

刘燕 刘建伟 主编

注册环保工程师基础考试 应试一本通

ZHUCE HUANBAO GONGCHENGSHI JICHU KAOSHI
YINGSHI YIBENTONG

- 紧扣考试大纲 ○
- 权威专家精心编写 ○
- 复习应考必备 ○



化学工业出版社

刘燕 刘建伟 主编

注册环保工程师基础考试 应试一本通

ZHUCE HUANBAO GONGCHENGSHI JICHU KAOSHI
YINGSHI YIBENTONG



化学工业出版社

· 北京 ·

本书按照注册环保工程师基础考试大纲的要求编写,对各知识点逐一讲解,并编写了例题和解析,既突出了重要概念的应用,又与考试的实际情况结合,帮助考生在较短的时间内掌握考试的内容。

图书在版编目(CIP)数据

注册环保工程师基础考试应试一本通/刘燕,刘建伟主
编. —北京:化学工业出版社,2009.4
ISBN 978-7-122-05157-8

I. 注… II. ①刘…②刘… III. 环境保护-工程技术人
人-资格考核-自学参考资料 IV. X

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 043301 号

责任编辑:徐娟 刘砚哲
责任校对:李林

装帧设计:史利平

出版发行:化学工业出版社(北京市东城区青年湖南街13号 邮政编码100011)
印装:三河市延风印装厂

787mm×1092mm 1/16 印张24¼ 字数608千字 2009年5月北京第1版第1次印刷

购书咨询:010-64518888(传真:010-64519686) 售后服务:010-64518899

网 址: <http://www.cip.com.cn>

凡购买本书,如有缺损质量问题,本社销售中心负责调换。

定 价:68.00 元

版权所有 违者必究

前言

实施注册环保工程师执业资格考试制度，是为适应社会主义市场经济体制，使工程设计管理体制和人事管理制度尽快与国际接轨的一项配套改革措施。注册环保工程师资格必须通过全国统一考试取得。

为配合全国注册环保工程师资格考试，也为有效指导考生复习、应考，我们组织具有深厚的专业知识和多年丰富的教学、辅导经验的教师编写了本书。本书以注册环保工程师基础考试大纲为依据，以大纲中提供的参考书目为基础，具有较强的指导性和实用性。

本书的主要特点是：

(1) 紧扣考试大纲中的各知识点逐一讲解，简明扼要，联系实际，着重于对概念的理解和运用；

(2) 书中的例题结合考试真题的形式，注意突出重点概念的讲解；

(3) 内容精练，使参考人员能够在较短的时间内，掌握全部考试内容。

书中高等数学部分由李群高编写，普通物理部分由魏京花编写，普通化学部分由岳冠华编写，理论力学部分由刘燕编写，材料力学部分由张英编写，流体力学、工程流体力学与流体机械部分由王文海编写，计算机应用基础部分由陈志新编写，电工电子技术部分由叶安丽、刘辛国编写，工程经济部分由杨静编写，环境工程微生物学部分由高敏编写，环境监测与分析部分由陈小珍、刘建伟编写，环境评价与环境规划由刘建伟编写，污染防治技术部分由王敏、刘建伟、陈小珍编写，职业法规部分由刘建伟编写。全书由刘燕、刘建伟负责统稿。

由于时间仓促，在编写过程中难免有疏漏之处，恳请读者指正。

编者
2009年2月

目 录

第1章 高等数学

1

1.1 空间解析几何	1	1.5 常微分方程	25
1.1.1 主要知识点	1	1.5.1 主要知识点	25
1.1.2 典型例题及解析	3	1.5.2 典型例题及解析	27
1.2 微分学	5	1.6 概率与数理统计	28
1.2.1 主要知识点	5	1.6.1 主要知识点	28
1.2.2 典型例题及解析	9	1.6.2 典型例题及解析	36
1.3 积分学	11	1.7 向量分析	38
1.3.1 主要知识点	11	1.7.1 主要知识点	38
1.3.2 典型例题及解析	17	1.7.2 典型例题及解析	39
1.4 无穷级数	19	1.8 线性代数	39
1.4.1 主要知识点	19	1.8.1 主要知识点	39
1.4.2 典型例题及解析	23	1.8.2 典型例题及解析	47

第2章 普通物理

50

2.1 热学	50	2.2.2 典型例题及解析	63
2.1.1 主要知识点	50	2.3 光学	64
2.1.2 典型例题及解析	56	2.3.1 主要知识点	64
2.2 波动学	60	2.3.2 典型例题及解析	69
2.2.1 主要知识点	60		

第3章 普通化学

73

3.1 物质的结构与物质的状态	73	率与化学平衡	84
3.1.1 主要知识点	73	3.4.1 主要知识点	84
3.1.2 典型例题及解析	76	3.4.2 典型例题及解析	88
3.2 溶液	77	3.5 氧化还原与电化学	89
3.2.1 主要知识点	77	3.5.1 主要知识点	89
3.2.2 典型例题及解析	80	3.5.2 典型例题及解析	91
3.3 元素周期	82	3.6 有机化学	92
3.3.1 主要知识点	82	3.6.1 主要知识要点	92
3.3.2 典型例题及解析	83	3.6.2 典型例题及解析	98
3.4 化学反应方程式、化学反应速			

第4章 理论力学

99

4.1 静力学	99	4.2 运动学	106
4.1.1 主要知识点	99	4.2.1 主要知识点	106
4.1.2 典型例题及解析	103	4.2.2 典型例题及解析	111

4.3 动力学	112
4.3.1 主要知识点	112

4.3.2 典型例题及解析	119
---------------------	-----

第5章 材料力学

124

5.1 轴向拉伸与压缩	124
5.1.1 主要知识点	124
5.1.2 典型例题及解析	125
5.2 剪切	127
5.2.1 主要知识点	127
5.2.2 典型例题及解析	127
5.3 扭转	128
5.3.1 主要知识点	128
5.3.2 典型例题及解析	130
5.4 截面图形几何性质	130
5.4.1 主要知识点	130
5.4.2 典型例题及解析	131

5.5 弯曲梁的内力、应力和位移	131
5.5.1 主要知识点	131
5.5.2 典型例题及解析	135
5.6 应力状态和强度理论	137
5.6.1 主要知识点	137
5.6.2 典型例题及解析	139
5.7 组合变形	140
5.7.1 主要知识点	140
5.7.2 典型例题及解析	141
5.8 压杆稳定	142
5.8.1 主要知识点	142
5.8.2 典型例题及解析	142

第6章 流体力学

144

6.1 流体的主要物理性质	144
6.1.1 主要知识点	144
6.1.2 典型例题及解析	146
6.2 流体静力学	146
6.2.1 主要知识点	146
6.2.2 典型例题及解析	149
6.3 流体运动学动力学基础	150
6.3.1 主要知识点	150
6.3.2 典型例题及解析	153
6.4 流动阻力和水头损失	154
6.4.1 主要知识点	154
6.4.2 典型例题及解析	159
6.5 孔口、管嘴出流和有压管道恒 定流	159

6.5.1 主要知识点	159
6.5.2 典型例题及解析	162
6.6 明渠恒定均匀流	162
6.6.1 主要知识点	162
6.6.2 典型例题及解析	164
6.7 渗流定律、井和集水廊道	165
6.7.1 主要知识点	165
6.7.2 典型例题及解析	167
6.8 相似原理和量纲分析	168
6.8.1 主要知识点	168
6.8.2 典型例题及解析	169
6.9 流体运动参数的测量	170
6.9.1 主要知识点	170
6.9.2 典型例题及解析	171

第7章 计算机应用基础

173

7.1 计算机基础知识	173
7.1.1 主要知识点	173
7.1.2 典型例题及解析	176
7.2 Windows 操作系统	177
7.2.1 主要知识点	177

7.2.2 典型例题及解析	183
7.3 计算机程序设计语言	183
7.3.1 主要知识点	183
7.3.2 典型例题及解析	190

第8章 电工电子技术

192

8.1 电场与磁场	192
8.1.1 主要知识点	192

8.1.2 典型例题及解析	193
8.2 直流电路	194

8.2.1 主要知识点	194
8.2.2 典型例题及解析	196
8.3 正弦交流电路	197
8.3.1 主要知识点	197
8.3.2 典型例题及解析	205
8.4 RC 和 RL 电路暂态过程	205
8.4.1 主要知识点	205
8.4.2 典型例题及解析	206
8.5 变压器与电动机	206
8.5.1 主要知识点	206
8.6 二极管及整流、滤波、稳压 电路	209

8.6.1 主要知识点	209
8.6.2 典型例题及解析	211
8.7 三极管和单管放大电路	211
8.7.1 基本知识点	211
8.7.2 典型例题及解析	214
8.8 运算放大器	214
8.8.1 主要知识点	214
8.8.2 典型例题及解析	216
8.9 门电路和触发器	216
8.9.1 主要知识点	216
8.9.2 典型例题及解析	219

第9章 工程经济

221

9.1 现金流量构成与资金等值 计算	221
9.1.1 主要知识点	221
9.1.2 典型例题及解析	222
9.2 投资经济效果评价方法和 参数	222
9.2.1 主要知识点	222
9.2.2 典型例题及解析	223
9.3 不确定性分析	223

9.3.1 主要知识点	223
9.3.2 典型例题及解析	224
9.4 投资项目的财务评价	224
9.4.1 主要知识点	224
9.4.2 典型例题及解析	228
9.5 价值工程	228
9.5.1 主要知识点	228
9.5.2 典型例题及解析	228

第10章 工程流体力学与流体机械

230

10.1 流体力学	230
10.1.1 主要知识点	230
10.1.2 典型例题及解析	233
10.2 流体阻力	233
10.2.1 主要知识点	233
10.2.2 典型例题及解析	235
10.3 管道计算	236
10.3.1 主要知识点	236
10.3.2 典型例题及解析	237
10.4 明渠均匀流和非均匀流	239
10.4.1 主要知识点	239
10.4.2 典型例题及解析	241

10.5 紊流射流与紊流扩散	242
10.5.1 主要知识点	242
10.5.2 典型例题及解析	244
10.6 气体动力学基础	244
10.6.1 主要知识点	244
10.6.2 典型例题及解析	246
10.7 相似原理和模型实验方法	247
10.7.1 主要知识点	247
10.7.2 典型例题及解析	248
10.8 泵与风机	249
10.8.1 主要知识点	249
10.8.2 典型例题及解析	257

第11章 环境工程微生物

258

11.1 微生物学基础	258
11.1.1 主要知识点	258
11.1.2 典型例题及解析	260
11.2 微生物生理	261

11.2.1 主要知识点	261
11.2.2 典型例题及解析	263
11.3 微生物生态	264
11.3.1 主要知识点	264

11.3.2 典型例题及解析·····	265	11.5 污染物质的生物处理·····	268
11.4 微生物与物质循环·····	266	11.5.1 主要知识点·····	268
11.4.1 主要知识点·····	266	11.5.2 典型例题及解析·····	270
11.4.2 典型例题及解析·····	267		

第12章 环境监测与分析

271

12.1 环境监测过程的质量保证·····	271	12.3.2 典型例题及解析·····	292
12.1.1 主要知识点·····	271	12.4 固体废弃物监测与分析·····	293
12.1.2 典型例题及解析·····	279	12.4.1 主要知识点·····	293
12.2 水和废水监测与分析·····	281	12.4.2 典型例题及解析·····	294
12.2.1 主要知识点·····	281	12.5 噪声监测与测量·····	295
12.2.2 典型例题及解析·····	288	12.5.1 主要知识点·····	295
12.3 大气和废气监测与分析·····	288	12.5.2 典型例题及解析·····	297
12.3.1 主要知识点·····	288		

第13章 环境评价与环境规划

299

13.1 环境与生态评价·····	299	13.2.2 典型例题及解析·····	311
13.1.1 主要知识点·····	299	13.3 环境与生态规划·····	313
13.1.2 典型例题及解析·····	300	13.3.1 主要知识点·····	313
13.2 环境影响评价·····	300	13.3.2 典型例题及解析·····	316
13.2.1 主要知识点·····	300		

第14章 污染防治技术

317

14.1 水污染防治技术·····	317	14.2.2 典型例题及解析·····	346
14.1.1 主要知识点·····	317	14.3 固体废物处理处置技术·····	349
14.1.2 典型例题及解析·····	330	14.3.1 主要知识点·····	349
14.2 大气污染防治技术·····	333	14.3.2 典型例题及解析·····	359
14.2.1 主要知识点·····	333		

第15章 职业法规

363

15.1 环境与基本建设相关的法规·····	363	15.2.1 主要知识点·····	373
15.1.1 主要知识点·····	363	15.2.2 典型例题及解析·····	377
15.1.2 典型例题及解析·····	370	15.3 工程技术人员的职业道德与行为准则·····	378
15.2 环境质量标准与污染物排放标准·····	373	15.3.1 主要知识点·····	378

参考文献

379

第1章 高等数学

1.1 空间解析几何

1.1.1 主要知识点

1.1.1.1 向量代数

(1) 向量的概念

① 向量的坐标。设向量 $\vec{a}$ 的起点为 $A(x_1, y_1, z_1)$, 终点为 $B(x_2, y_2, z_2)$, 则

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\} = \{a_x, a_y, a_z\}$$

注: a_x, a_y, a_z 是向量 $\vec{a}$ 的坐标, 向量的坐标也是该向量在三坐标轴上的投影。

② 向量的模

$$|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

③ 向量的方向角与方向余弦。向量 $\vec{a}$ 与 x 轴、 y 轴、 z 轴正向的夹角 α, β, γ 叫 $\vec{a}$ 的方向角 ($0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \pi$)。 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 叫做 $\vec{a}$ 的方向余弦 ($\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$)。

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

④ 单位向量。与 $\vec{a}$ 同方向的单位向量 $\vec{a}^0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$ 。

⑤ 向量在轴上的投影。向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影 $\text{Prj}_u \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos(\overrightarrow{AB}, u)$

(2) 向量的运算

① 向量的线性运算。若 $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}, \lambda$ 是一数, 则

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\}, \quad \lambda \vec{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}$$

$$\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$

② 数量积 (点积)

定义: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$ (运算结果为一数量)

坐标表达式: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

性质: $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2, \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$

两向量夹角的余弦公式: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$

③ 向量积 (叉积)

定义: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{n}^0 |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$, 其中 $\vec{n}^0$ 是按右手法则垂直于 $\vec{a}, \vec{b}$ 所在平面的单位向量 (运算结果为一向量)。

几何意义: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$ 是以 $\vec{a}, \vec{b}$ 为邻边的平行四边形的面积。

坐标表达式:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}$$

性质: $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$, $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$, $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

1.1.1.2 平面

(1) 平面方程

① 点法式方程。设平面过点 (x_0, y_0, z_0) , 法向量为 $\vec{n} = \{A, B, C\}$, 则平面方程为

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

注: 要求平面的方程, 关键是利用已知条件, 找出平面的法向量和某点的坐标。

② 一般方程: $Ax + By + Cz + D = 0$ ($\vec{n} = \{A, B, C\}$ 为平面的法向量)

当 $D=0$ 时, 平面过原点; 当 $A=0$ ($B=0$ 或 $C=0$) 时, 平面平行于 x (y 或 z) 轴, 这时若 $D \neq 0$, 平面不经过 x (y 或 z) 轴, 若 $D=0$, 则平面经过 x (y 或 z) 轴; 当 $A=B=0$ 时, 平面平行于 xOy 面。

注: 求平面方程的另一常用方法是利用条件, 写出平面一般式, 再确定系数。

(2) 两平面的夹角。设平面 π_1 、 π_2 的法向量为 $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ 和 $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$$

$$\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

(3) 点到平面的距离。点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离为

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

1.1.1.3 直线

(1) 直线方程设直线过点 (x_0, y_0, z_0) , 方向向量为 $\vec{s} = \{m, n, p\}$ 。

① 对称式方程。设直线过点 (x_0, y_0, z_0) , 方向向量为 $\vec{s} = \{m, n, p\}$, 则直线方程为

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

注: 要求直线的方程, 关键是利用已知条件, 找出方向向量和一个点的坐标。

② 参数式方程: $x = x_0 + mt$, $y = y_0 + nt$, $z = z_0 + pt$, $(-\infty < t < +\infty)$

③ 一般方程: $\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$

方向向量 $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$

由上式求出直线的方向向量, 再求出任一点的坐标, 就可将直线的一般式化为对称式。

(2) 两直线的夹角。设直线 L_1 、 L_2 的方向向量为 $\vec{s}_1 = \{m_1, n_1, p_1\}$ 和 $\vec{s}_2 = \{m_2, n_2, p_2\}$

$$\cos \theta = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| |\vec{s}_2|} = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2 \Leftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$

$$L_1 // L_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 // \vec{s}_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

(3) 直线与平面的夹角。设直线 L 的方向向量 $\vec{s} = \{m, n, p\}$, 平面 π 的法向量为 $\vec{n} = \{A, B, C\}$ 。

直线 L 和它在平面 π 上的投影直线的夹角称为直线 L 和平面 π 的夹角。

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{s}|}{|\vec{n}| |\vec{s}|} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \quad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

$$L \perp \pi \Leftrightarrow \vec{s} // \vec{n} \Leftrightarrow \frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C}$$

$$L // \pi \Leftrightarrow \vec{s} \perp \vec{n} \Leftrightarrow Am + Bn + Cp = 0$$

1.1.1.4 曲面

(1) 柱面。平行于定直线并沿定曲线 c 移动的直线 L 形成的曲面叫做柱面, 定曲线 c 叫柱面的准线, 动直线 L 叫柱面的母线。母线平行于 z 轴的柱面方程为: $F(x, y) = 0$, 其方程特点是缺 z 项, 其他情况类似。

注: 在空间解析几何中, 方程中缺某个变量, 就是柱面方程。

(2) 旋转曲面。平面曲线绕其平面上一定直线旋转一周所成的曲面叫旋转曲面, 定直线叫旋转曲面的轴。设 yOz 平面上曲线 c 的方程为 $f(y, z) = 0$, 该曲线绕 z 轴旋转一周所成的旋转曲面方程为 $f(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$ 。

(3) 二次曲面

① 椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

② 单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

③ 双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$

④ 椭圆抛物面 $\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z$ (p, q 同号)

⑤ 双曲抛物面 $-\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z$ (p, q 同号)

1.1.2 典型例题及解析

[例 1-1] 若 $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$, 则 ()。

A. $\vec{b} = \vec{c}$

B. $\vec{a} // \vec{b}$ 且 $\vec{a} // \vec{c}$

C. $\vec{a} = \vec{0}$ 或 $\vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$

D. $\vec{a} // (\vec{b} - \vec{c})$

解: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} // (\vec{b} - \vec{c})$, 故选 D。

[例 1-2] 已知 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = \sqrt{2}$, 且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$, 则 $|\vec{a} \times \vec{b}| = ()$ 。

A. 2

B. $2\sqrt{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. 1

解: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}), \because 2 = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$

$$\therefore \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \therefore \sin(\vec{a}, \vec{b}) = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}) = 2, \text{ 故选 A.}$$

[例 1-3] 已知向量 $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, 则垂直于 $\vec{a}$ 且垂直于 Oy 轴的单位向量是 ()。

- A. $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ B. $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$
C. $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} - \vec{k})$ D. $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{k})$

解: 与 Oy 轴同方向的单位向量是 $\vec{j}$, 而

$$\vec{a} \times \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k} - \vec{i}, \text{ 垂直于 } \vec{a} \text{ 且垂直于 } Oy \text{ 轴的单位向量是 } \frac{\vec{a} \times \vec{j}}{|\vec{a} \times \vec{j}|} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$(\vec{k} - \vec{i}) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} - \vec{k})$, 故选 C。

[例 1-4] 过点 $(-1, 0, 1)$ 且与平面 $x + y + 4z + 19 = 0$ 平行的平面方程为 ()。

- A. $x + y + 4z - 3 = 0$ B. $2x + y + z - 3 = 0$
C. $x + 2y + z - 19 = 0$ D. $x + 2y + 4z - 9 = 0$

解: 已知平面的法向量为 $\vec{n} = \{1, 1, 4\}$, 由已知可取所求平面的法向量为 $\vec{n} = \{1, 1, 4\}$, 所以所求平面方程为: $1 \times (x + 1) + 1 \times (y - 0) + 4 \times (z - 1) = 0$ 即 $x + y + 4z - 3 = 0$, 故选 A。

[例 1-5] 平面 $x - 3z - 6 = 0$ 的位置是 ()。

- A. 平行 xOz 平面 B. 平行 y 轴, 但不通过 y 轴
C. 垂直于 y 轴 D. 通过 y 轴

解: 由于 $B = 0$ 而 $D \neq 0$, 故平面平行 y 轴, 但不通过 y 轴, 应选 B。

[例 1-6] 决定参数 k 的值, 使平面 $kx + y - 2z = 3$ 与已知平面 $2x + 4y + 3z = 5$ 垂直。

解: 记 $\vec{n}_1 = \{k, 1, -2\}$, $\vec{n}_2 = \{2, 4, 3\}$, 由于 $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$ 即 $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ 故有
 $2k + 4 - 6 = 0$, 解得 $k = 1$ 。

[例 1-7] 设空间直线的标准方程为 $\frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$ 则该直线过原点, 且 ()。

- A. 垂直于 Ox 轴 B. 垂直于 Oy 轴, 但不平行 Ox 轴
C. 垂直于 Oz 轴, 但不平行 Ox 轴 D. 平行于 Ox 轴

解: 直线的方向向量为 $\vec{s} = \{0, 1, 2\}$, 因为 $\vec{s} \cdot \vec{i} = 0$, 故 $\vec{s} \perp \vec{i}$, 从而直线垂直于 Ox 轴, 故选 A。

[例 1-8] 直线 L 过点 $M(1, 2, 3)$ 且与二平面 $x + 2y - z = 0$ 及 $2x - 3y + 5z = 6$ 都平行, 求此直线的对称式方程。

解: 所给平面的法向量 $\vec{n}_1 = \{1, 2, -1\}$, $\vec{n}_2 = \{2, -3, 5\}$, 直线的方向向量为

$$\vec{l} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = 7\{1, -1, -1\}, \text{ 所求直线方程为 } \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-1}.$$

[例 1-9] 旋转曲面 $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ 是 ()。

- A. xOy 平面上的双曲线绕 x 轴旋转所得
B. xOy 平面上的双曲线绕 z 轴旋转所得
C. xOy 平面上的椭圆绕 x 轴旋转所得
D. xOy 平面上的椭圆绕 x 轴旋转所得

解: 曲面是 $x^2 - y^2 = 1$ (或 $x^2 - z^2 = 1$) 绕 x 轴旋转所得, 故选 A。

[例 1-10] 下列方程中代表单叶双曲面的是 ()。

$$\text{A. } \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} - z^2 = 1$$

$$\text{B. } \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + z^2 = 1$$

$$\text{C. } \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} - z^2 = 1$$

$$\text{D. } \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + z^2 = 0$$

解: $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} - z^2 = 1$ 表示单叶双曲面, $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + z^2 = 1$ 表示椭圆, $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} - z^2 = 1$ 表示双叶双曲面, $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + z^2 = 0$ 表示原点。故应选 A。

1.2 微分学

1.2.1 主要知识点

1.2.1.1 极限与函数的连续性

(1) 极限概念

函数极限: $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x) \rightarrow A$, 记为 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$$

$x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x) \rightarrow A$, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 。

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \text{ 且 } f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$$

(2) 无穷小无穷大

① 定义。无穷小: 若 $\lim f(x) = 0$, 则称 $f(x)$ 为对应极限过程下的无穷小量。

$$\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha, \text{ 其中 } \lim \alpha = 0$$

无穷大: 若 $\lim f(x) = \infty$, 则称 $f(x)$ 为对应极限过程下的无穷大量。

无穷大与无穷小互为倒数关系。

② 无穷小的性质。有限个无穷小的和(积)仍为无穷小; 有界量与无穷小的乘积仍是无穷小。

③ 无穷小比较。如果当 $x \rightarrow x_0 (x \rightarrow \infty)$ 时, α 和 β 都是无穷小, 则: 若 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$, α 是 β 的高阶无穷小; 若 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = c (c \neq 0)$, α 和 β 是同阶无穷小; 若 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$, α 和 β 是等价无穷小, 记为 $\alpha \sim \beta$ 。

④ 等价无穷小代换。如果当 $x \rightarrow x_0 (x \rightarrow \infty)$ 时, $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$ 则

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}$$

当 $x \rightarrow 0$ 时, 常用的等价无穷小有

$$\sin x \sim x, \tan x \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \ln(1+x) \sim x, e^x - 1 \sim x,$$

$$\arcsin x \sim x, \arctan x \sim x, (1+x)^\mu - 1 \sim \mu x, a^x - 1 \sim x \ln a$$

注: 在求极限时, 利用等价无穷小代换, 可简化计算。

(3) 两个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

(4) 分段函数在交界点的极限通过讨论左、右极限得到。

(5) 罗必达法则

七种未定式： $\frac{0}{0}$ 、 $\frac{\infty}{\infty}$ 、 $0 \cdot \infty$ 、 $\infty - \infty$ 、 1^∞ 、 0^0 、 ∞^0 。

罗必达法则：当 $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$) 时， $f(x) \rightarrow 0$ ， $F(x) \rightarrow 0$ ；

① 在点 x_0 某去心邻域内（或当 $|x| > N$ 时） $f'(x)$ 及 $F'(x)$ 都存在且 $F'(x) \neq 0$ ；

② $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在（或为无穷大），则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

说明：a. 罗必达法则仅适用于 $\frac{0}{0}$ 及 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，其他五种未定式应化为 $\frac{0}{0}$ 及 $\frac{\infty}{\infty}$ 型后才可使用罗必达法则；b. 罗必达法则可反复使用。

注：如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ ，而 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在，则必有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ 。

(6) 函数的连续性

① 定义。设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ，则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续。若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ ，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续或左连续。如果函数 $f(x)$ 在开区间内每一点都连续，则称 $f(x)$ 在该开区间内连续。如果函数 $f(x)$ 在闭区间内每一点都连续，且在端点右、左连续，则称 $f(x)$ 在该闭区间上连续。

② 重要结论。基本初等函数在定义域内连续；初等函数在定义区间内连续。

③ 间断点及其类型。不连续的点即为间断点。间断点分为两类。

第一类：在该点左右极限都存在。如果左右极限相等，称为可去间断点，这时改变或补充函数值，可使之连续；如果左右极限不相等，称为跳跃间断点。

第二类：在该点左右极限至少有一个不存在。如果左右极限中有一个为无穷大，称为无穷间断点；如果在该点函数值振荡变化，称为振荡间断点。

1.2.1.2 导数与微分

(1) 导数

① 导数概念

导数定义： $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow$ 左导数 $f'_-(x_0)$ 与右导数 $f'_+(x_0)$ 都存在且相等

几何意义： $f'(x_0)$ 表示曲线 $y = f(x)$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 点的切线斜率 k 。

切线方程： $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

法线方程： $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

② 导数计算

a. 显函数求导。背熟导数基本公式，理解并熟记函数和、差、积、商的求导法则，复合函数求导法则，反复求一阶导数就可得高阶导数。

b. 隐函数求导法。对方程 $F(x, y) = 0$ 两边关于自变量求导，将因变量的函数当复合函数对待，再解出 y' 则可。

c. 参数方程求导法 设 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$, 则 $\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]/\varphi'(t)$

d. 分段函数在交界点处的导数要用导数定义求, 一般要分别求左导数与右导数。

(2) 微分

① 当函数 $y=f(x)$ 在点 x 可导时, 在该点一定可微, 且有 $dy=f'(x)dx$ 。

② 微分是函数增量的近似, 相差一个关于的高阶无穷小, 即 $\Delta y=f'(x)\Delta x+o(\Delta x)$ 。

③ 复合函数的微分法则 设 $u=\varphi(x)$ 、 $y=f(u)$ 均可微, 则 $y=f[\varphi(x)]$ 也可微, 且 $dy=f'(u)\varphi'(x)dx=f'(u)du$ (微分形式不变性)。

1.2.1.3 偏导数与全微分

(1) 偏导数

① 二元函数偏导数的定义

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

② 多元复合函数求偏导法则。设 $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$ 在 (x, y) 处具有偏导数, $z=f(u, v)$ 在对应点 (u, v) 具有连续偏导数, 则复合函数 $z=f[u(x, y), v(x, y)]$ 在 (x, y) 点偏导数存在, 且有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

注意: 多元函数复合的情况比较复杂, 不能用一个公式表达所有情况。复合函数求偏导的关键是: 分清复合层次, 可用图解法表示出函数的复合层次; 分清每步对哪个变量求导, 哪个是自变量, 哪个是中间变量, 固定了哪些变量; 对某自变量求导, 应注意要经过各层次有关的中间变量而归结到该自变量。在每个层次中是求偏导还是求全导。

③ 隐函数求偏导。设方程 $F(x, y, z)=0$ 确定了隐函数 $z=f(x, y)$, 函数 $F(x, y, z)$ 具有连续偏导数且 $F_z \neq 0$ 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

(2) 全微分

① 如果 $z=f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微, 则偏导数必定存在, 且全微分 $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ 。

② 全微分与偏导数的关系 全微分存在 $\Rightarrow$ 偏导数存在, 偏导数连续 $\Rightarrow$ 全微分存在, 全微分存在 $\Rightarrow$ 沿任意方向的方向导数都存在。

1.2.1.4 导数与微分应用

(1) 中值定理

① 罗尔定理。若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, $f(a)=f(b)$, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi)=0$ 。

② 拉格朗日中值定理 (微分中值定理)。若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$ 。

[推论] 如果在区间 I 上 $f'(x)=0$ 则在区间 I 上 $f(x)=\text{常数}$ 。

(2) 利用导数研究函数的性态

① 函数的单调性的判定。若在区间 I 上, $f'(x) > 0$ [$f'(x) < 0$], 则 $f(x)$ 在该区间上单调增加 (单调减少)。

② 求函数的极值

a. 第一判别法。设 $f'(x_0) = 0$ [或 $f'(x_0)$ 不存在], 如果 $f'(x)$ 在点 x_0 左、右两侧变号, 则 x_0 为极值点; 且在 x_0 点两侧 $f'(x)$ 的符号由正变负 (由负变正), 则 $f(x_0)$ 为极大值 (极小值)。

b. 第二判别法。设 $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, 若 $f''(x_0) < 0$ [$f''(x_0) > 0$], 则 $f(x_0)$ 是极大值 (极小值)。

说明: 极值是局部性概念, 表示局部范围最大或最小, 与最值不同。对于可导函数, 极值只能在驻点处取得, 但驻点不一定是极值点; 极值也可能在导数不存在的连续点处取得。

③ 曲线的凹凸性与拐点。设 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续, $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, 若 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 则称曲线 $y=f(x)$ 在 (a, b) 内是凸的, 反之则称其是凹的。

曲线 $y=f(x)$ 的凹弧与凸弧的分界点 $(x_0, f(x_0))$ 叫拐点。

在 (a, b) 内若 $f''(x) > 0$ (或 < 0), 则曲线 $y=f(x)$ 在该区间上向上凹 (向上凸)。

若 $f''(x_0) = 0$, 且在 x_0 点两侧 $f''(x)$ 变号, 则 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点。

设 $f(x)$ 在 x_0 点具有三阶导数, $f''(x_0) = 0$, 且 $f'''(x_0) \neq 0$, 则 $(x_0, f(x_0))$ 为拐点。

拐点也可能在 $f''(x_0)$ 不存在的连续点处取得。

(3) 利用导数求函数的最大值与最小值

① 闭区间上连续函数的最大值与最小值求法。求区间内驻点或导数不存在的点及端点处的函数值, 比较它们的大小, 最大者为最大值, 最小者为最小值。

② 如果连续函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调, 则最大值与最小值在端点处取得。

③ 如果 $f(x)$ 在某区间上 (有限或无限) 连续且仅有一个极值, 若是极大 (小) 值, 则为最大 (小) 值。

(4) 一元函数微分应用

① 求函数在某一点增量的近似值

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \Delta x$$

② 求函数值的近似值

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x, f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

③ 工程中常用的近似公式 ($|x|$ 比较小)

$$\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{n}x, \sin x \approx x, \tan x \approx x, e^x \approx 1+x, \ln(1+x) \approx x$$

(5) 多元函数微分应用

① 空间曲线的切线及法平面。若曲线由参数方程 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ 给出, 则在点 $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) = M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处, 切向量为 $\vec{T} = \{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$, 切线方程为

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)} = \frac{y-y_0}{y'(t_0)} = \frac{z-z_0}{z'(t_0)}$$

法平面方程为 $x'(t_0)(x-x_0) + y'(t_0)(y-y_0) + z'(t_0)(z-z_0) = 0$

② 曲面的切平面及法线。若曲面方程为 $F(x, y, z) = 0$, 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处, 法向量 $\vec{n} = \{F_x(M_0), F_y(M_0), F_z(M_0)\}$, 切平面方程为

$$F_x(M_0)(x-x_0) + F_y(M_0)(y-y_0) + F_z(M_0)(z-z_0) = 0$$

法线方程
$$\frac{x-x_0}{F_x(M_0)} = \frac{y-y_0}{F_y(M_0)} = \frac{z-z_0}{F_z(M_0)}$$

若曲面方程为 $z=f(x,y)$, 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处, 法向量 $\vec{n}=\{f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1\}$, 切平面方程为

$$z-z_0=f_x(x_0, y_0)(x-x_0)+f_y(x_0, y_0)(y-y_0)$$

法线方程为
$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y-y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z-z_0}{-1}$$

③ 二元函数极值的必要条件。可导函数 $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 点有极值的必要条件是 $f'_x(x_0, y_0)=0, f'_y(x_0, y_0)=0$ 。

④ 二元函数极值的充分条件。设函数 $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 点某邻域内具有一阶、二阶连续偏导数, 且 $f'_x(x_0, y_0)=0, f'_y(x_0, y_0)=0$,

令 $f_{xx}(x_0, y_0)=A, f_{xy}(x_0, y_0)=B, f_{yy}(x_0, y_0)=C$

则 a. $AC-B^2>0$, 且 $\begin{cases} A<0, & \text{则 } f(x_0, y_0) \text{ 为极大值} \\ A>0, & \text{则 } f(x_0, y_0) \text{ 为极小值} \end{cases}$

b. $AC-B^2<0$, 则无极值;

c. $AC-B^2=0$, 该方法失效。

1.2.2 典型例题及解析

[例 1-11] 若 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=2$, 则必有 ()。

A. $a=2, b=8$ B. $a=2, b=5$ C. $a=0, b=-8$ D. $a=2, b=-8$

解: 当 $x \rightarrow 2$, 分母极限为零, 分子也必须为零, 故有 $4+2a+b=0$; 利用罗必达法则,

$$2 = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+ax+b}{x^2-x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+a}{2x-1} = \frac{4+a}{3}$$

所以 $a=2$, 代入 $4+2a+b=0$ 有 $b=-8$, 故应选 D。

[例 1-12] 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{1}{x}}$ 的值为 ()。

A. e B. 1 C. e^{-3} D. e^3

解: $\lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{1}{-3x} \times (-3)} = [\lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{1}{-3x}}]^{-3} = e^{-3}$ 故选 C。

[例 1-13] 若 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 为无穷小, 且 $f(x)$ 为 x^2 高阶无穷小, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sin^2 x} = ()$ 。

A. 0 B. 1 C. ∞ D. $\frac{1}{2}$

解: 因为 $\sin^2 x \sim x^2$, 所以 $f(x)$ 为 $\sin^2 x$ 高阶无穷小, 极限为 0, 故选 A。

[例 1-14] 若有 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x-a}=0$, 则当 $x \rightarrow a$ 时, $f(x)$ 是 ()。

A. 有极限的函数 B. 有界函数
C. 无穷小量 D. 比 $(x-a)$ 高阶的无穷小

解: 由 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x-a}=0$ 知, 必有 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)=0$, 且 $f(x)$ 是比 $(x-a)$ 高阶的无穷小, 故应选 D。

[例 1-15] 设 $f(x) = \frac{1-2e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} \arctan \frac{1}{x}$, 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的 ()。

A. 可去间断点 B. 跳跃间断点 C. 无穷间断点 D. 振荡间断点

解: 正确答案为 B。当 $x \rightarrow +0, \frac{1}{x} \rightarrow +\infty; x \rightarrow -0, \frac{1}{x} \rightarrow -\infty$ 。故有