清华大学公共基础平台课教材

线性代数与几何（下）

俞正光 林润亮 鲁自群 编

清华大学出版社

清华大学公共基础平台课教材

线性代数与几何（下）

清华大学出版社
北 京

内容简介

本书的核心内容包括矩阵理论以及线性空间理论，分上、下两册出版，对应于两个学期的教学内容. 下册在上册的基础上更深入地介绍线性空间和线性变换的理论，具体包括一元多项式，相似标准形，欧几里得空间和酉空间，矩阵分析初步以及射影几何基础等五章内容. 本书将几何与代数密切地联系在一起，层次清晰，论证严谨，例题典型丰富，习题精炼适中.

本书可作为高等院校理、工、经管等专业的教材及教学参考书，也可供自学读者及有关科技人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与几何. 下/俞正光，林润亮，鲁自群编. —北京：清华大学出版社，2009.2

(清华大学公共基础平台课教材)

ISBN 978-7-302-18966-4

Ⅰ. 线… Ⅱ. ①俞… ②林… ③鲁… Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教材 ②解析几何—高等学校—教材 Ⅳ. O151.2 O182

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 185591 号

责任编辑：刘 颖
责任校对：赵丽敏
责任印制：杨 艳
出版发行：清华大学出版社　　地　址：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　邮　编：100084
社 总 机：010-62770175　　邮　购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：清华大学印刷厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185×230　印　张：9　字　数：192 千字
版　　次：2009 年 2 月第 1 版　　印　次：2009 年 2 月第1 次印刷
印　　数：1～4000
定　　价：14.00 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：(010)62770177 转 3103　　产品编号：030456-01

前　言

线性代数是学习自然科学、工程和社会科学的学生的一门重要的基础理论课程,作为高等学校基础课,除了作为各门学科的重要工具以外,还在提高人才的全面素质中起着重要的作用.它在培育理性思维和审美功能方面的作用也应得到充分的重视.研究型学习重在思想方法的培养,理性思维能力是当前学生较为薄弱的方面,代数学中较为抽象的数学结构和形式推理为培养学生的抽象思维能力、符号运算能力、空间想象能力和逻辑推理能力等有着其他课程难以替代的重要作用.同时也为学生了解现代数学的思维方式提供了一个窗口.通过本书的学习,希望在以下三个方面能发挥其应有的作用:能够全面系统地掌握线性代数与几何的基本知识;能够深刻领会处理代数问题的思想方法;能够培养和提高抽象思维能力、逻辑推理能力、计算能力.为了实现这些目的,不仅要突出重点,抓住关键,解决好难点,而且要善于透过知识的表面,深入揭示代数的本质思想方法.本书涵盖了线性代数和解析几何、射影几何等基础内容.在内容安排上,注重突出科学性,简单扼要,循序渐进,不过分强调技巧的训练.代数学与分析、几何学共同构建了近代数学的核心,更是当今数学中最富有活力的学科之一.线性代数是代数学的基础,它在理科、工科,甚至在经济和社会科学各个领域都有广泛的应用.特别是由于信息科学与技术的快速发展,离散数学的基础训练在各专业学生的数学能力和科学素质的培养中的地位日益突出.解析几何是几何中极其基础的部分,一方面可用代数对其进行理论归纳,同时又是代数理论发展的重要背景.代数与几何相互渗透,代数为研究几何问题提供了有效的方法,几何为抽象的代数结构和方法提供了形象的几何模型和背景,这样就使学习者更好地领略到抽象的作用及其美.本教材加强了几何内容,如在上册中增加了仿射坐标系的内容,在下册中增加了射影几何这个初等模型,目的是加深读者对"形"的认识,有利于培养读者的形象思维及理性思维的习惯.

本书的核心内容包括矩阵理论以及线性空间理论.这些概念和理论不仅为各个专业领域提出相关问题时提供了准确的数学表达语言,而且也为解决问题提供了有力的工具.本书分上、下两册出版,对应于两个学期的教学内容.上册共有 7 章.第 1 章在中学的二、三阶行列式的基础上引入 n 阶行列式的概念,并通过例子介绍利用行列式的性质计算行列式的基本方法.矩阵在线性代数中的地位很特殊,一方面矩阵本身有许多理论问题可以研究;另一方面它又是研究其他对象的一种重要的工具.更为重要的是,矩阵论在许多工科领域应用很广泛.而且,许多线性代数问题都可以化成矩阵问题来研究解决.这充分说明了矩阵学习的

重要性.在第 2 章介绍矩阵的代数运算、矩阵的初等变换和相抵标准形,以及矩阵分块的技巧,为以后进一步学习线性代数打好基础.第 3 章介绍几何空间中的向量代数,引入仿射坐标系和直角坐标系,运用代数工具讨论有关平面和直线等几何问题.第 4 章引入 n 维向量的概念,重点讨论向量组的线性相关和线性无关的概念和性质,这不仅是学习线性空间理论的基础,而且是训练学生抽象思维能力和逻辑推理能力的关键部分.这一章还引入了矩阵的秩这个重要的参数.线性方程组是线性代数的一个极其重要的内容.通过线性方程组的研究,不仅可以得到很有用的结论,而且能体现代数研究问题、解决问题的思想方法.有关线性方程组理论的研究及应用始终贯穿课程的始末,在这里,通过解空间结构的研究以及它和矩阵的秩之间的关系,给出了有关线性方程组解的结构的完整理论.线性空间与线性变换是线性代数的核心内容.由于线性空间内容比较抽象,本书采用从特殊到一般、从具体到抽象,循序渐进的方法.从第 3 章的三维几何空间,到第 4 章的 n 维向量空间,最后在第 5 章引入抽象的线性空间概念,着重研究了线性子空间的性质.并在实数域的线性空间上引入度量概念,建立了欧几里得空间.为了进一步深刻揭示线性空间的向量之间的内在联系,在第 6 章重点研究线性变换的性质及其与矩阵之间的联系.线性代数中,各种类型的变换随处可见,线性变换是其中最重要的一种变换.在线性变换的研究和讨论中,几何的思想和矩阵理论的运用都得到了充分的体现,最能体现线性代数研究问题和解决问题的思想方法.这一章还讨论了科学技术中非常有用的特征值问题并由此引入矩阵相似的概念.几何与代数的联系,除了在三维空间平面和直线的研究之外,更深入的就是二次型一般理论的研究对于二次曲面分类的应用.第 7 章介绍二次齐次函数即二次型的化简和实二次型的正定性,由于三元二次齐次函数的几何背景是二次曲面,通过主轴化方法将一般二次曲面方程化为直角坐标系下的标准方程,从而对二次曲面实现分类.下册共有 5 章,第 8 章讨论一元多项式的理论.第 9 章讨论矩阵和对角矩阵相似的条件,以及矩阵的相似对角化,并通过空间分解理论,讨论了若尔当标准形理论.第 10 章在上册的欧几里得空间的基础上讨论了正交变换和对称变换,进一步研究酉空间及其上的线性变换.第 11 章简单介绍矩阵分析的基本知识.第 12 章介绍平面射影几何的基本知识.

本书是在清华大学出版的《线性代数与解析几何》,《理工科代数基础》的基础上,结合清华大学近十年的教学实践,经过对课程进行整合,改编而成.由林润亮编写第 9 章,鲁自群编写第 10,12 章,俞正光编写第 8,11 章.本书编写得到清华大学数学科学系李津教授,张贺春教授,朱彬教授,邢文训教授和李铁成教授等的支持和帮助,清华大学出版社的刘颖博士为本书出版做了大量细致的工作,在此一并表示感谢.

由于水平有限,不妥之处实属难免,敬请读者批评指正.

本书可供理工科、经济管理各专业学生作为学习线性代数的教科书或教学参考书,也可供科技人员和自学者参考.

作 者

2008 年 10 月

目　录

第8章　一元多项式

在5.1节中曾经讨论过数域F上次数不超过n次的一元多项式全体，以及多项式的加法和数与多项式的乘法构成数域F上的n维线性空间$F_n[x]$. 多项式是代数学中最基本的内容之一，不但与高次方程的研究有关，而且在学习代数以及其他数学分支中也会涉及. 本章将系统介绍有关一元多项式理论的基本知识.

8.1　整除性

8.1.1　多项式的概念与运算

设F表示一个数域，x是一个符号（或称为文字），形式表达式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \tag{8.1}$$

称为数域F上文字x的**一元多项式**(polynomial)，其中$a_i\in F, i=0,1,\cdots,n$，n是非负整数.

这里定义的多项式是符号x的形式表达式，当x是未知数时，就是大家熟悉的中学代数中的多项式. x还可以表示其他任意对象，正如在线性代数中所看到的，x可以是m阶方阵$\boldsymbol{A}$，那么就得到一个矩阵多项式$f(\boldsymbol{A})=a_n\boldsymbol{A}^n+a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{I}$；$x$也可以是线性变换$\sigma$，$f(\sigma)=a_n\sigma^n+a_{n-1}\sigma^{n-1}+\cdots+a_1\sigma+a_0\varepsilon$是一个关于线性变换$\sigma$的多项式，等等.

在(8.1)式中a_ix^i称为i次项，a_i称为i次项系数. 若$a_n\neq 0$，则称a_nx^n为首项，a_n为**首项系数**，n是$f(x)$的**次数**(degree)，记作$\deg f(x)$. 当$f(x)=a_0$，$a_0\neq 0$时，$\deg f(x)=0$，即$f(x)=a_0$是一个零次多项式. $f(x)=0$称为**零多项式**，零多项式是唯一不定义次数的多项式.

记数域F上的全体一元多项式为$F[x]$，称为F上的**一元多项式环**. 常见的多项式有复系数多项式$\mathbb{C}[x]$，实系数多项式$\mathbb{R}[x]$和有理系数多项式$\mathbb{Q}[x]$.

设$f(x), g(x)\in F[x]$，并设

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i,\quad g(x)=\sum_{i=0}^{m}b_ix^i.$$

如果$f(x)$和$g(x)$是同次的，并且同次项系数全相等，则称这两个多项式**相等**，即

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow n = m \text{ 且 } a_i = b_i, \quad i = 0,1,\cdots,n. \tag{8.2}$$

中学代数中两个多项式可进行加、减、乘等运算，对形式表达式(8.1)也可以引入类似的运算. 假设 $n \geqslant m$，为方便起见，在 $g(x)$ 中令 $b_{m+1} = \cdots = b_n = 0$，于是

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i \pm b_i) x^i, \tag{8.3}$$

$$f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{n+m} \Big(\sum_{i+j=k} a_i b_j \Big) x^k. \tag{8.4}$$

显然 F 上的多项式进行加、减、乘等运算后，所得结果仍是 F 上的多项式，也就是说 $F[x]$ 关于多项式的加、减、乘运算是封闭的. 不难验证

$$\deg(f(x) \pm g(x)) \leqslant \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}.$$

若 $f(x) \neq 0, g(x) \neq 0$，则 $f(x)g(x) \neq 0$，且

$$\deg(f(x)g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x).$$

多项式的运算还和数的运算一样，满足下面的一些规律.

(1) 加法结合律

$$f(x) + (g(x) + h(x)) = (f(x) + g(x)) + h(x).$$

(2) 加法交换律

$$f(x) + g(x) = g(x) + f(x).$$

(3) 乘法结合律

$$f(x)(g(x)h(x)) = (f(x)g(x))h(x).$$

(4) 乘法交换律

$$f(x)g(x) = g(x)f(x).$$

(5) 乘法对加法的分配律

$$f(x)(g(x) + h(x)) = f(x)g(x) + f(x)h(x).$$

(6) 乘法消去律

如果 $f(x)g(x) = f(x)h(x)$，且 $f(x) \neq 0$，则

$$g(x) = h(x).$$

8.1.2 带余除法

多项式的乘法的逆运算并不是对任意多项式都可以做的，事实上任意两个多项式做除法，正如两个整数相除一样，会得到一个商式和一个余式. 我们有如下定理.

定理 8.1(带余除法) 设 $f(x), g(x) \in F[x]$，$g(x) \neq 0$，则存在唯一的 $q(x), r(x) \in F[x]$，使得

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x), \tag{8.5}$$

其中 $\deg r(x) < \deg g(x)$ 或 $r(x) = 0$.

证 先证明存在性.

若 $f(x)=0$,则取 $q(x)=r(x)=0$.

设 $f(x)\neq 0$,若 $\deg f(x)=0$,这时如果 $\deg g(x)>0$,则取$q(x)=0$, $r(x)=f(x)$; 如果 $\deg g(x)=0$,则取 $q(x)=f(x)/g(x)$,$r(x)=0$.

现设 $\deg f(x)>0$,对 $\deg f(x)$作数学归纳法. 假设 $\deg f(x)<n$ 时,命题真,下面证明 $\deg f(x)=n$ 时,命题也真. 令

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,\quad a_n\neq 0,$$
$$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0,\quad b_m\neq 0.$$

若 $m>n$,取 $q(x)=0$,$r(x)=f(x)$,命题结论成立. 若 $m\leqslant n$,令

$$f_1(x)=f(x)-\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}g(x),$$

则 $\deg f_1(x)<n$. 根据归纳假设,存在 $q_1(x)$,$r(x)\in F[x]$,使得

$$f_1(x)=q_1(x)g(x)+r(x),$$

其中 $\deg r(x)<\deg g(x)$或 $r(x)=0$. 于是

$$\begin{aligned}f(x)&=f_1(x)+\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}g(x)\\&=\left(q_1(x)+\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}\right)g(x)+r(x).\end{aligned}$$

令 $q(x)=q_1(x)+\dfrac{a_n}{b_m}x^{n-m}$,有 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$. 由归纳法原理,对一切自然数 n,命题为真.

再证唯一性.

若另有 $q_0(x)$,$r_0(x)\in F[x]$,也满足

$$f(x)=q_0(x)g(x)+r_0(x),$$

其中 $\deg r_0(x)<\deg g(x)$或 $r_0(x)=0$,则

$$q(x)g(x)+r(x)=q_0(x)g(x)+r_0(x),$$
$$(q(x)-q_0(x))g(x)=r_0(x)-r(x),$$

若 $q(x)-q_0(x)\neq 0$,则 $\deg(q(x)-q_0(x))\geqslant 0$,于是

$$\deg(r_0(x)-r(x))=\deg(q(x)-q_0(x))+\deg g(x)\geqslant \deg g(x).$$

与 $\deg(r_0(x)-r(x))<\deg g(x)$矛盾. 所以

$$q(x)=q_0(x),\quad r(x)=r_0(x).$$ ■

在(8.5)式中,称 $q(x)$为商式,$r(x)$为余式. 当 $r(x)=0$ 时,$f(x)=q(x)g(x)$,这时 $g(x)$能整除 $f(x)$,记作 $g(x)\mid f(x)$,并称 $g(x)$为 $f(x)$的因式,$f(x)$是 $g(x)$的倍式. 当 $r(x)\neq 0$ 时,$g(x)$不能整除 $f(x)$,记作 $g(x)\nmid f(x)$.

例 8.1 $f(x)=x^3-1, g(x)=x^2+2x-2$,求 $g(x)$除 $f(x)$的商式及余式.

解 按如下格式做除法:

$$
\begin{array}{r|c|l}
x^2+2x-2 & x^3 \qquad\qquad -1 & x-2=q(x) \\
 & x^3+2x^2-2x & \\ \hline
 & -2x^2+2x-1 & \\
 & -2x^2-4x+4 & \\ \hline
\multicolumn{3}{c}{\qquad\qquad 6x-5=r(x)}
\end{array}
$$

于是

$$x^3-1=(x-2)(x^2+2x-2)+6x-5.$$

商式 $q(x)=x-2$,余式 $r(x)=6x-5$. ■

这种方法也叫做长除法.

当 $g(x)$是一次多项式时,有如下结论.

推论 1(余数定理) 设 $f(x)\in F[x], \alpha\in F$,则存在唯一的 $q(x)\in F[x]$,使得

$$f(x)=q(x)(x-\alpha)+f(\alpha).$$

推论 2 设 $f(x)\in F[x], \alpha\in F$,则

$$f(\alpha)=0 \Leftrightarrow (x-\alpha)\mid f(x).$$

若 $f(\alpha)=0, \alpha\in F$,称 α 是 $f(x)=0$ 的一个**根**(root)或 $f(x)$的一个**零点**(zero).求多项式在域 F 中的零点相当于求它的形如 $x-\alpha$ 的因式.要判断 $x-\alpha$ 是不是 $f(x)$的因式,可以用带余除法,以 $x-\alpha$ 除$f(x)$.还有一个更简便的方法叫做综合除法.

设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0, g(x)=x-\alpha$,并设$q(x)=b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_1x+b_0, f(\alpha)=r$,则由推论 1,有

$$f(x)=q(x)(x-\alpha)+r. \tag{8.6}$$

比较(8.6)式中 x 的同次幂系数,得到

$$
\begin{aligned}
a_n &= b_{n-1}, \\
a_{n-1} &= b_{n-2}-\alpha b_{n-1}, \\
&\ \vdots \\
a_1 &= b_0-\alpha b_1, \\
a_0 &= r-\alpha b_0.
\end{aligned}
$$

由此得出

$$
\begin{aligned}
b_{n-1} &= a_n, \\
b_{n-2} &= a_{n-1}+\alpha b_{n-1}, \\
&\ \vdots \\
b_0 &= a_1+\alpha b_1, \\
r &= a_0+\alpha b_0.
\end{aligned}
$$

按以上关系,记 a_n 为 b_{n-1},将 b_{n-1} 乘以 α 再加 a_{n-1} 得 b_{n-2},将 b_{n-2} 乘以 α 加 a_{n-2} 得

b_{n-3},…,将 b_1 乘以 α 加 a_1 得 b_0,最后将 b_0 乘以 α 加 a_0 得 r 即为所求的 $f(\alpha)$的值.综合除法的格式如下:

$$\begin{array}{c|ccccc} \alpha & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ & & \alpha b_{n-1} & \cdots & \alpha b_1 & \alpha b_0 \\ \hline & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_0 & r \end{array}$$

例 8.2 $f(x)=x^3-4x^2-5x+2$,求 $f(-3)$.

解

$$\begin{array}{c|cccc} -3 & 1 & -4 & -5 & +2 \\ & & -3 & +21 & -48 \\ \hline & 1 & -7 & +16 & -46 \end{array}$$

即

$$f(x)=(x^2-7x+16)(x+3)-46, \quad 或 \quad f(-3)=-46. \qquad ■$$

推论 3 设 $f(x)\in F[x]$,$\deg f(x)=n$,则 $f(x)$在包含 F 的域 K 中,最多有 n 个互异零点.

证 设 K 是 F 的扩域,$a_1,a_2,\cdots,a_m\in K$ 是 $f(x)$的互异零点,即 $a_i\neq a_j$,$i\neq j$.由推论 2,存在 $f_1(x)\in K[x]$,使得

$$f(x)=(x-a_1)f_1(x).$$

再由 $a_1\neq a_2$,$f(a_2)=0$,即 $f(a_2)=(a_2-a_1)f_1(a_2)=0\Rightarrow f_1(a_2)=0$.再由推论 2,存在 $f_2(x)\in K[x]$,使得

$$f_1(x)=(x-a_2)f_2(x).$$

于是

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)f_2(x).$$

继续这个过程,最后存在 $f_m(x)\in K[x]$,使得

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_m)f_m(x).$$

比较等式两边多项式的次数,得到 $m\leqslant n$. ■

推论 4 设 $f(x)\in F[x]$,$\deg f(x)=n$,如果 $f(x)$在包含 F 的某个域中有多于 n 个互异零点,则 $f(x)\equiv 0$.

由推论 4,立即推得以下结论.

推论 5 设 $f(x),g(x)\in F[x]$,$\deg f(x),\deg g(x)\leqslant n$,若$f(\alpha_i)=g(\alpha_i)$,$i=1,2,\cdots,n+1$,$\alpha_i\in F$,且 $\alpha_i\neq\alpha_j$,$i\neq j$,则 $f(x)=g(x)$.

利用推论 5 可以求得一些未知的公式.例如已知 $f(x)$是一次式,那么根据推论 5,只要知道 $f(x)$的两个函数值就可以唯一地确定 $f(x)$.由解析几何知道一次式代表一条直线,知道了 $f(x)$的两个函数值也就相当于知道直线上两个点,因此推论 5 告诉我们一个早已知道的事实:两点确定一条直线.

若已知 $f(x)$的 $n+1$ 个函数值,那么就可以求一个 n 次多项式来逼近它.我们来讨论如下的问题.

例 8.3 给定 F 中 $n+1$ 个不同的数 $a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}$ 及任意 $n+1$ 个数 $b_1,b_2,\cdots,b_{n+1}$，求一个次数小于等于 n 的多项式 $f(x)$，使 $f(a_i)=b_i, i=1,2,\cdots,n+1$.

解 先看一个特殊情况. 如果 $b_1\neq 0, b_2=b_3=\cdots=b_{n+1}=0$，那么条件就是

$$f(a_1)=b_1,$$
$$f(a_i)=0,\quad i=2,3,\cdots,n+1,$$

即 $a_2,a_3,\cdots,a_{n+1}$ 是 $f(x)$ 的 n 个零点，或者说 $f(x)$ 有 n 个因子 $(x-a_i), i=2,3,\cdots,n+1$. 因此可以设

$$f(x)=c(x-a_2)(x-a_3)\cdots(x-a_{n+1}).$$

这是一个 n 次多项式，$c\in F$ 是待定系数. 利用条件 $f(a_1)=b_1$，就可将 c 求出.

$$c=\frac{b_1}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_{n+1})}.$$

记这个多项式为 $f_1(x)$，则得

$$f_1(x)=\frac{b_1(x-a_2)(x-a_3)\cdots(x-a_{n+1})}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_{n+1})}.$$

同理可以推得 $b_i\neq 0, b_1=b_2=\cdots=b_{i-1}=b_{i+1}=\cdots=b_{n+1}=0$ 的情况，这个多项式记作 $f_i(x)$，那么

$$f_i(x)=\frac{b_i(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_{n+1})}{(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_{n+1})}.$$

现在再考虑一开始提出的一般问题，即要求 $f(x)$ 满足：

$$f(a_i)=b_i,\quad i=1,2,\cdots,n+1.$$

显然，所求的多项式 $f(x)$ 为

$$\begin{aligned} f(x)&=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_{n+1}(x).\\ &=\sum_{i=1}^{n+1}\frac{b_i(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_{n+1})}{(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_{n+1})}. \end{aligned}\tag{8.7}$$

如果记 $F(x)=\prod_{i=1}^{n+1}(x-a_i)$，则对于实函数 $F(x)$ 有

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n+1}\frac{b_iF(x)}{(x-a_i)F'(a_i)},\tag{8.8}$$

其中 $F'(a_i)$ 是 $F(x)$ 在 a_i 点的导数值. 请读者自行验证. 这个公式叫做拉格朗日(Lagrange)插值公式，在实际问题中有许多应用. ■

8.1.3 最大公因式

定义 8.1 设 $f(x),g(x)\in F[x]$，若 $F[x]$ 中存在 $d(x)$，使得

(1) $d(x)\mid f(x), d(x)\mid g(x)$，

(2) 若 $d_1(x)\mid f(x), d_1(x)\mid g(x)$，则 $d_1(x)\mid d(x)$，

则称 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的**最大公因式**(the greatest common divisor).

按照定义,$d(x)$是 $f(x)$与 $g(x)$的最大公因式要满足两个条件,首先,$d(x)$是 $f(x)$与 $g(x)$的公因式;其次,$d(x)$是 $f(x)$与 $g(x)$的任意一个公因式的倍式.

例 8.4 设 $f(x)=2(x-1)^2(x+1)$,$g(x)=4(x-1)(x+1)^2$. $x-1$ 是 $f(x)$与 $g(x)$的公因式,但不是最大公因式.这是因为 $f(x)$与 $g(x)$有公因式$(x-1)(x+1)$,而$(x-1)(x+1)\nmid(x-1)$.同理,$x+1$ 也不是最大公因式. $f(x)$与 $g(x)$的最大公因式是 $2(x-1)(x+1)$.实际上,$(x-1)(x+1)$也是 $f(x)$与 $g(x)$的最大公因式. ■

那么,怎样求多项式 $f(x)$与 $g(x)$的最大公因式呢?一般用辗转相除法(也称欧几里得算法).

设 $f(x)\neq0$,$g(x)\neq0$,且设 $\deg g(x)\leqslant\deg f(x)$,由带余除法,有

$$f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x),\tag{8.9}$$

其中 $\deg r_1(x)<\deg g(x)$或 $r_1(x)=0$.若 $r_1(x)=0$,则 $g(x)$是$f(x)$与 $g(x)$的最大公因式,否则有

$$g(x)=q_2(x)r_1(x)+r_2(x),\tag{8.10}$$

其中 $\deg r_2(x)<\deg r_1(x)$或 $r_2(x)=0$.若 $r_2(x)\neq0$,有

$$r_1(x)=q_3(x)r_2(x)+r_3(x),$$

其中 $\deg r_3(x)<\deg r_2(x)$或 $r_3(x)=0$.继续这个过程,由于$\deg g(x)$是有限的,而每做一步都降低次数,因此在有限步内,必有 $r_{s+1}(x)=0$,即成立

$$r_{s-1}(x)=q_{s+1}(x)r_s(x),\tag{8.11}$$

于是 $r_s(x)\mid r_{s-1}(x)$.再看前一步,有

$$r_{s-2}(x)=q_s(x)r_{s-1}(x)+r_s(x),\tag{8.12}$$

于是 $r_s(x)\mid r_{s-2}(x)$.逐步往前推导,得到

$$r_s(x)\mid g(x),\qquad r_s(x)\mid f(x),$$

即 $r_s(x)$是 $f(x)$与 $g(x)$的公因式.又设 $d_1(x)$是 $f(x)$与 $g(x)$的任意公因式,则有 $d_1(x)\mid f(x)$,$d_1(x)\mid g(x)$,由(8.9)式推出$d_1(x)\mid r_1(x)$.再由(8.10)式推出 $d_1(x)\mid r_2(x)$,继续往前推,最后由(8.11)式推出 $d_1(x)\mid r_s(x)$.由定义 8.1 知 $r_s(x)$是 $f(x)$与$g(x)$的一个最大公因式.

由(8.12)式有

$$r_s(x)=r_{s-2}(x)-q_sr_{s-1}(x).\tag{8.13}$$

利用前一式得

$$r_{s-3}(x)=q_{s-1}(x)r_{s-2}(x)+r_{s-1}(x).$$

解出 $r_{s-1}(x)$代入(8.13)式,得到

$$r_s(x)=(1+q_s(x)q_{s-1}(x))r_{s-2}(x)-q_s(x)r_{s-3}(x).$$

继续往前推,就有 $r_s(x)$用 $r_{s-3}(x)$和 $r_{s-4}(x)$的一个组合的表示式.最后得到 $r_s(x)$用 $f(x)$和 $g(x)$的一个组合表示的关系式,于是有如下定理.

定理 8.2 设 $f(x), g(x) \in F[x]$，则必存在 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式 $d(x) \in F[x]$，且在 $F[x]$ 中有 $u(x)$ 和 $v(x)$，使得

$$d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x).$$

例 8.5 设 $f(x)=x^4+x^3-x^2-2x+1$，$g(x)=x^3+2x^2-3$，求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式.

解 用辗转相除法，格式如下：

$q_2(x)=x+1$	$g(x)$	$f(x)$	$x-1=q_1(x)$
	$x^3+2x^2\quad -3$	$x^4+x^3-x^2-2x+1$	
	x^3+x^2-2x	$x^4+2x^3\quad -3x$	
	x^2+2x-3	$-x^3-x^2+x+1$	
	x^2+x-2	$-x^3-2x^2\quad +3$	
	$r_2(x)=x-1$	$r_1(x)=x^2+x-2$	$x+2=q_3(x)$
		x^2-x	
		$2x-2$	
		$2x-2$	
		$r_3(x)=0$	

因此 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式 $r_2(x)=x-1$.

将上述过程写下来有：

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)g(x) + (x^2+x-2), \\ g(x) &= (x+1)(x^2+x-2) + (x-1), \\ x^2+x-2 &= (x+2)(x-1). \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} x-1 &= g(x) - (x+1)(x^2+x-2) \\ &= g(x) - (x+1)(f(x) - (x-1)g(x)) \\ &= g(x) - (x+1)f(x) + (x^2-1)g(x) \\ &= -(x+1)f(x) + x^2 g(x). \end{aligned}$$

即有 $u(x)=-(x+1)$，$v(x)=x^2$，使得

$$x-1 = u(x)f(x) + v(x)g(x).$$

事实上容易验证

$$-(x+1)(x^4+x^3-x^2-2x+1) + x^2(x^3+2x^2-3) = x-1.$$ ■

从例 8.4 看到，两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式不唯一. 例如 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式，那么对于任意常数 $c \neq 0$，$cd(x)$ 也是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式. 不仅如此，还能证明 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的任意一个最大公因式 $d_1(x)$ 必是 $d(x)$ 的非零常数倍. 事实上，若 $d(x)$ 是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大公因式，$d_1(x)$ 作为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式，必有

$$d_1(x) \mid d(x)$$

或

$$d(x) = q_1(x)d_1(x).$$

现在若把 $d_1(x)$看作 $f(x)$与 $g(x)$的最大公因式,$d(x)$看作公因式,则又有

$$d(x) \mid d_1(x).$$

或

$$d_1(x) = q(x)d(x).$$

于是

$$d(x) = q_1(x)q(x)d(x).$$

由此可推出 $\deg(q_1(x)q(x))=0 \Rightarrow \deg q_1(x)=\deg q(x)=0$,即$q(x)$与 $q_1(x)$是常数.为讨论方便起见,记 $f(x)$与 $g(x)$的首项系数为 1 的最大公因式为$(f(x),g(x))$.

8.1.4 互素

定义 8.2 设 $f(x),g(x)\in F[x]$,若$(f(x),g(x))=1$,则称 $f(x)$与 $g(x)$互素(relatively prime).

例 8.6 设 $f(x)=2x+2$,$g(x)=4x-4$,由于$(f(x),g(x))=1$,所以 $f(x)$与 $g(x)$互素. ■

定理 8.3 设 $f(x),g(x)\in F[x]$,则 $f(x),g(x)$互素的充分必要条件是存在 $u(x)$,$v(x)\in F[x]$,使得

$$u(x)f(x)+v(x)g(x) = 1.$$

证 必要性由定理 8.2 得到.

充分性,设$(f(x),g(x))=d(x)$,则

$$d(x) \mid f(x), d(x) \mid g(x) \Rightarrow d(x) \mid 1 \Rightarrow \deg d(x) = 0,$$

所以 $d(x)=1$,即 $f(x)$与 $g(x)$互素. ■

关于互素有如下性质.

定理 8.4 设 $f(x),g(x),h(x)\in F[x]$,若$(f(x),g(x))=1$,且 $f(x)\mid g(x)h(x)$,则 $f(x)\mid h(x)$.

证 由$(f(x),g(x))=1$,根据定理 8.3,有 $u(x),v(x)\in F[x]$,使得

$$u(x)f(x)+v(x)g(x) = 1.$$

等式两边乘 $h(x)$,得到

$$u(x)f(x)h(x)+v(x)g(x)h(x) = h(x).$$

因为 $f(x)\mid g(x)h(x)$,所以 $f(x)$整除等式左边,从而

$$f(x) \mid h(x).$$ ■

推论 设 $f_1(x),f_2(x),g(x)\in F[x]$,若$(f_1(x),f_2(x))=1$.且 $f_1(x)\mid g(x)$,$f_2(x)\mid g(x)$,则 $f_1(x)f_2(x)\mid g(x)$.