数学分析习题解答

武汉水利电力学院
数学教研室编

数学分析

习题解答

武汉水利电力学院数学教研室编

数学分析习题解答
* * *
武汉水利电力学院数学教研室编
湖北省汉阳县印刷厂印刷
开 本：787×1092 1/32
1980年1月第一版
1980年1月第一次印刷

前　　言

这本《数学分析习题解答》是根据复旦大学数学系主编的《数学分析》（1962年第二版）编写的。题目由浅入深，大部分有一定的难度，有助于加深对“数学分析”中一些基本概念和基本理论的理解，有助于掌握“数学分析”中的一些基本的计算及论证问题的方法，是一本较适宜的教学参考资料。

《解答》中所用名词符号，力求与原书一致，叙述力求简明，便于参考。但由于我们水平有限，加之编写时间仓促，错误之处在所难免，请读者批评指正。如有更好的解答，亦望赐教。

这本教学参考资料的问世，得到了我院各级领导及许多兄弟院校的鼓励，特别是湖北省汉阳县印刷厂的热情支持，谨致谢意。对于原书的编者——复旦大学数学系的同志们，亦在此表示衷心的感谢。

武汉水利电力学院数学教研室编

1980年1月

目　录

第四篇　无穷级数和广义积分

第一篇 极 限 论

第一章 变量与函数

1. 解下列不等式：(1) $-2<\frac{1}{x+2}<2$；(2) $(x-1)(x+2)(x-3)<0$；(3) $\frac{1}{x-1}<a$；(4) $0\leq\cos x\leq\frac{1}{2}$.

解 (1) $x+2>\frac{1}{2}$ 或 $x+2<-\frac{1}{2}$ $\therefore x>-\frac{3}{2}$ 或 $x<-\frac{5}{2}$；(2) $1<x<3$ 或$x<-2$；(3) 设$a>0$，则$x-1>\frac{1}{a}$ 或$x-1<0\therefore x>\frac{1}{a}+1$ 或$x<1$，设$a<0$，则$\frac{1}{a}<x-1<0$ $\therefore 1+\frac{1}{a}<x<1$；(4) $2k\pi+\frac{\pi}{3}\leq x\leq 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leq x\leq 2k\pi-\frac{\pi}{3}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots)$

2. 求证下列绝对值不等式：(1) $|x-y|\geq||x|-|y||$；(2) $|x_1+x_2+\cdots+x_n|\leq|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$；(3) $|x+x_1+\cdots+x_n|\geq|x|-(|x_1|+\cdots+|x_n|)$

证 (1) $\because|x|=|x-y+y|\leq|x-y|+|y|$，$\therefore|x|-|y|\leq|x-y|$；

又 $|x|=|y-(y-x)|\geq|y|-|y-x|=|y|-|x-y|$.

$\therefore |x|-|y|\geq-|x-y|$.

综合上述即证得 $|x-y|\geq||x|-|y||$.

(2) 当$n=2$时，$|x_1+x_2|\leq|x_1|+|x_2|$ 结论成立

设$n=k$时结论成立，即

$|x_1+x_2+\cdots+x_k|\leq|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_k|$,

则当 $n=k+1$时，$|x_1+x_2+\cdots x_{K+1}|\leq|x_1+x_2+\cdots x_K|+$

$|x_{K+1}| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_{K+1}|$.

故当n为一切自然数时，结论均成立.

(3) $|x + x_1 + \cdots x_n| = |x - [-(x_1 + \cdots + x_n)]| \geq |x| - |x_1 + \cdots + x_n| \geq |x| - (|x_1| + \cdots + |x_n|)$

3. 解下列绝对值不等式：(1) $|x| > |x+1|$； (2) $2 < \frac{1}{|x|} < 4$；(3) $|x| > A$；(4) $|x - a| < \eta$，为常数，$\eta > 0$；(5) $\left|\frac{x-2}{x+1}\right| > \frac{x-2}{x+1}$； (6) $2 < \frac{1}{|x+2|} < 3$.

解 (1)当$x > 0$时，不等式为$x > x+1$，无解.

当$-1 < x < 0$时，不等式解为$-1 < x < -\frac{1}{2}$

当$x < -1$时，不等式解为$-\infty < x < -1$

(2) $\frac{1}{4} < |x| < \frac{1}{2}$，$\therefore \frac{1}{2} > x > \frac{1}{4}$ 或 $-\frac{1}{4} > x > -\frac{1}{2}$；

(3) $x > A$，$x < -A$；

(4) $a - \eta < x < a + \eta$；

(5) 当$\frac{x-2}{x+1} < 0$时，原不等式成立，$\therefore -1 < x < 2$；

(6) $\frac{1}{3} < |x+2| < \frac{1}{2}$ $\therefore -\frac{5}{3} < x < -\frac{3}{2}$ 或 $-\frac{5}{2} < x < -\frac{7}{3}$.

4. 下列函数是否恒等，为什么？

(1) $f(x) = \frac{x}{x}$，$\varphi(x) = 1$；

不恒等，因为$\varphi(0) = 1$，而$f(0)$无意义.

(2) $f(x) = x$，$\varphi(x) = \sqrt{x^2}$；

不恒等，因为当$x < 0$时，$\varphi(x) = |x| \neq x$.

(3) $f(x) = 1$，$\varphi(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$； 恒等.

5. 求下列函数的定义域和值域：

(1) $y=\sqrt{2+x-x^2}$； (2) $y=\sqrt{\sin x}$；

(3) $y=\ln\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$； (4) $y=\dfrac{1}{\sin\pi x}$.

解 (1) $y=\sqrt{(2-x)(1+x)}$，定义域为$[-1,2]$，值域为$[0,\frac{3}{2}]$；

(2) 定义域为$[2k\pi,(2k+1)\pi]$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$；值域为$[0,1]$；

(3) $\because\ \sin\dfrac{\pi}{x}>0$，$\therefore\ 2k\pi<\dfrac{\pi}{x}<(2k+1)\pi$ 或

$-(2k+2)\pi<\dfrac{\pi}{x}<-(2k+1)\pi$，故定义域为$\left(\dfrac{1}{2k+1},\dfrac{1}{2k}\right)$ 或

$\left(-\dfrac{1}{2k+1},-\dfrac{1}{2k+2}\right)$ $(k=0,1,2,\cdots)$，值域为$(-\infty,0]$；

(4) $\because \sin\pi x\neq0$ $\therefore \pi x\neq k\pi$，故定义域为 $x\neq k$ $(k=0,\pm1,\pm2\cdots)$，值域为$(-\infty,-1]$及$[1,+\infty)$

6. 设$f(x)=x+1$，$\varphi(x)=x-2$，试解方程

$|f(x)+\varphi(x)|=|f(x)|+|\varphi(x)|$

解 当$f(x)$与$\varphi(x)$同号时，$|f(x)+\varphi(x)|=|f(x)|+|\varphi(x)|$

当$f(x)$与$\varphi(x)$异号时，$|f(x)+\varphi(x)|<|f(x)|+|\varphi(x)|$

故方程 $|(x+1)+(x-2)|=|x+1|+|x-2|$的解为$x\geq2$ 或 $x\leq-1$

7. 设$f(x)=(|x|+x)(1-x)$求使以下各式满足的x值：

(1)$f(x)=0$； (2)$f(x)<0$.

解 (1) $(|x|+x)(1-x)=0$，$\therefore\ |x|+x=0$ 或 $1-x=0$，故$x\leq0$ 或 $x=1$，

(2) $\because\ |x|+x\geq0$.为使$(|x|+x)(1-x)<0$，必须$|x|+x>0$，$1-x<0$，$\therefore x>1$.

8. 设$f(x)=ax^2+bx+c$,

证明：$f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)+f(x)\equiv 0$,

证 $\because f(x+3)=a(x+3)^2+b(x+3)+c$,

$\therefore f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)$

$=ax^2+6ax+9a+bx+3b+c-3ax^2-12ax-12a$

$-3bx-6b-3c+3ax^2+6ax+3a+3bx+3b+3c$

$-ax^2-bx-c\equiv 0$。

9. 证明对于线性函数$f(x)=ax+b$，若自变数的诸值$x=x_n(n=1,2,\cdots)$组成一等差级数，则对应的函数值$y_n=f(x_n)(n=1,2,\cdots)$也组成一等差级数。

证 设$x_{i+1}=d+x_i$,

则 $y_{i+1}=f(x_{i+1})=ax_{i+1}+b=a(x_i+d)+b=ax_i+ad+b$

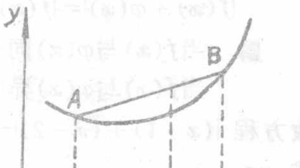
$=f(x_i)+ad=y_i+ad$

这就是说y_n也成一等差级数，公差为ad。

10. 如$y=f(x)$图形上的任一条弦都高于它所限的弧(如图)，证明下面不等式

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

对于所有的$x_1, x_2\ (x_1\neq x_2)$成立。



证 任意连接弧上两点$A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2 f, (x_2))$，得弦AB，其中点为$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right)$，在弧上的对应点为$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)$。

由题设可知 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$。

11. 证明下列各函数在所示区间内是单调增加的函数：

(1) $y=x^2(0\leq x<+\infty)$； (2) $y=\sin x\left(-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}\right)$

证 (1) 任取 $x_2>x_1\geq 0$，

则 $y_2-y_1=x_2^2-x_1^2=(x_2+x_1)(x_2-x_1)>0$，$\therefore y_2>y_1$，

故 $y=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 单调增加

(2) 任取 $\frac{\pi}{2}\geqslant x_2>x_1\geqslant-\frac{\pi}{2}$

则 $y_2-y_1=\sin x_2-\sin x_1=2\cos\frac{x_2+x_1}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2}$

此时 $\frac{\pi}{2}>\frac{x_2+x_1}{2}>-\frac{\pi}{2}$， $0<\frac{x_2-x_1}{2}<\frac{\pi}{2}$

故 $y_2-y_1=2\cos\frac{x_2+x_1}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2}>0$，$y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 单调增加。

12. 证明下列各函数在所示区间内是单调减少的函数：

(1) $y=x^2(-\infty<x\leq 0)$； (2) $y=\cos x(0\leq x\leq\pi)$。

同上题证略。

13. 指出下列函数为奇函数或为偶函数或非奇非偶：

(1) $y=x+x^3-x^5$，奇函数； (2) $y=a+b\cos x$，偶函数；(3) $y=x+\sin x+e^x$，非奇非偶函数；(4) $y=x\sin\frac{1}{x}$，偶函数；

(5) $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & 当x>0时\\ 0, & 当x=0时\\ -1, & 当x<0时\end{cases}$ 奇函数；

(6) $y=\begin{cases}\frac{2}{x^2}, & 当+\infty>x>\frac{1}{2}时\\ \sin x^2, & 当\frac{1}{2}\geq x\geq-\frac{1}{2}时\\ \frac{1}{2}x^2, & 当-\frac{1}{2}>x>-\infty时,\end{cases}$

在$\frac{1}{2} \geq x \geq -\frac{1}{2}$时，为偶函数；当$|x| > \frac{1}{2}$时，非奇非偶.

14．试证两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，一个奇函数与一个偶函数的乘积是奇函数.

证　设$f(x)=f(-x)$，$\varphi(x)=\varphi(-x)$，$F(x)=f(x)\cdot\varphi(x)$ 则　$F(-x)=f(-x)\cdot\varphi(-x)=f(x)\cdot\varphi(x)=F(x)$　$\therefore F(x)$是偶函数，其余可同理证明.

15．设$f(x)$为定义在$(-\infty,\ +\infty)$内的任何函数，证明：$F_1(x)\equiv f(x)+f(-x)$是偶函数，$F_2(x)\equiv f(x)-f(-x)$是奇函数.

证　$F_1(-x)=f(-x)+f(x)\equiv F_1(x)$，故$F_1(x)$是偶函数；

$F_2(-x)=f(-x)-f(x)=-[f(x)-f(-x)]\equiv -F_2(x)$

$\therefore F_2(x)$是奇函数.

16．说明下列函数哪些是周期函数，并求最小周期：

(1) $y=\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$是周期函数，且最小周期为$\pi$；

(2) $y=\sin x^2$；不是周期函数；

(3) $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$是周期函数，最小周期为$2\pi$；

(4) $y=\cos\frac{\pi}{4}x$，是周期函数，最小周期为8；

(5) $y=|\sin x|+|\cos x|$是周期函数，最小周期为$\frac{\pi}{2}$；

(6) $y=\sqrt{\operatorname{tg} x}$是周期函数，最小周期为$\pi$；

(7) $y=x-[x]$是周期函数，最小周期为1；

(8) $y=\sin n\pi x$是周期函数，最小周期为$\frac{2}{n}$；

17．求下列函数的反函数及反函数的定义域：

(1) $y=x^2$ $(-\infty<x\leq 0)$，反函数为$y=-\sqrt{x}$，$(0\leq x<+\infty)$；

(2) $y=\sqrt{1-x^2}(-1\leq x\leq 0)$，
反函数为$y=-\sqrt{1-x^2}$，　$0\leq x<1$

(3) $y=\sin x\left(\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{3}{2}\pi\right)$，反函数为$y=\pi+\arcsin x$，$(-1\leq x\leq 1)$；

(4) $y=\operatorname{sh}x=\frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)$ $(-\infty<x<+\infty)$，反函数为 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，　$(-\infty<x<+\infty)$；

$$(5)y=\begin{cases}x, & 当-\infty<x<1时\\ x^2, & 当1\leq x\leq 4时\\ 2^x, & 当4<x<+\infty时.\end{cases}\quad 反函数为$$

$$y=\begin{cases}x, & 当-\infty<x<1时\\ \sqrt{x}, & 当1\leq x\leq 16时\\ \log_2 x, & 当16<x<+\infty时.\end{cases}$$

18．验证$y=\frac{1-x}{1+x}$ $(-\infty<x<+\infty)$的反函数就是它本身，并找出函数$y=\frac{ax-b}{cx-d}$的反函数就是它本身的条件.

解　(1)由$y=\frac{1-x}{1+x}$ 有 $y+yx=1-x$，$x=\frac{1-y}{1+y}$.

$\therefore$反函数为$y=\frac{1-x}{1+x}$　正是原函数.

(2) 由$y=\frac{ax-b}{cx-d}$有$cxy-dy=ax-b$

$$x(cy-a)=dy-b,\quad x=\frac{dy-b}{cy-a}$$

即反函数为$y=\frac{dx-b}{cx-a}$，它等于$\frac{ax-b}{cx-d}$ 的条件为$a=d$.

19．下列函数组能否构成复合函数$y=f[\varphi(x)]$，如果能

够构成则指出此复合函数$y=f[\varphi(x)]$的定义域及函数值的范围：

(1) $y=f(u)=2^u$，$u=\varphi(x)=x^2$；

解 能。$y=2^{x^2}$，$x\in(-\infty,+\infty)$，$y\in[1,+\infty)$；

(2) $y=f(u)=\ln u$，$v=\varphi(x)=1-x^2$；

解 能. $y=\ln(1-x^2)$，$x\in(-1,1)$，$y\in(-\infty,0]$；

(3) $y=f(u)=u^2+v^3$，$u=\varphi(x)=\begin{cases}1，当x为有理数；\\ -1，当x为无理数；\end{cases}$

解 能$y=\begin{cases}2，当x为有理数\\ 0，当x为无理数\end{cases}$

$x\in(-\infty,+\infty)$，$y=0,2$；

(4) $y=f(u)=2$，$u=\varphi(x)$；

解 能。$y=2$，$x\in\varphi(x)$之定义域，$y=2$；

(5) $y=f(u)=\sqrt{u}$，$u=\varphi(x)=\cos x$；

解 能.$y=\sqrt{\cos x}$，$x\in\left[2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]$，$k$整数，$y\in[0,1]$

20。若$f(x)=x^2$，$\varphi(x)=2^x$，求$f[\varphi(x)]$及$\varphi[f(x)]$；

解 $f[\varphi(x)]=(2^x)^2=4^x$；$\varphi[f(x)]=2^{x^2}$

21。若$\varphi(x)=x^3+1$，求$\varphi(x^2)$，$[\varphi(x)]^2$及$\varphi[\varphi(x)]$.

解 $\varphi(x^2)=x^6+1$，$[\varphi(x)]^2=(x^3+1)^2$，$\varphi[\varphi(x)]=(x^3+1)^3+1$.

22。设$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，求$f[f(x)]$，$f\{f[f(x)]\}$，$f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$

解 $f[f(x)]=\dfrac{1}{1-1/(1-x)}=\dfrac{x-1}{x}$，$x\neq0$，$x\neq1$；

$f\{f[f(x)]\}=1\Big/\left(1-\dfrac{1}{1-f(x)}\right)=x$，$x\neq0$，$x\neq1$，

$$f\left[\frac{1}{f(x)}\right]=\frac{1}{1-1/(1/1-x)}=\frac{1}{x},\ x\neq 0,\ x\neq 1.$$

23．延拓下列在[0,1]上定义的函数到整个实轴上去使函数成为以1为周期的函数：

(1) $y=x^2$；　(2) $y=\sin x$；　(3) $y=e^x$；

解　(1) $y=(x-[x])^2$，$[x]$为x的整数部分；

(2) $y=\sin(x-[x])$；　(3) $y=e^{x-[x]}$.

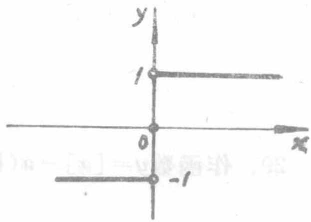
24．延拓下列在$[0,+\infty)$上定义的函数到整个实轴上去使函数(1)成为奇函数，(2)成为偶函数：

(1) $y=x^2$；　(2) $y=\sin x$；

解　(1) $y=x^2\cdot\mathrm{sgn}x$；　(2) $y=(\sin x)\cdot\mathrm{sgn}x$.

25．函数$u=\mathrm{sgn}x=\begin{cases}1, & 当x>0,\\ 0, & 当x=0,\\ -1, & 当x<0,\end{cases}$作这个函数的图形并证明：$|x|=x\cdot\mathrm{sgn}x$.

解　图形如右



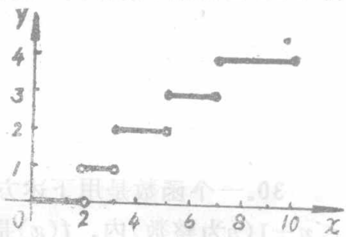
当$x\geq 0$时，$x\cdot\mathrm{sgn}x=|x|$

当$x<0$时，$x\cdot\mathrm{sgn}x=|x|$

所以对一切实数x，皆有$|x|=x\cdot\mathrm{sgn}x$.

26．设$y=\pi(x)$表示不超过数x的质数的数目，对于自变数x取值为0,1,2,…10，作这个函数的图形

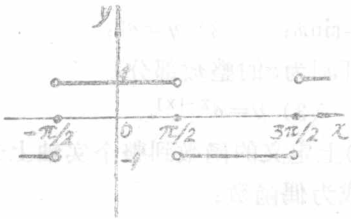
解　图形如右

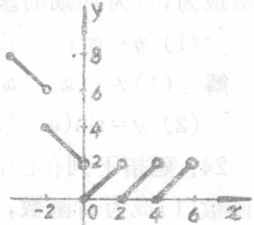


27．作下列函数的图形：

(1) $y=\operatorname{sgn}\cos x$；　(2) $y=|x|-2\left[\dfrac{x}{2}\right]$.

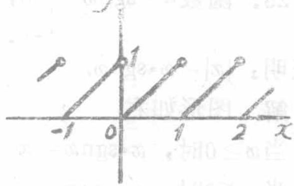
解　图形如下





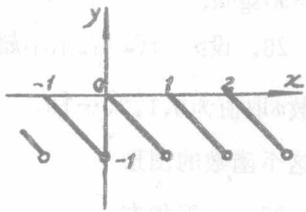
28．作函数$y=(x)$(数x的小数部分)的图形.

解　图形如右



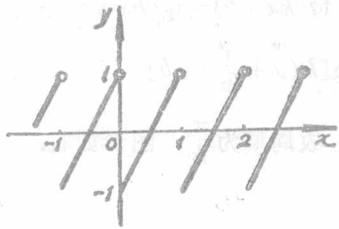
29．作函数$y=[x]-x$($[x]$为数x的整数部分)的图形.

解　图形如右



30．一个函数是用下述方法决定的：在每一个区间$n\leq x<n+1$(n为整数)内，$f(x)$是线性的，

且$f(n)=-1$，$f(n+\frac{1}{2})=0$，试作函数的图形。



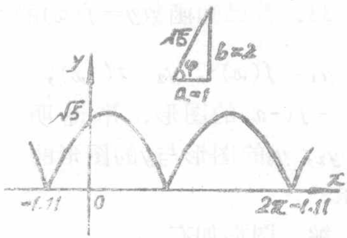
解　先在区间$[0,1)$，由已知条件可以得$f(x)=2x-1$

再作图形如右

31. 作函数$y=|\sin x+2\cos x|$的图形.

解　令$\text{tg}\varphi=\frac{b}{a}$，则$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$

故$y=\sqrt{5}\cdot|\sin(x+1.11)|$图如右.



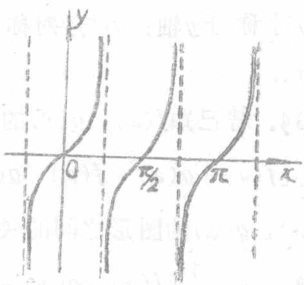
32. 若已知函数$f(x)=\text{tg}x$，试作下列函数的图形。

(1) $y=f(2x)$，

解　图形如右

(2) $y=f(kx+b)$，$k\neq0$，

解　不妨设$k>0$，$b>0$（其他情形类似）



因　$f(kx+b)=\text{tg}(kx+b)=\text{tg}k(x+\frac{b}{k})$，