

根据教育部《国家课程标准》编写

龙门品牌



学子至爱

龙门 考题

主 编：安 忠
本册主编：安 忠
高太芳

初中数学

不等式(组)



龍 門 書 局

www.Longmenbooks.com

新课标

不等式(组)



初中数学

主 编:安 忠

本册主编:安 忠 高太芳
编 者:吴修存 李 彬 梁西海
鲁 磊 徐雪梅 刘增玉
马灿勇 任 瑞 闫 辉
杨朝涵 庄英红 高太芳

龍 門 書 局

北 京

版权所有 侵权必究

举报电话:(010)64030229;(010)64034315;13501151303

邮购电话:(010)64034160

图书在版编目(CIP)数据

龙门专题:新课标. 初中数学. 不等式(组)/安忠主编;安忠,高太芳本册主编. —北京:龙门书局,2008

ISBN 978-7-5088-1701-9

I. 龙… II. ①安…②安…③高… III. 数学课—初中—教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 161426 号

责任编辑:田旭 马建丽 倪炜玲/封面设计:耕者

龙 门 书 局 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

www.longmenbooks.com

世界知识印刷厂印刷

科学出版社总发行 各地书店经销

*

2008 年 10 月第 一 版 开本:A5(890×1240)

2008 年 10 月第一次印刷 印张:6 1/2

字数:231 000

定 价:12.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)



生命如歌

未名湖畔，博雅塔旁。

明媚的晨光穿透枝叶，懒散的泻落在林间小道上，花儿睁开惺忪的眼睛，欣喜地迎接薄薄的雾霭，最兴奋是小鸟，扇动翅膀在蔚蓝的天空中叽叽喳喳地欢唱起来了。微风轻轻拂动，垂柳摇曳，舒展优美的身姿，湖面荡起阵阵涟漪，博雅塔随着柔波轻快地翩翩起舞。林间传来琅琅的读书声，那是晨读的学子；湖畔小径上不断有人跑过，那是晨练的学子；椅子上，台阶上，三三两两静静地坐着，那是求索知识的学子……

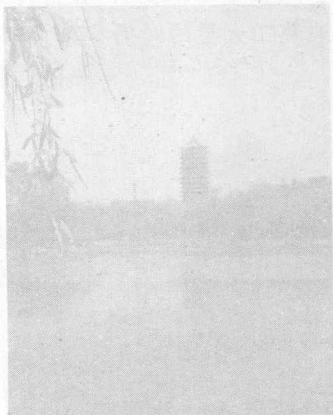
在北大，每个早晨都是这样的；在清华，每个早晨都是这样的；在复旦，在交大，在南大，在武大……其实，在每一所高校里，早晨都是一幅青春洋溢、积极进取的景象！

在过去几年时间里，我一直在组织北大、清华的高考状元、奥赛金牌得主还有其他优秀的学子到全国各地巡回演讲。揭开他们“状元”的光环，他们跟我们是那么的相似，同样的普通与平凡。

是什么成就了他们的“状元”辉煌？

在来来往往带他们出差的路上，在闲来无事的聚会聊天过程中，我越来越发现，在普通平凡的背后，他们每个人都是一道亮丽独特的风景，都是一段奋斗不息、积极进取的历程，他们的成功，是偶然中的必然。

小朱，一个很认真、很可爱的女孩子，高中之前家庭条件十分优越，但学习一直平平；在她上高中前，家庭突遭变故，负债累累，用她妈妈的话说，“家里什么都没有了，一切只能靠你自己了。”她说自己只有高考一条路，只有考好了，才能为家里排忧解难。我曾经在台下听她讲自己刻苦学习的经历：“你们有谁在大年



三十的晚上还学习到深夜三点？你们又有谁发烧烧到 39 度以上还在病床上看书？……”那一年，她以总分 684 分成为了浙江省文科高考状元。

陆文，一个出自父母离异的单亲家庭的女孩，她说，她努力学习的动力就是想让妈妈高兴，因为从小她就发现，每次她成绩考得很好，妈妈就会很高兴。为了给妈妈买一套宽敞明亮的房子，她选择了出国这条路，考托福，考 GRE，最后如愿以偿，被芝加哥大学以每年 6.4 万美金的全额奖学金录取为生物方向的研究生。6.4 万美金，当时相当于人民币 52 万。

齐伟，湖南省高考第七名，清华大学计算机学院的研究生，最近被全球最大的软件公司 MICROSOFT 聘为项目经理；霖秋，北京大学数学学院的小妹，在坚持不懈的努力中完成了自身最重要的一次涅槃，昨天的她在未名湖上游弋，今天的她已在千里之外的西雅图……

还有很多很多优秀的学子，他们也都有自己的故事，酸甜苦辣，很真实，很精彩。我有幸跟他们朝夕相处，默默观察，用心感受，他们的自信，他们的执着，他们的勤奋刻苦，尤其是他们的“学而得其法”所透露出来的睿智更让人拍案叫绝，他们人人都有一套行之有效的学习方法，花同样的时间和精力他们可以更加快速高效，举一反三。我一直在想：如果当年我也知道他们的这些方法，或许我也能考个清华北大的吧？

多年以来，我一直觉得我们的高考把简单的事情搞复杂了，学生们浪费了大量的时间和精力却收效甚微；多年以来，我们也一直在研究如何将一套优良的学习方法内化在图书中，让同学们在不知不觉中轻松快速的获取高分。这，就是出版《龙门专题》的原因了。

一本好书可以改变一个人的命运！名校，是每一个学子悠远的梦想和真实的渴望。“少年心事当拿云，谁念幽寒坐鸣呃！”

龙门专题，走向名校的阶梯！



总策划 田田

2008 年 7 月

《龙门专题》状元榜

赵永胜 2007年山西省文科状元

中国人民大学财政金融学院

星座：射手座

喜欢的运动：爬山 乒乓球

喜欢的书：伟人传记，如《毛泽东传》

人生格言：生命不息，奋斗不止

学习方法、技巧：兴趣第一，带着乐趣反复翻阅教科书，从最基本的知识入手，打牢“地基”，从基础知识中演绎难题，争取举一反三，融会贯通。合理安排时间，持之以恒，坚信“天道酬勤，勤能补拙”。



卢毅 2006年浙江省理科状元

北京大学元培学院

星座：天秤座

喜欢的运动：跑步 滑板

喜欢的书：《卡尔维诺文集》

人生格言：做自己

学习方法、技巧：注重知识点的系统性，将每门学科的知识点作一个系统地梳理，无论是预习还是复习，这样便可在课上学习时有的放矢，课后复习时查漏补缺。坚持锻炼，劳逸结合。



武睿颖 2005年河北省文科状元

北京大学元培学院

星座：天秤座

喜欢的运动：游泳 网球

喜欢的书：A Thousand Splendid Suns

人生格言：赢得时间，赢得生命

学习方法、技巧：勤奋是中学学习的不二法门；同时要掌握良好的学习方法，如制定学习目标、计划，定期总结公式、解题思路等，这样能事半功倍。最后要培养良好的心态，平和积极地面对学习中的得失。



刘诗泽 2005年黑龙江省理科状元

北京大学元培学院

星座：金牛座

喜欢的运动：篮球 台球 排球

喜欢的书：《三国演义》

人生格言：战斗到最后一滴血

学习方法、技巧：多读书，多做题，多总结。看淡眼前成绩，注重长期积累。坚持锻炼，劳逸结合。



邱迅 2005年四川省文科状元

北京大学

星座：处女座

喜欢的运动：篮球 乒乓球

喜欢的书：《哈利·波特》

人生格言：非淡泊无以明志，非宁静无以致远

学习方法、技巧：1. 要保持一颗平常心来面对考试，繁重的学习任务和激烈的竞争。2. 学会从各种测验考试中总结经验、教训，而不要仅仅局限于分数。3. 学会计划每一天的学习任务，安排每一天的学习时间。4. 坚持锻炼，劳逸结合。



林叶 2005年江苏省文科状元

北京大学

星座：水瓶座

喜欢的运动：跑步 台球 放风筝

喜欢的书：《黑眼睛》《笑面人》

人生格言：不经省察的生活不值得过

学习方法、技巧：学习分两类，一类和理想真正有关，另一类只是不得不过的门槛。不要总因为喜好就偏废其中的一个，它不仅是必须的，而且你也许会发现，它本来也值得你热爱和认真对待。你自己的学习方法别人永远无法替代，它也是你生活的一部分，完善它，就像完善你自己。



田禾 2005年北京市理科状元

北京大学元培学院

星座：水瓶座

喜欢的运动：羽毛球

喜欢的书：历史类书籍

人生格言：认真、坚持

学习方法、技巧：认真听讲，勤于思考，作阶段性总结，及时调整学习计划，坚持阅读课外书和新闻，一以贯之，学不偏废。



朱师达 2005年湖北省理科状元

北京大学元培学院

星座：水瓶座

喜欢的运动：足球 篮球 游泳

喜欢的书：《追风筝的人》《史记》

人生格言：有梦想就有可能，有希望就不要放弃

学习方法、技巧：1. 知识系统化、结构化是掌握知识的有用技巧和重要体现。2. 知其然还要知其所以然，记忆才更牢固。3. 整体把握兴趣和强弱科的平衡。4. 正确认识自己的弱点，集中力量克服它。



编委会

主 编：安 忠

编委会成员：吴修存 李 彬 梁西海

鲁 磊 徐雪梅 刘增玉

马灿勇 任 瑞 闫 辉

杨朝涵 庄英红 高太芳

Contents

目录

基础篇	(1)
-----------	-------

第一章 一元一次不等式	(1)
-------------------	-------

1.1 不等式及其性质	(1)
-------------------	-------

1.2 不等式的解集	(11)
------------------	--------

1.3 不等式的解法	(25)
------------------	--------

1.4 一元一次不等式的实际应用	(38)
------------------------	--------

小结	(51)
----------	--------

本章验收	(65)
------------	--------

第二章 一元一次不等式组	(72)
--------------------	--------

2.1 一元一次不等式组及其解法	(72)
------------------------	--------

2.2 一元一次不等式与一次函数	(90)
------------------------	--------

2.3 一元一次不等式组的实际应用	(107)
-------------------------	---------

小结	(123)
----------	---------

本章验收	(142)
------------	---------

综合应用篇	(149)
-------------	---------

综合专题一:不等式(组)与数轴	(149)
-----------------------	---------

综合专题二:求不等式(组)的特殊解	(150)
-------------------------	---------

综合专题三:确定题目中字母的取值范围..... (152)

综合专题四:分式、二次根式中的不等关系问题 (154)

综合专题五:平面图形中的不等关系 (161)

模拟测试卷(一) (181)

模拟测试卷(二) (188)

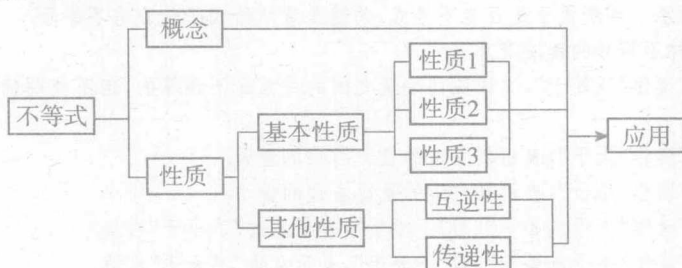
模拟测试卷(三) (195)

基础篇

第一章 一元一次不等式

1.1 不等式及其性质

知识网络图解



知识点精析与应用



知识点精析

知识点 1: 不等式的概念

一般地,用不等号表示不相等关系的式子叫做不等式.常见的不等号有“ $<$ ”(或“ $\leq$ ”),“ $>$ ”(或“ $\geq$ ”),及“ $\neq$ ”.其中“ $\leq$ ”表示“小于或等于”,“ $\geq$ ”表示“大于或等于”.在具体的问题情境中要注意理解反映不等关系的字词.如:大、小、多、少、不足、超过、至少等.

知识点 2: 不等式的性质

(1) 不等式的基本性质

①不等式的两边都加上(或减去)同一个整式,不等号的方向不变,用符号表示为:若 $a > b$, 则 $a + c > b + c$ 或 $a - c > b - c$; 若 $a < b$, 则 $a + c < b + c$ 或 $a - c < b - c$, 其中 c 为整式.

②不等式的两边都乘以(或除以)同一个正数,不等号的方向不变,用符号表示为:若 $a > b, c > 0$, 则 $ac > bc, \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$; 若 $a < b, c > 0$, 则 $ac < bc, \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

③不等式的两边都乘以(或除以)同一个负数,不等号的方向改变,用符号表示为:若 $a > b, c < 0$, 则 $ac < bc, \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$; 若 $a < b, c < 0$, 则 $ac > bc, \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

(2)不等式的互逆性:若 $a > b$, 则 $b < a$, 比如 $2 > x$, 则 $x < 2$.

(3)不等式的传递性:若 $a > b, b > c$, 则 $a > c$.



解题方法指导

题型 1: 不等式的意义

[例 1] 下列式子中不等式的个数是

()

(1) $3 > 0$; (2) $4x + 3y > 0$; (3) $x = 3$; (4) $x - 1$; (5) $x + 2 \leq 5$.

A. 2 个

B. 5 个

C. 4 个

D. 3 个

分析 根据不等式的定义,用不等号连接的式子即为不等式.

解 D

名师警示 判断式子是否为不等式,关键是看所给式子是否有不等号.

(1) 五种不等号的读法及意义.

① “ $\neq$ ”读作“不等于”,它说明两个量之间的关系是不相等的,但不能明确哪个量大、哪个量小.

② “ $>$ ”读作“大于”,表示其左边的量比右边的量大.

③ “ $<$ ”读作“小于”,表示其左边的量比右边的量小.

④ “ $\geq$ ”读作“大于或等于”,即“不小于”,表示左边“不小于”右边.

⑤ “ $\leq$ ”读作“小于或等于”,即“不大于”,表示左边“不大于”右边.

(2) 不等号的开口所对的数较大,另一边所对的数较小.

[例 2] 用不等式表示下列语句:

(1) a 的绝对值不小于 5; (2) a 的三倍与 b 的和是非负数;

(3) x 除以 5 的商减去 6 不大于 1; (4) a 与 b 两数差的平方至少为 4.

分析 “不小于”是指“大于或等于”,用符号表示为“ $\geq$ ”;“非负数”是指“大于或等于 0 的数”;“不大于”是指“小于或等于”,用符号表示为“ $\leq$ ”;“至少”的意思等同于“不小于”.

解 (1) $|a| \geq 5$; (2) $3a + b \geq 0$; (3) $\frac{x}{5} - 6 \leq 1$; (4) $(a - b)^2 \geq 4$.

名师警示 列不等式与列等式类似,其关键是正确理解数量之间的关系,将表示不等关系的词用数学符号表示出来,比如: (1) “不小于”为“ $\geq$ ”; (2) “不大于”为“ $\leq$ ”; (3) “不等于”为“ $\neq$ ”; (4) “至少”为“ $\geq$ ”; (5) “不足”为“ $<$ ”.

[例 3] 用甲、乙两种原料配制成某种饮料,已知这两种原料的维生素 C 含量及购买这两种原料的价格如下表:

	甲种原料	乙种原料
维生素 C (单位/千克)	600	100
原料价格 (元/千克)	8	4

现配制这种饮料 10 千克,要求: (1) 至少含有 4200 单位的维生素 C; (2) 购买甲、乙两种原料的费用不超过 72 元. 那么你能写出所需甲种原料的质量 x (千克) 应满足的不等式吗?



分析 由于所需甲种原料为 x 千克, 则所需乙种原料为 $(10-x)$ 千克, x 千克甲种原料含维生素 C 为 $600x$ 单位, 其价格为 $8x$ 元, $(10-x)$ 千克乙种原料含维生素 C 为 $100(10-x)$ 单位, 其价格为 $4(10-x)$ 元, 由此我们可以得出关于 x 的两个不等式: (1) $600x+100(10-x) \geq 4200$; (2) $8x+4(10-x) \leq 72$.

解 所需甲种原料的质量 x (千克) 应满足的不等式有两个: (1) $600x+100(10-x) \geq 4200$; (2) $8x+4(10-x) \leq 72$.

名师警示 不等式与方程一样都是用来解答实际问题的数学模型, 寻找不等关系 (该题中的两个条件) 是列不等式的关键.

题型 2: 不等式的性质

[例 4] 用不等号填空, 并简要说明理由.

(1) $x \leq y$, 则 $x+1$ _____ $y+1$;

(2) $2x \geq 3$, 则 $-x$ _____ $-\frac{3}{2}$;

(3) $a > b$, 则 $-2+3a$ _____ $-2+3b$.

分析 (1) 将 $x \leq y$ 两边同时加上 1, 不等式方向不变;

(2) 将 $2x \geq 3$ 两边同时除以 -2 (或乘以 $-\frac{1}{2}$), 不等号的方向改变;

(3) 将不等式 $a \leq b$ 两边同乘以 3, 然后加上 -2 , 不等式方向不变.

解 (1) $\leq$ $\because x \leq y, \therefore x+1 \leq y+1$. 依据不等式的基本性质 1.

(2) $\leq$ $\because 2x \geq 3, \therefore \frac{2x}{-2} \leq \frac{3}{-2}$, 即 $-x \leq -\frac{3}{2}$. 依据不等式的基本性质 3.

(3) $>$ $\because a > b, \therefore 3a > 3b. \therefore -2+3a > -2+3b$. 依据不等式的性质 1 和 2.

名师警示 解此类题的关键是先观察不等号的左、右两边是原不等式进行怎样的变形得来的. 然后依据不等式的三条基本性质决定不等号是否改变方向.

[例 5] a 是实数, 且 $x > y$, 则下列不等式中, 正确的是

()

A. $ax > ay$

B. $a^2x \leq a^2y$

C. $a^2x > a^2y$

D. $a^2x \geq a^2y$

分析 因为 a 是实数, 所以 $a > 0$ 或 $a < 0$ 或 $a = 0$. 当 $a = 0$ 时, $ax = ay = 0, a^2x = a^2y = 0$, 所以应排除 A、C 两项; 当 $a \neq 0$ 时, $a^2 > 0$, 所以由 $x > y$ 可得 $a^2x > a^2y$, 综上所述, 正确答案为 D 项.

解 D

名师警示 不等式两边都乘以一个数时, 一定要明确该数的性质, 然后依据适合的不等式的性质进行变形.



[例6] 若 $a < b$, 则不等式 $(a-b)x > a-b$ 化为“ $x > m$ ”或“ $x < m$ ”的形式是

()

A. $x > -1$

B. $x > 1$

C. $x < 1$

D. $x < -1$

分析 不等式 $(a-b)x > a-b$ 的两边同除以 $a-b$ 即可将不等式化为“ $x > m$ ”或“ $x < m$ ”的形式, 但是必须清楚 $a-b$ 的符号性质, 才能确定不等号“ $>$ ”改变方向还是不改变方向. 由于 $a < b$, 即 $a-b < 0$, 即 $a-b$ 是负数, 故 $(a-b)x > a-b$ 可化为 $x < 1$, 因此应选 C.

解 C

名师警示 不等式 $ax < b$ 化为“ $x > m$ ”或“ $x < m$ ”的形式, 就是不等式两边同除以未知数 x 的系数 a , 此时必须明确 a 的符号性质.

[例7] 若 $a < b < 0$, 则下列不等式一定成立的是

()

A. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

B. $ab < 1$

C. $\frac{a}{b} < 1$

D. $\frac{a}{b} > 1$

分析 由于 $a < b < 0$, 因此可令 $a = -2, b = -1$, 此时 $\frac{1}{-2} > \frac{1}{-1}, (-2) \cdot (-1) = 2 > 1, \frac{-2}{-1} = 2 > 1$, 所以一定成立的是选项 D.

解 D

名师警示 取一组满足 $a < b < 0$ 的 a, b 的值, 从而验证一定成立的不等式, 这种方法称为“赋值法”, 也称为“特殊值法”, 这是解答不等式选择题的常用方法.



基础达标演练

一、选择题

1. 由 $x < y$, 得到 $ax > ay$ 的条件应是

()

A. $a \geq 0$

B. $a \leq 0$

C. $a > 0$

D. $a < 0$

2. 下面列出的不等式中, 正确的是

()

A. a 不是负数, 可表示成 $a > 0$

B. x 不大于 3, 可表示成 $x < 3$

C. m 与 4 的差是负数, 可表示成 $m-4 < 0$

D. x 与 2 的和是非负数, 可表示成 $x+2 > 0$

3. 下列说法不正确的是

()

A. 若 $a > 1$, 则 $0 < \frac{1}{a} < 1$

B. 若 $a < 1$, 则 $\frac{1}{a} > 1$

C. 若 $a^2 > 0$, 则 $a \neq 0$

D. 若 $-1 < a < 0$, 则 $a^2 < 1$

4. 某种品牌的奶粉盒上标明“蛋白质 $\geq 20\%$ ”, 它所表达的意思是

()

A. 蛋白质的含量是 20%

B. 蛋白质的含量不能是 20%

C. 蛋白质的含量高于 20%

D. 蛋白质的含量不低于 20%



5. 若使 $6x < -7x$, 则 x 只能 ()

- A. $x > 0$ B. $x < 0$ C. $x \neq 0$ D. $x \geq 0$

6. 把 $2 > x + 4$ 化成 $x > a$ 或 $x < a$ 的形式, 则得到 ()

- A. $x > 2$ B. $x > -2$ C. $x < -2$ D. $x < 2$

二、填空题

7. 若 $ma < mb$, 则当 m _____ 时, $a > b$; 当 m _____ 时, $a < b$.

8. 某中巴车上标明“限载 45 人”, 意思是指该中巴车的载客数 _____, 如果用 x 表示载客数, 则有不等式 _____.

9. 小张卖衬衫, 某次进货一批, 总价是 18000 元, 零售时每件卖 250 元, 那么他至少卖 _____ 件才不会亏本.

10. 甲、乙两地相距 26 千米, 某人要在 $6\frac{1}{2}$ 小时内从甲地走到乙地, 设每小时至少走 x 千米, 用不等式表示题中的关系 _____.

11. 用不等号填空:

(1) 若 $x + 2 > 3$, 则 x _____ 1; (2) 若 $3x < -4$, 则 x _____ $-\frac{4}{3}$;

(3) 若 $-2x > 3$, 则 x _____ $-\frac{3}{2}$; (4) 若 $-\frac{2}{3}x < 1$, 则 x _____ $-\frac{3}{2}$.

12. 若 $-2a > -7a$, 则 a 的取值范围是 _____.

13. 某水井水位最低时低于水平面 5 米, 记为 -5 米, 最高时低于水平面 1 米, 则水井水位 h 的取值范围是 _____.

三、解答题

14. 某市电力公司为鼓励居民节约用电, 采用分段计费的方法, 规定每月不超过 100 度时, 按每度 0.52 元计费, 每月用电超过 100 度时, 超过部分按每度 0.4 元计费, 小明家上月的电费不少于 82 元, 他家上月的用电量至少是多少? 列出关系式.

15. 已知 $-x + 1 > -y + 1$, 试比较 $5x - 4$ 与 $5y - 4$ 的大小.

答案与提示

一、选择题

1. D (由于不等号的方向改变了, 故不等式两边同乘以的 a 是负数, 即 $a < 0$, 故选 D.)
 2. C (a 不是负数可表示为 $a \geq 0$; x 不大于 3 可表示为 $x \leq 3$; m 与 4 的差是负数可表示为 $m - 4 < 0$, 故选 C.)
 3. B (当 $a = -2$ 时, $-2 < 1$, 但是 $\frac{1}{a} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} < 1$, 故选项 B 不正确.)

4. D

5. B (由于 $6 > -7$, 故只有 $x < 0$ 时, $6x < -7x$ 才能成立.)

6. C ($-2 > x$ 即 $x < -2$.)

二、填空题

7. $< 0, > 0$ (依据不等式的性质 1 和 2 来解答.)



8. 不多于 45 人, $x \leq 45$ (“限载”表示最多的意思.)
9. 72 (设小张卖 x 件不亏本, 则 $250x \geq 18000$, 不等式两边都除以 250, 得 $x \geq 72$, 故小张至少卖 72 件才不会亏本.)
10. $\frac{13}{2}x \geq 26$ (正确理解关键字“至少”的含义.)
11. (1) $>$; (2) $<$; (3) $<$; (4) $>$ (变形的依据是不等式的性质.)
12. $a > 0$ (由于 $-2 > -7$, 所以只有当 $a > 0$ 时, $-2a > -7a$ 才能成立.)
13. $-5 \leq h \leq -1$.

三、解答题

14. 解: 设小明家上月的用电量是 x 度, 则列出的不等式是: $100 \times 0.52 + 0.4(x - 100) \geq 82$. (由于 $100 \times 0.52 < 82$, 故 $x > 100$, 所以超过 100 度的部分为 $(x - 100)$ 度应按 0.4 元/度收费.)
15. 解: 不等式 $-x + 1 > -y + 1$ 两边都减去 1, 得 $-x > -y$, 所以 $x < y$, 所以 $5x < 5y$, 所以 $5x - 4 < 5y - 4$. (依据不等式的性质先得出 x 与 y 的大小关系, 然后再比较 $5x - 4$ 与 $5y - 4$ 的大小.)

能力拓展



释疑解难

根据题意列不等式时, 准确理解表示不等关系的关键词语是关键. 如: “至少”, “不大于”, “非负数”, “不足”等表示的含义. 由于表示不等关系的关键词比表示相等关系的关键词多得多, 情况比较复杂, 所以初学者普遍感到困难, 出错率较高.

应用不等式的基本性质 3 将不等式变形是本节的重难点, 也是易错点, 一方面要明确不等式的两边同乘以(或除以)一个负数, 另一方面要注意改变不等号的方向, 当不等式两边同乘以(或除以)的数不明确是正数、负数或零时, 应分情况讨论.



典型例题导析

[例 1] 列不等式:

- (1) m 的 $\frac{1}{2}$ 与 n 的 3 倍的差是非正数;
- (2) 5 的倒数与 x 的和不小于 3; (3) x 的 6 倍与 7 的和至多是一 9.

错误解法 (1) $\frac{1}{2}m - 3n < 0$; (2) $\frac{1}{5} + x > 3$; (3) $6x + 7 < -9$.

正确解法 (1) $\frac{1}{2}m - 3n \leq 0$; (2) $\frac{1}{5} + x \geq 3$; (3) $6x + 7 \leq -9$.

名师警示 错误的原因是没有正确地理解表示不等关系的关键词“非正数”, “不小于”, “至多”. 非正数是指负数和 0, 不要漏掉 0; 不小于是指大于或等于, 不要漏掉等于;



至多是指最多为-9,不要漏掉-9.

【例2】已知 $a > b > 0$, 则下列不等式不一定成立的是 ()

A. $ab > b^2$

B. $a + c > b + c$

C. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

D. $ac > bc$

分析 依据不等式的性质变形, 由于 c 的取值可以是 $c > 0$ 或 $c < 0$ 或 $c = 0$, 所以当 $c > 0$ 时 $ac > bc$, 当 $c = 0$ 时 $ac = bc$, 当 $c < 0$ 时 $ac < bc$, 所以应选 D 项.

解 D

名师警示 本题还可以运用“特殊值法”来解答, 由 $a > b > 0$, 令 $a = 4, b = 2$, 则 $ab = 4 \times 2 = 8, b^2 = 4, \frac{1}{a} = \frac{1}{4}, \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$, 所以 A、C 正确. 而 $4 + c > 2 + c$, 所以 B 正确. 当 $c \leq 0$ 时, $4c \leq 2c$, 所以 D 错误.



应用能力

一、综合题

【例1】已知实数 a, b, c 在数轴上对应点如图 1-1-1 所示, 则下列各式中正确的是 ()

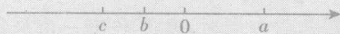


图 1-1-1

A. $cb > ab$

B. $ac > ab$

C. $cb < a$

D. $c + b > a + b$

分析 由数轴得 $c < b < 0 < a$, 所以 $cb > ab$, 故应选 A.

解 A

名师警示 首先明确 a, b, c 的符号及绝对值的大小关系, 根据不等式的性质, 从而判断每个选项中不等关系是否成立.

【例2】已知: $A = a^3 + 5a + 6, B = a^3 + 3a + 6$, 试比较 A, B 的大小.

分析 利用求差法比较 A, B 的大小, 即先求 $A - B$ 的值, 当 $A - B > 0$ 时, $A > B$; 当 $A - B = 0$ 时, $A = B$; 当 $A - B < 0$ 时, $A < B$.

解 $A - B = (a^3 + 5a + 6) - (a^3 + 3a + 6) = a^3 + 5a + 6 - a^3 - 3a - 6 = 2a$.

当 $a > 0$ 时, $A - B > 0$, 此时 $A > B$; 当 $a = 0$ 时, $A - B = 0$, 此时 $A = B$; 当 $a < 0$ 时, $A - B < 0$, 此时 $A < B$.

名师警示 由于 a 的性质不明确, 故应分三种情况比较 A, B 的大小, 本题体现了分类讨论的数学思想方法.

二、图表信息题

[例3] 某数学兴趣小组在学习不等关系(如图1-1-2).

我发现:

$$\because 3 > 2, 5 > 1, 15 > 2, \therefore 3 \times 5 > 2 \times 1.$$

$$\because 9 > 8, 7 > 5, 63 > 40, \therefore 9 \times 7 > 8 \times 5.$$



我断定:

如果 $a > b, c > d$,
那么 $ac > bd$.

图 1-1-2

你认为他们所得的结论正确吗? 如果正确, 请说明理由. 如果不正确, 请举出一个反例.

分析 由于 a, b, c, d 不仅表示正数, 也可以表示负数和零, 因此应先举几个 a, b, c, d 表示负数或零的例子进行验证, 比如 $a = -1, b = -2, c = -1, d = -2$, 此时 $a > b, c > d$, 但是 $ac = 1, bd = 4, ac < bd$, 故结论 $ac > bd$ 不成立.

解 举例: $a = -1, b = -2, c = -1, d = -2$, 此时 $a > b, c > d$, 但是 $ac = 1 < bd = 4$, 故“如果 $a > b, c > d$, 那么 $ac > bd$ ”不正确.

名师警示 说明一个命题是假命题时, 只要举出一个反例即可, 反例就是具备命题的条件, 而不具有命题的结论.

三、科学探究题

[例4] 观察下列不等式, 猜想并填空.

$$1^2 + 2^2 > 2 \times 1 \times 2;$$

$$(\sqrt{2})^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 > 2 \times \sqrt{2} \times \frac{1}{2};$$

$$(-2)^2 + 3^2 > 2 \times (-2) \times 3;$$

$$(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{8})^2 > 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{8};$$

$$(-4)^2 + (-3)^2 \quad \quad \quad 2 \times (-4) \times (-3);$$

$$(-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{8})^2 \quad \quad \quad 2 \times (-\sqrt{2}) \times \sqrt{8}.$$

猜想: $a^2 + b^2 \quad \quad \quad 2ab (a \neq b)$, 并证明.

分析 可以通过计算比较 $(-4)^2 + (-3)^2$ 与 $2 \times (-4) \times (-3)$ 的大小, 以及比较 $(-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{8})^2$ 与 $2 \times (-\sqrt{2}) \times \sqrt{8}$ 的大小, 再结合上面的四个例题猜想 $a^2 + b^2 > 2ab$, 然后依据完全平方公式 $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ 进行证明.

解 $>, >, >$. 由于 $(a-b)^2 > 0 (a \neq b)$, 所以 $a^2 + b^2 - 2ab > 0$, 不等式两边同时加上 $2ab$, 得 $a^2 + b^2 > 2ab$.

名师警示 利用由特殊到一般的数学方法得到猜想结论, 猜想到的结论还需要进行推理论证.