 （零——）规划问题，是整数规划的一种特殊情况。

通常用来求解线性规划的方法是单纯形法，这是一种行之有效的方法。对于变量的个数不超过五万，线性（不）等式的个数不超过五千，这样规模的问题，目前已有现成的程序可供使用。对于一些较为特殊的问题，即线性（不）等式组中不为 0 的系数，相对来说，所占的比例很小的情形（稀疏矩阵），变量以及（不）等式的个数还可大为增大。

对于求解整数规划，即使是象例 2 那样的 0 一 1 规划，目前还没有象单纯形法这样的有效方法，但对于具有几百个变量，几十个约束条件这样规模的问题，还是有方法可以求解的。对于解法问题，这套小丛书中有专册论述，就不在这里叙述了。

2. 组合最优化

从数学上讲，组合最优化问题可以这样来叙述：设有一个由有限多个元素组成的集合 $E=\{a_1, \cdots, a_n\}$。令$\mathscr{F}$表示由E 的某些子集作成的集，也就是说，$\mathscr{F}$中的每一元素都是 E 的一个子集，即由E 的某一个或某几个 a_i 作成的集。假

若我们有一个定义在$\mathscr{F}$上的实函数 f，即对应于$\mathscr{F}$中的任一元素 e，相应的有一个实数 $f(e)$。问题是要在$\mathscr{F}$中求一个 e，使得 $f(e)$ 在E中达到极大（或极小）。

比如说，假设给定了m个“城市”$\{A_1, \cdots, A_m\}$。我们希望在那些从 A_1 出发，经过所有的“城市” $A_2, \cdots, A_m$ 每个正好一次，然后回到 A_1 的路径中，寻找一条最短的路径。在这里，E 可以取作是所有由两个城市作成的对所成的集：$E=\{(A_i, A_j) \mid i=1,\cdots, m, j=1,\cdots,m, i\neq j\}$，即$E$中的元素皆为形如$(A_i, A_j)$的城市对，总共有$\frac{1}{2}m(m+1)$个对。对于$\mathscr{F}$中的元素 e，我们可以这样来取：即

$$e=\{(A_{i_1}, A_{i_2}), (A_{i_2}, A_{i_3}), \cdots, (A_{i_m}, A_{i_1})\},$$

它是由E中的m个元素所组成，其中 $\{i_1, \cdots, i_m\}$ 为 $\{1, \cdots, m\}$的一个排列，其中 $i_1=1$。这样，$\mathscr{F}$共有$(m-1)!$个元素。令 $d(A_i, A_j)$ 表示城市 A_i 与 A_j 之间的距离则 $f(e)=d(A_{i_1}, A_{i_2})+\cdots+d(A_{i_m}, A_{i_1})$。问题是要求一个 $e_0\in\mathscr{F}$，使 $f(e_0)=\min\limits_{e\in\mathscr{F}} f(e)$。

上述问题为组合最优化中著名问题之一，人们称之为旅行商问题 (Travelling Salesman Problem)，或推销员问题，或货郎担问题。它是著名的难题之一。

由于我们假设E只有有限个元素，$\mathscr{F}$也就只有有限个元素，因此，在$\mathscr{F}$中总有一个 e_0 使函数 $f(e)$在E中达到极小（或极大）。组合最优化的核心问题就是要对于一个给定的问题，如何找出一个有效的方法（算法）A，使得对于问题的任意给定的参数（例如上例中的m和$d(A_i, A_j)$），利用算