高等学校经济数学应用教程

教育部高等理工教育数学教学研究与改革课题

经济应用模型

张从军　孙春燕
陈美霞　杨靖三　编著

博学·经济数学系列

复旦大学出版社
www.fudanpress.com.cn

高等学校经济数学应用教程

教育部高等理工教育数学教学研究与改革课题

经济应用模型

张从军　孙春燕
陈美霞　杨靖三　编著

博学·经济数学系列

复旦大学出版社
www.fudanpress.com.cn

图书在版编目(CIP)数据

经济应用模型/张从军等编著. —上海:复旦大学出版社,2008.10
(博学·经济数学系列)
高等学校经济数学应用教程
ISBN 978-7-309-06259-5

Ⅰ.经… Ⅱ.张… Ⅲ.经济模型-高等学校-教材 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 137007 号

经济应用模型

张从军　陈美霞　孙春燕　杨靖三　编著

出版发行 复旦大学 **出版社**　　上海市国权路 579 号　邮编 200433
86-21-65642857(门市零售)
86-21-65100562(团体订购)　86-21-65109143(外埠邮购)
fupnet@fudanpress.com　http://www.fudanpress.com

责任编辑 范仁梅
出 品 人 贺圣遂

印　　刷 上海复印刷厂
开　　本 787×960　1/16
印　　张 24.75
字　　数 457 千
版　　次 2008 年 10 月第一版第一次印刷

书　　号 ISBN 978-7-309-06259-5/F·1416
定　　价 40.00 元

如有印装质量问题,请向复旦大学出版社发行部调换。
版权所有　侵权必究

内容提要

本书是为财经类各专业高年级学生和研究生学习经济数学应用课程编写的教材之一，主要介绍对实际经济问题应用有关数学工具建立模型的方法以及模型的求解过程和分析，特别结合实例穿插介绍了相应数学软件的使用.

本教材在编写思想、体系安排、内容取舍上，力求最大限度地适应财经类各专业学习该课程和后续课程的需要，特别是适应从事与财经有关的实际工作的需要，并体现按数学工具分类、解决现实经济问题的特色.

本书适合作为财经类各专业高年级学生和研究生的教材，可作为数学专业和其他专业学生的教材和参考书，也可供有关教师和经济工作者参考.

前　言

“经济学数学化已成为一种发展趋势，从本世纪二三十年代起，西方经济学中数学分析的采用日益广泛，并将当时数学领域的最新成果运用到经济学研究中.”这是 1971 年，哈佛大学的多伊奇与另外两位同事在美国权威杂志《科学》上发表的一项研究报告中的话，该报告列举了从 1900 年以来的重大社会科学成果，他们得出的结论是：大部分与数学有关.

经济学作为社会科学之一，它与数学的联系似乎比其他社会科学学科与数学的联系更广泛、更深入.有人甚至说：“很清楚，经济学要成为科学，就必须是一门数学科学.经济学必须是数学的，因为它处理那些可大可小，经历连续变化的数量.”

随着社会经济的迅猛发展，随着数学在经济活动和经济研究中的作用日益凸显，随着数学的理论和方法越来越广泛地应用到自然科学、社会科学和工程技术的各个领域，高等学校财经类各专业对培养人才的数学素养提出了越来越高的要求.

因此，研究如何开设经管类数学课程，如何通过此类课程着力提高财经类应用型人才的数学素养，研究相关的培养模式与途径，就是当前财经高等教育值得重视的课题.

经济数学课程在提高财经类专业人才的数学素养方面，起着至关重要的基础性作用.这类课程的思想和方法，是人类文明发展史上理性智慧的结晶，它不仅提供解决实际问题的数学工具，还提供给学生一种思维的训练，使学生具备作为复合型、创造型、应用型人才而应有的文化素质和修养.

怎样使经济数学课程充分发挥上述作用？怎样使经济数学课程更加符合财经专业培养目标的课程体系？怎样兼顾经济数学课程的理论性与应用性、思想性与工具性？怎样突出经济数学课程的财经类专业特色？这是我们主持承担的全国高等教育科学“十五”规划重点研究课题(19138149)、中国高等教育学会“十一五”教育科学研究规划课题(06AIJ0090112)、教育部高等理工教育数学教学研究与改革课题(教高司 2007-143 号)等专题的研究内容之一，多年来我们一直结合一线教学实践，进行着不断的探索与实践.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

数学对经管专业的学生，作用有两点：一是思维训练，一是工具作用．经管专业学生，不是仅仅有了数学工具就能搞好经济研究，要有对经济的敏感，要有经济思想，要有敏锐的洞察力，要有好的思维方式．

配合我们的教学观念更新、教学改革实践、教学项目研究，我们早年组织编写了“高等学校经济数学基础教程”——《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》．作为上述工作的继续和深入，我们继而编写了“高等学校经济数学应用教程”，现在的这本《经济应用模型》就是其中之一．

我们在编写思想上、体系安排上、内容取舍上、教学方法上按照上述要求作了一些尝试．

本书由张从军教授提出编写思想和编写提纲、列出章节目录、编写附录部分，最后对全书进行修改补充、统稿、定稿．孙春燕副教授编写了第一章的部分内容、第六章、第十章、第十一章；陈美霞副教授编写了第一章的部分内容、第二章、第三章、第九章、第十二章；杨靖三博士编写了第一章的部分内容、第四章、第五章、第七章、第八章．

南京财经大学应用数学系史平教授阅读了全部书稿并提出了一些有益的建议，一些全国大学生数学建模竞赛的教练在教学中试用了本书的文稿．南京财经大学的有关校领导和教学管理部门对本书的编写工作给予了许多指导和帮助；复旦大学出版社特别是理科学科总监范仁梅女士不辞劳苦，精心编辑，对该书的出版给予了大力支持．编者在此向他们表示衷心感谢！

本书在编写过程中，参考了大量的相关资料，选用了其中的有关内容和模型，在此谨向有关编者、作者一并表示谢意．

编写一本教材似乎不难，但编写一本适用的教材绝非易事．编写此类经济应用模型教材更不是一劳永逸、一蹴而就的事．要紧紧围绕人才培养的目标体系、课程体系，密切联系实际，吸收最新的经济成果和数学方法，不断修改完善．作为一项教学研究课题，我们还在探索之中．诚恳期望有关专家、学者不吝赐教，诚恳期望使用该教材的教师和同学们，提出并反馈宝贵意见．

电子邮箱：yysxx@njue. edu. cn

编　者

于南京财经大学

2008 年 2 月 26 日

目　　录

第一章　微积分类经济应用模型

§1.1　工作时间模型

一、问题的提出

设一个人在一年中总可用时间为 1 人年，由于每天至少有 8 小时用于睡觉与吃饭，因此闲暇的最低需要量为$\frac{1}{3}$人年. 设该人拥有 H 人年闲暇时得到的满意度为

$$U(x_1, \cdots, x_n, H) = A(x_1 - c_1)^{a_1}(x_2 - c_2)^{a_2} \cdots (x_n - c_n)^{a_n}\left(H - \frac{1}{3}\right)^h,$$

这里，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 表示 n 种商品的需求量，$c_1, c_2, \cdots, c_n$ 表示对 n 种商品的最低需要量，$A > 0$，$h > 0$，$a_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为常数. 问该人每年愿工作多少时间？

二、问题的分析

设该人每周工作 5 天，每天工作 8 小时的年薪为 W 元，则 $\left(\frac{5}{7} \times \frac{1}{3} =\right)\frac{5}{21}$ 人年可赚 W 元，故 1 人年的收入为 $\frac{21}{5}W = 4.2W$ 元. 如果某人的闲暇为 H 人年，则当年薪为 W 元时其收入为 $4.2W(1-H)$，其全部收入用于购买 n 种消费品.

三、模型的建立

设该人对 n 种商品的购买量为 $x_1, \cdots, x_n$，相应的价格为 $p_1, \cdots, p_n$，由上面的分析可知：

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n = 4.2W(1-H), \tag{1-1-1}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

即 $$p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n+4.2WH=4.2W.$$

于是该问题的数学模型为在(1-1-1)式的约束(subject to, s. t.)下求(x_1, …, x_n, H)以使效用U最大,即

$$\max U=A(x_1-c_1)^{a_1}\cdots(x_n-c_n)^{a_n}\left(H-\frac{1}{3}\right)^h,$$
$$\text{s.t. } p_1x_1+\cdots+p_nx_n+4.2WH=4.2W. \tag{1-1-2}$$

四、模型的求解

上述非线性规划模型实际上是一个带约束的多元函数的极值问题,因此可用拉格朗日(Lagrange)乘数法求解.

令 $$L(x_1,\cdots,x_n,H,\lambda)=A(x_1-c_1)^{a_1}\cdots(x_n-c_n)^{a_n}\left(H-\frac{1}{3}\right)^h$$
$$+\lambda(p_1x_1+\cdots+p_nx_n+4.2WH-4.2W), \tag{1-1-3}$$

记 $$U(x)=A(x_1-c_1)^{a_1}\cdots(x_n-c_n)^{a_n}\left(H-\frac{1}{3}\right)^h,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}=0 \qquad a_iU(x)=-\lambda p_i(x_i-c_i),\ i=1,\cdots,n,$$

$$-\frac{U(x)}{\lambda}=\frac{4.2W(1-H)-\sum_{i=1}^{n}p_ic_i}{\sum_{i=1}^{n}a_i}, \tag{1-1-4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial H}=0,\ \frac{h}{H-\frac{1}{3}}U(x)+\lambda 4.2W=0,$$

$$-\frac{U(x)}{\lambda}=\frac{4.2W\left(H-\frac{1}{3}\right)}{h}. \tag{1-1-5}$$

联立(1-1-4)式、(1-1-5)式得:

$$H=\frac{1}{3}+\frac{h}{a_1+\cdots+a_n+h}\left(1-\frac{p_1c_1+\cdots+p_nc_n+1.4W}{4.2W}\right). \tag{1-1-6}$$

上式表明,要使$H\geqslant\frac{1}{3}$(即保证睡眠及吃饭时间),则$\sum_{i=1}^{n}p_ic_i\leqslant 2.8W$,即基本生活保障开支最多不应超过2.8$W$,否则该人为求生存,一定会导致睡眠不足.

由(1-1-6)式可得该人的工作时间为

$$L = 1 - H = \frac{2}{3} - \frac{h}{a_1 + \cdots + a_n + h}\left(1 - \frac{p_1 c_1 + \cdots + p_n c_n + 1.4W}{4.2W}\right). \tag{1-1-7}$$

显然，当 $4.2W = p_1 c_1 + \cdots + p_n c_n + 1.4W$ 时，工作时间为 $(L =) \frac{2}{3}$ 人年，而当工资 W 逐渐升高时，人们希望拥有更多的闲暇时间，特别地，如 W 很大(理论上趋向于无穷大)，则

$$H = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \frac{h}{a_1 + \cdots + a_n + h}, \tag{1-1-8}$$

$$L = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{h}{a_1 + \cdots + a_n + h}\right). \tag{1-1-9}$$

由(1-1-8)式可知，如果人们更希望拥有闲暇，则 h 相对较大，而人们愿意工作的时间则较少.

五、模型的评价

上述模型是在一定的效用函数形式假定下的工作时间选择，因此其结果会受到效用函数结构的影响. 从结果分析来看，它揭示了市场机制下劳动供给函数的一种数学表示，合理地解释了低收入者为生存而付出的工作时间. 但在实际生活中，工资 W 越高，人们愿意提供的劳动时间往往越来越长，只有当 W 高到一定程度之后，提供劳动的时间才随 W 上升而下降. 而(1-1-7)式表明工资上升，愿意提供的劳动时间却在下降，这与事实不完全相符. 其主要原因在于效用函数没有体现消费者的心理反映. 因为随着 W 的上升，人们对产品、闲暇的偏好会因之改变，因此要更好地建立工作时间与闲暇时间的选择模型，还需要进一步改进效用函数，当然计算也一定会相应复杂许多.

§1.2　收入流的现值与终值模型

一、问题的提出

设从 $t = 0$ 开始，企业连续获得收入，t 年时的收入为 $f(t)$，称 $f(t)$ 为收入流. 设 $f(t)$ 在 $[0, T]$ 上连续，r 为年利率，计算连续复利，则 T 年后的总收入的终值和现值各为多少?

二、有关概念

1. 复利与连续复利

设一笔本金 A_0 存入银行，年复利率 r，一年结算一次，t 年后的本利和为

$$A_t = A_0(1+r)^t. \tag{1-2-1}$$

一年结算 n 次，每次利率为$\frac{r}{n}$，则 t 年后的本利和为

$$A_t = A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}. \tag{1-2-2}$$

银行连续不断向顾客付利息，即结算次数 $n\to\infty$，则 t 年后的本利和为

$$A_t = A_0 e^{rt}. \tag{1-2-3}$$

2. 名义利率与实际利率(r_e)

上述 3 种情形中的 r 即为名义利率，由于计息方式不同，3 种情形的实际利率并不相同.

一年结算一次时，$r_e = r$；

一年结算 n 次时，由于 $A_0(1+r_e)^t = A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$，故可推出

$$r_e = \left(1+\frac{r}{n}\right)^n - 1. \tag{1-2-4}$$

同理，可推得连续复利计息时的实际利率为 $r_e = e^r - 1$. (1-2-5)

3. 现值与终值

设 A_0 为本金，则(1-2-1)式—(1-2-3)式分别为一年结算一次、结算 n 次、连续复利计息情形下 t 年后的终值. 反之，如 t 年后的终值为 A，则 3 种情形下的现值分别为

$$A(1+r)^{-t},\ A\left(1+\frac{r}{n}\right)^{-nt},\ Ae^{-rt}.$$

4. 年金与永续年金

年金是指一定时间内每隔相同时间发生数额相同的系列收付款项. 设每期末年金额为 A，每期复利率为 r，则 t 期末复利年金终值为

$$F = A(1+r)^{t-1} + A(1+r)^{t-2} + \cdots + A(1+r)^0 = A\,\frac{(1+r)^t - 1}{r}, \tag{1-2-6}$$

其现值为

$$P=F(1+r)^{-t}=A\,\frac{1-(1+r)^{-t}}{r}. \tag{1-2-7}$$

当 $t\to\infty$时,则称为永续年金,其现值为 $P_0=\lim\limits_{t\to\infty}P=\dfrac{A}{r}$.

三、收入流的现值与终值模型

由题意,如 $f(t)$为收入流,且 $f(t)$在$[0,\ T]$上连续,则在时间段$[t,\ t+\Delta t]$内的收入的近似值为 $f(t)\cdot\Delta t$,按连续复利计算,这些收入在期末的终值为 $f(t)\Delta t\cdot \mathrm{e}^{r(T-t)}$,由积零为整的定积分思想(微元法),得到总收入的终值为

$$F(T)=\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{r(T-t)}\,\mathrm{d}t, \tag{1-2-8}$$

其对应的现值记为 F_0,则

$$F_0=F(T)\mathrm{e}^{-rT}=\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{r(T-t)}\cdot \mathrm{e}^{-rT}\,\mathrm{d}t,$$

故

$$F_0=\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-rt}\,\mathrm{d}t. \tag{1-2-9}$$

给出 $f(t)$的具体形式,可用(1-2-8)式、(1-2-9)式计算得相应的终值和现值.

若 $f(t)$为常数 a,称为均匀收入流,则此时由(1-2-8)式知

$$F(T)=\int_0^T a\mathrm{e}^{r(T-t)}\,\mathrm{d}t=\frac{a}{r}(\mathrm{e}^{rT}-1), \tag{1-2-10}$$

由(1-2-9)式知

$$F_0=\int_0^T a\mathrm{e}^{-rt}\,\mathrm{d}t=\frac{a}{r}(1-\mathrm{e}^{-rT}). \tag{1-2-11}$$

对照(1-2-6)式、(1-2-7)式,(1-2-10)式、(1-2-11)式与其结构完全一致,即均匀收入流类似于年金.不同的是,计算现值与终值时,一个计算普通复利而另一个计算连续复利.

四、几个计算实例

例 1-2-1 一位居民准备购买一栋别墅,现价为 300 万元,如以分期付款方式购买,经测算每年需付 21 万元,20 年付清.银行存款的年利率为 4%,按连续

复利计息，是采用一次性付款合算，还是分期付款合算？

解 若分期付款，付款总额的现值为

$$F_0 = \int_0^{20} 21\mathrm{e}^{-0.04t}\mathrm{d}t = \frac{21}{0.04}(1-\mathrm{e}^{-0.8}) \approx 289.1(\text{万元}).$$

由于 $F_0 < 300$ 万元，故分期付款合算.

例 1-2-2 某企业想购买一台设备，设设备成本为 5 000 元，t 年后该设备的报废价值为 $S(t) = 5\,000 - 400t$(元). 使用该设备在 t 年时可使企业增加收入 $850 - 40t$(元). 若年利率为 5%，计算连续复利，企业应在什么时候报废这台设备？此时，总利润的现值是多少？

解 T 年后总收入的现值为

$$\int_0^T (850 - 40t)\mathrm{e}^{-0.05t}\mathrm{d}t;$$

T 年后总利润的现值为

$$L(T) = \int_0^T (850 - 40t)\mathrm{e}^{-0.05t}\mathrm{d}t + (5\,000 - 400T)\mathrm{e}^{-0.05T} - 5\,000,$$

$$\begin{aligned} L'(T) &= (850 - 40T)\mathrm{e}^{-0.05T} - 400\mathrm{e}^{-0.05T} - 0.05(5\,000 - 400T)\mathrm{e}^{-0.05T} \\ &= (200 - 20T)\mathrm{e}^{-0.05T}. \end{aligned}$$

令 $L'(T) = 0$，得 $T = 10$，且 $T < 10$，$L'(T) > 0$；又当 $T > 10$ 时，$L'(T) < 0$，则 $T = 10$ 为唯一极大值点.

当 $T = 10$ 时，总利润的现值最大，故应在使用 10 年后报废这台机器，此时，企业所得利润的现值为

$$\begin{aligned} L(10) &= \int_0^{10} (200 - 20T)\mathrm{e}^{-0.05T}\mathrm{d}T \\ &= (400T + 4\,000)\mathrm{e}^{-0.05T}\Big|_0^{10} \\ &\approx 852.25(\text{元}). \end{aligned}$$

例 1-2-3 有一特大型水电投资项目，投资总成本为 10^6 万元，竣工后每年可得收入 6.5×10^4(万元). 若年利率为 5%，计算连续复利，求投资回收期及该投资为无限期时纯收入的贴现值.

解 项目竣工后 T 年中总收入的现值为

$$R(T) = \int_0^T 6.5 \times 10^4 \mathrm{e}^{-0.05t}\mathrm{d}t = 1.3 \times 10^6(1 - \mathrm{e}^{-0.05T}).$$

当总收入的现值等于投资总成本时收回投资，即

$$1.3\times10^{6}(1-e^{-0.05T})=10^{6}.$$

解得
$$T=\frac{1}{0.05}\ln\frac{13}{3}\approx29.33(\text{年}).$$

当投资为无限期时，$T\to\infty$，纯收入的现值为

$$\begin{aligned}&\int_0^{\infty}6.5\times10^{4}e^{-0.05t}dt-10^{6}\\=&\lim_{t\to\infty}1.3\times10^{6}(1-e^{-0.05t})-10^{6}\\=&3\times10^{5}(\text{万元}).\end{aligned}$$

§1.3　产品的最优价格模型

一、问题的提出

设某企业(或集团，或垄断厂商)是市场上某种商品的唯一提供者，生产的成本函数和市场的需求函数均已知，在产销平衡状态下，企业有权根据产品成本和产品销售情况进行定价，那么该企业应如何定价，使自己获得最大利润?

二、问题的分析

所谓产销平衡即是指企业的生产量等于市场的销售量(需求量). 企业的利润是销售收入与生产支出之差，因此收入与支出的表达是问题的关键，建模的目的就是要在合理的收入函数和支出函数的假设下，建立利润函数，并对其进行优化求解得到相应的最优价格.

三、最优价格 p 满足的条件

设 x 表示销量(与产量相等)，p 为每件产品的单价，I 为总收入，C 为总支出，U 为总利润，$x=f(p)$ 为市场的需求函数(也是企业面临的)，则

$$U(p)=I(p)-C(p). \tag{1-3-1}$$

使 $U(p)$ 达到最大的最优价格 p^* 满足 $\frac{dU}{dp}=0$，即

$$\left.\frac{dI}{dp}\right|_{p=p^*}=\left.\frac{dC}{dp}\right|_{p=p^*}. \tag{1-3-2}$$

(1-3-2)式即为最优价格所满足的条件，它所描述的是经济学上的一条著名

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com