刘燕　刘建伟　主编

注册环保工程师基础考试
应试一本通

ZHUCE HUANBAO GONGCHENGSHI JICHU KAOSHI
YINGSHI YIBENTONG

紧扣考试大纲

权威专家精心编写

复习应考必备

化学工业出版社

刘燕　刘建伟　主编

注册环保工程师基础考试
应试一本通

ZHUCE HUANBAO GONGCHENGSHI JICHU KAOSHI
YINGSHI YIBENTONG

化学工业出版社
·北京·

本书按照注册环保工程师基础考试大纲的要求编写，对各知识点逐一讲解，并编写了例题和解析，既突出了重要概念的应用，又与考试的实际情况结合，帮助考生在较短的时间内掌握考试的内容。

图书在版编目（CIP）数据

注册环保工程师基础考试应试一本通/刘燕，刘建伟主编．—北京：化学工业出版社，2009.4
ISBN 978-7-122-05157-8

Ⅰ．注…　Ⅱ．①刘…②刘…　Ⅲ．环境保护-工程技术人员-资格考核-自学参考资料　Ⅳ．X

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 043301 号

责任编辑：徐　娟　刘砚哲　　　　装帧设计：史利平
责任校对：李　林

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）
印　　装：三河市延风印装厂
787mm×1092mm　1/16　印张 24¼　字数 608 千字　　2009 年 5 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：68.00 元　

前言

实施注册环保工程师执业资格考试制度，是为适应社会主义市场经济体制，使工程设计管理体制和人事管理制度尽快与国际接轨的一项配套改革措施。注册环保工程师资格必须通过全国统一考试取得。

为配合全国注册环保工程师资格考试，也为有效指导考生复习、应考，我们组织具有深厚的专业知识和多年丰富的教学、辅导经验的教师编写了本书。本书以注册环保工程师基础考试大纲为依据，以大纲中提供的参考书目为基础，具有较强的指导性和实用性。

本书的主要特点是：

（1）紧扣考试大纲中的各知识点逐一讲解，简明扼要，联系实际，着重于对概念的理解和运用；

（2）书中的例题结合考试真题的形式，注意突出重点概念的讲解；

（3）内容精练，使参考人员能够在较短的时间内，掌握全部考试内容。

书中高等数学部分由李群高编写，普通物理部分由魏京花编写，普通化学部分由岳冠华编写，理论力学部分由刘燕编写，材料力学部分由张英编写，流体力学、工程流体力学与流体机械部分由王文海编写，计算机应用基础部分由陈志新编写，电工电子技术部分由叶安丽、刘辛国编写，工程经济部分由杨静编写，环境工程微生物学部分由高敏编写，环境监测与分析部分由陈小珍、刘建伟编写，环境评价与环境规划由刘建伟编写，污染防治技术部分由王敏、刘建伟、陈小珍编写，职业法规部分由刘建伟编写。全书由刘燕、刘建伟负责统稿。

由于时间仓促，在编写过程中难免有疏漏之处，恳请读者指正。

编者

2009年2月

目录

第 1 章 高等数学 1

第 2 章 普通物理 50

第 3 章 普通化学 73

第 4 章 理论力学 99

第 9 章 工程经济 221

第 10 章 工程流体力学与流体机械 230

第 11 章 环境工程微生物 258

第1章　高等数学

1.1　空间解析几何

1.1.1　主要知识点

1.1.1.1　向量代数

（1）向量的概念

① 向量的坐标。设向量$\vec{a}$的起点为$A(x_1,y_1,z_1)$，终点为$B(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\vec{a}=\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}=\{a_x,a_y,a_z\}$$

注：a_x，a_y，a_z是向量$\vec{a}$的坐标，向量的坐标也是该向量在三坐标轴上的投影。

② 向量的模

$$|\vec{a}|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

③ 向量的方向角与方向余弦。向量$\vec{a}$与x轴、y轴、z轴正向的夹角α、β、γ叫$\vec{a}$的方向角（$0\leqslant\alpha$、β、$\gamma\leqslant\pi$）。$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$叫做$\vec{a}$的方向余弦（$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$）。

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|},\cos\beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|},\cos\gamma=\frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

④ 单位向量。与$\vec{a}$同方向的单位向量$\vec{a^0}=\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$。

⑤ 向量在轴上的投影。向量$\overrightarrow{AB}$在轴u上的投影　$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos(\overrightarrow{AB},u)$

（2）向量的运算

① 向量的线性运算。若$\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\},\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，$\lambda$是一数，则

$$\vec{a}\pm\vec{b}=\{a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z\},\quad \lambda\vec{a}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}$$

$$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}=\lambda\vec{b}\Leftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$$

② 数量积（点积）

定义：$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$（运算结果为一数量）

坐标表达式：$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

性质：$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$，$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$

两向量夹角的余弦公式：$\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$

③ 向量积（叉积）

定义：$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{n^0}|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})$，其中$\vec{n^0}$是按右手法则垂直于$\vec{a}$、$\vec{b}$所在平面的单位向量（运算结果为一向量）。

几何意义：$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})$是以$\vec{a}$、$\vec{b}$为邻边的平行四边形的面积。

坐标表达式：

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=(a_yb_z-a_xb_y)\vec{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}$$

性质：$\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$，$\vec{a}\mathbin{/\!/}\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$，$\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}$、$\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$，$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

1.1.1.2 平面

（1）平面方程

① 点法式方程。设平面过点 (x_0,y_0,z_0)，法向量为$\vec{n}=\{A,B,C,\}$，则平面方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

注： 要求平面的方程，关键是利用已知条件，找出平面的法向量和某点的坐标。

② 一般方程：$Ax+By+Cz+D=0$（$\vec{n}=\{A,B,C\}$为平面的法向量）

当 $D=0$ 时，平面过原点；当 $A=0$（$B=0$ 或 $C=0$）时，平面平行于 x(y 或 z) 轴，这时若 $D\neq0$，平面不经过 x(y 或 z) 轴，若 $D=0$，则平面经过 x(y 或 z) 轴；当 $A=B=0$ 时，平面平行于 xOy 面。

注： 求平面方程的另一常用方法是利用条件，写出平面一般式，再确定系数。

（2）两平面的夹角。设平面 π_1、π_2 的法向量为$\vec{n_1}=\{A_1,B_1,C_1\}$ 和$\vec{n_2}=\{A_2,B_2,C_2\}$

$$\cos\theta=\frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\pi_1\perp\pi_2\Leftrightarrow\vec{n_1}\perp\vec{n_2}\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$$

$$\pi_1\mathbin{/\!/}\pi_2\Leftrightarrow\vec{n_1}\mathbin{/\!/}\vec{n_2}\Leftrightarrow\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$

（3）点到平面的距离。点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

1.1.1.3 直线

（1）直线方程设直线过点 (x_0,y_0,z_0)，方向向量为$\vec{s}=\{m,n,p\}$。

① 对称式方程。设直线过点 (x_0,y_0,z_0)，方向向量为$\vec{s}=\{m,n,p\}$，则直线方程为

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

注： 要求直线的方程，关键是利用已知条件，找出方向向量和一个点的坐标。

② 参数式方程：$x=x_0+mt$，$y=y_0+nt$，$z=z_0+pt$，$(-\infty<t<+\infty)$

③ 一般方程：$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$

方向向量
$$\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\end{vmatrix}$$

由上式求出直线的方向向量，再求出任一点的坐标，就可将直线的一般式化为对称式。

（2）两直线的夹角。设直线 L_1、L_2 的方向向量为 $\vec{s_1}=\{m_1,n_1,p_1\}$ 和$\vec{s_2}=\{m_2,n_2,p_2\}$

$$\cos\theta=\frac{|\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}|}{|\vec{s_1}||\vec{s_2}|}=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{s_1} \perp \vec{s_2} \Leftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$

$$L_1 /\!/ L_2 \Leftrightarrow \vec{s_1} /\!/ \vec{s_2} \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

(3) 直线与平面的夹角。设直线 L 的方向向量 $\vec{s} = \{m, n, p\}$，平面 π 的法向量为 $\vec{n} = \{A, B, C\}$。

直线 L 和它在平面 π 上的投影直线的夹角称为直线 L 和平面 π 的夹角。

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{s}|}{|\vec{n}||\vec{s}|} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \left(0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

$$L \perp \pi \Leftrightarrow \vec{s} /\!/ \vec{n} \Leftrightarrow \frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C}$$

$$L /\!/ \pi \Leftrightarrow \vec{s} \perp \vec{n} \Leftrightarrow Am + Bn + Cp = 0$$

1.1.1.4 曲面

(1) 柱面。平行于定直线并沿定曲线 c 移动的直线 L 形成的曲面叫做柱面，定曲线 c 叫柱面的准线，动直线 L 叫柱面的母线。母线平行于 z 轴的柱面方程为：$F(x, y) = 0$，其方程特点是缺 z 项，其他情况类似。

注： 在空间解析几何中，方程中缺某个变量，就是柱面方程。

(2) 旋转曲面。平面曲线绕其平面上一定直线旋转一周所成的曲面叫旋转曲面，定直线叫旋转曲面的轴。设 yOz 平面上曲线 c 的方程为 $f(y, z) = 0$，该曲线绕 z 轴旋转一周所成的旋转曲面方程为 $f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$。

(3) 二次曲面

① 椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

② 单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

③ 双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$

④ 椭圆抛物面 $\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z$（$p$、$q$ 同号）

⑤ 双曲抛物面 $-\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z$（$p$、$q$ 同号）

1.1.2 典型例题及解析

[例 1-1] 若 $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$，则（　　）。

A. $\vec{b} = \vec{c}$　　B. $\vec{a} /\!/ \vec{b}$ 且 $\vec{a} /\!/ \vec{c}$　　C. $\vec{a} = \vec{0}$ 或 $\vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$　　D. $\vec{a} /\!/ (\vec{b} - \vec{c})$

解： $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} /\!/ (\vec{b} - \vec{c})$，故选 D。

[例 1-2] 已知 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = \sqrt{2}$，且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$，则 $|\vec{a} \times \vec{b}| =$（　　）。

A. 2　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. 1

解： $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a}, \vec{b})$，$\because 2 = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b})$

$\therefore \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore \sin(\vec{a}, \vec{b}) = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a}, \vec{b}) = 2，故选 A。$$

［例 1-3］ 已知向量$\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$，则垂直于$\vec{a}$且垂直于 Oy 轴的单位向量是（　　）。

A. $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$　　B. $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})$

C. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}-\vec{k})$　　D. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}+\vec{k})$

解： 与 Oy 轴同方向的单位向量是$\vec{j}$，而

$\vec{a}\times\vec{j}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=\vec{k}-\vec{i}$，垂直于$\vec{a}$且垂直于 Oy 轴的单位向量是$\frac{\vec{a}\times\vec{j}}{|\vec{a}\times\vec{j}|}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$(\vec{k}-\vec{i})=\mp\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}-\vec{k})$，故选 C。

［例 1-4］ 过点（$-1,0,1$）且与平面 $x+y+4z+19=0$ 平行的平面方程为（　　）。

A. $x+y+4z-3=0$　　B. $2x+y+z-3=0$

C. $x+2y+z-19=0$　　D. $x+2y+4z-9=0$

解： 已知平面的法向量为$\vec{n}=\{1,1,4\}$，由已知可取所求平面的法向量为$\vec{n}=\{1,1,4\}$，

所以所求平面方程为：$1\times(x+1)+1\times(y-0)+4\times(z-1)=0$

即 $x+y+4z-3=0$，故选 A。

［例 1-5］ 平面 $x-3z-6=0$ 的位置是（　　）。

A. 平行 xOz 平面　　B. 平行 y 轴，但不通过 y 轴

C. 垂直于 y 轴　　D. 通过 y 轴

解： 由于 $B=0$ 而 $D\neq0$，故平面平行 y 轴，但不通过 y 轴，应选 B。

［例 1-6］ 决定参数 k 的值，使平面 $kx+y-2z=3$ 与已知平面 $2x+4y+3z=5$ 垂直。

解： 记$\vec{n_1}=\{k,1,-2\}$，$\vec{n_2}=(2,4,3)$，由于$\vec{n_1}\perp\vec{n_2}$即$\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0$ 故有

$$2k+4-6=0，解得 k=1。$$

［例 1-7］ 设空间直线的标准方程为$\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$则该直线过原点，且（　　）。

A. 垂直于 Ox 轴　　B. 垂直于 Oy 轴，但不平行 Ox 轴

C. 垂直于 Oz 轴，但不平行 Ox 轴　　D. 平行于 Ox 轴

解： 直线的方向向量为$\vec{s}=\{0,1,2\}$，因为$\vec{s}\cdot\vec{i}=0$，故$\vec{s}\perp\vec{i}$，从而直线垂直于 Ox 轴，故选 A。

［例 1-8］ 直线 L 过点 $M(1,2,3)$ 且与二平面 $x+2y-z=0$ 及 $2x-3y+5z=6$ 都平行，求此直线的对称式方程。

解： 所给平面的法向量$\vec{n_1}=\{1,2,-1\}$，$\vec{n_2}=\{2,-3,5\}$，直线的方向向量为

$\vec{l}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=7\{1,-1,-1\}$，所求直线方程为$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{-1}$。

［例 1-9］ 旋转曲面 $x^2-y^2-z^2=1$ 是（　　）。

A. xOy 平面上的双曲线绕 x 轴旋转所得

B. xOy 平面上的双曲线绕 z 轴旋转所得

C. xOy 平面上的椭圆绕 x 轴旋转所得

D. xOy 平面上的椭圆绕 x 轴旋转所得

解： 曲面是 $x^2-y^2=1$（或 $x^2-z^2=1$）绕 x 轴旋转所得，故选 A。

［例 1-10］ 下列方程中代表单叶双曲面的是（　　）。

A. $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}-z^2=1$　　B. $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+z^2=1$

C. $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}-z^2=1$　　D. $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+z^2=0$

解： $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}-z^2=1$ 表示单叶双曲面，$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+z^2=1$ 表示椭圆，$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}-z^2=1$ 表双叶示双曲面，$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+z^2=0$ 表示原点。故应选 A。

1.2 微分学

1.2.1 主要知识点

1.2.1.1 极限与函数的连续性

(1) 极限概念

函数极限：$x\to\infty$时，函数 $f(x)\to A$，记为$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$。

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 且 } \lim_{x\to+\infty}f(x)=A$$

$$x\to x_0 \text{ 时，函数 } f(x)\to A\text{，记为 }\lim_{x\to x_0}f(x)=A\text{。}$$

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \text{ 且 } f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A$$

(2) 无穷小无穷大

① 定义。无穷小：若$\lim f(x)=0$，则称 $f(x)$ 为对应极限过程下的无穷小量。

$$\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha\text{，其中}\lim\alpha=0$$

无穷大：若$\lim f(x)=\infty$，则称 $f(x)$ 为对应极限过程下的无穷大量。

无穷大与无穷小互为倒数关系。

② 无穷小的性质。有限个无穷小的和（积）仍为无穷小；有界量与无穷小的乘积仍是无穷小。

③ 无穷小比较。如果当 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时，α 和 β 都是无穷小，则：若$\lim\frac{\alpha}{\beta}=0$，$\alpha$ 是 β 的高阶无穷小；若$\lim\frac{\alpha}{\beta}=c$（$c\neq0$），$\alpha$ 和 β 是同阶无穷小；若$\lim\frac{\alpha}{\beta}=1$，$\alpha$ 和 β 是等价无穷小，记为 $\alpha\sim\beta$。

④ 等价无穷小代换。如果当 $x\to x_0$（$x\to\infty$）时，$\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$则

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$$

当 $x\to0$ 时，常用的等价无穷小有

$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，$\ln(1+x)\sim x$，$e^x-1\sim x$，

$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$(1+x)^\mu-1\sim\mu x$，$a^x-1\sim x\ln a$

注： 在求极限时，利用等价无穷小代换，可简化计算。

(3) 两个重要极限

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,\ \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\right)$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$$

(4) 分段函数在交界点的极限通过讨论左、右极限得到。

(5) 罗必达法则

七种未定式：$\frac{0}{0}$、$\frac{\infty}{\infty}$、$0\cdot\infty$、$\infty-\infty$、1^{∞}、0^{0}、∞^{0}。

罗必达法则：当 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时，$f(x)\to 0$，$F(x)\to 0$；

① 在点 x_0 某去心邻域内（或当$|x|>N$时）$f'(x)$ 及 $F'(x)$ 都存在且 $F'(x)\neq 0$；

② $\lim\frac{f'(x)}{F'(x)}$存在（或为无穷大），则

$$\lim\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

说明：a. 罗必达法则仅适用于$\frac{0}{0}$及$\frac{\infty}{\infty}$型，其他五种未定式应化为$\frac{0}{0}$及$\frac{\infty}{\infty}$型后才可使用罗必达法则；b. 罗必达法则可反复使用。

注：如果 $\lim g(x)=0$，而 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$存在，则必有 $\lim f(x)=0$。

(6) 函数的连续性

① 定义。设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续。若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续或左连续。如果函数 $f(x)$ 在开区间内每一点都连续，则称 $f(x)$ 在该开区间内连续。如果函数 $f(x)$ 在闭区间内每一点都连续，且在端点右、左连续，则称 $f(x)$ 在该闭区间上连续。

② 重要结论。基本初等函数在定义域内连续；初等函数在定义区间内连续。

③ 间断点及其类型。不连续的点即为间断点。间断点分为两类。

第一类：在该点左右极限都存在。如果左右极限相等，称为可去间断点，这时改变或补充函数值，可使之连续；如果左右极限不相等，称为跳跃间断点。

第二类：在该点左右极限至少有一个不存在。如果左右极限中有一个为无穷大，称为无穷间断点；如果在该点函数值振荡变化，称为振荡间断点。

1.2.1.2 导数与微分

(1) 导数

① 导数概念

导数定义：$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$f'(x_0)$ 存在$\Leftrightarrow$左导数 $f'_-(x_0)$ 与右导数 $f'_+(x_0)$ 都存在且相等

几何意义：$f'(x_0)$ 表示曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 点的切线斜率 k。

切线方程：$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

法线方程：$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$

② 导数计算

a. 显函数求导。背熟导数基本公式，理解并熟记函数和、差、积、商的求导法则，复合函数求导法则，反复求一阶导数就可得高阶导数。

b. 隐函数求导法。对方程 $F(x,y)=0$ 两边关于自变量求导，将因变量的函数当复合函数对待，再解出 y'则可。

c. 参数方程求导法 设$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$，则$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]/\varphi'(t)$

d. 分段函数在交界点处的导数要用导数定义求，一般要分别求左导数与右导数。

（2）微分

① 当函数 $y=f(x)$ 在点 x 可导时，在该点一定可微，且有 $dy=f'(x)dx$。

② 微分是函数增量的近似，相差一个关于的高阶无穷小，即 $\Delta y=f'(x)\Delta x+o(\Delta x)$。

③ 复合函数的微分法则 设 $u=\varphi(x)$、$y=f(u)$ 均可微，则 $y=f[\varphi(x)]$ 也可微，且 $dy=f'(u)\varphi'(x)dx=f'(u)du$（微分形式不变性）。

1.2.1.3 偏导数与全微分

（1）偏导数

① 二元函数偏导数的定义

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$f_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

② 多元复合函数求偏导法则。设 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 在（x,y）处具有偏导数，$z=f(u,v)$ 在对应点（u,v）具有连续偏导数，则复合函数 $z=f[u(x,y),v(x,y)]$ 在（x,y）点偏导数存在，且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

注意： 多元函数复合的情况比较复杂，不能用一个公式表达所有情况。复合函数求偏导的关键是：分清复合层次，可用图解法表示出函数的复合层次；分清每步对哪个变量求导，哪个是自变量，哪个是中间变量，固定了哪些变量；对某自变量求导，应注意要经过各层次有关的中间变量而归结到该自变量。在每个层次中是求偏导还是求全导。

③ 隐函数求偏导。设方程 $F(x,y,z)=0$ 确定了隐函数 $z=f(x,y)$，函数 $F(x,y,z)$ 具有连续偏导数且 $Fz\neq 0$ 则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{Fx}{Fz}\qquad\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{Fy}{Fz}$$

（2）全微分

① 如果 $z=f(x,y)$ 在点（x,y）可微，则偏导数必定存在，且全微分 $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$。

② 全微分与偏导数的关系 全微分存在⇒偏导数存在，偏导数连续⇒全微分存在，
全微分存在⇒沿任意方向的方向导数都存在。

1.2.1.4 导数与微分应用

（1）中值定理

① 罗尔定理。若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(a)=f(b)$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$。

② 拉格朗日中值定理（微分中值定理）。若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则存在 $\xi\in(a,b)$，使$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$。

［推论］如果在区间 I 上 $f'(x)=0$ 则在区间 I 上 $f(x)=$常数。

(2) 利用导数研究函数的性态

① 函数的单调性的判定。若在区间 I 上，$f'(x)>0[f'(x)<0]$，则 $f(x)$ 在该区间上单调增加（单调减少）。

② 求函数的极值

a. 第一判别法。设 $f'(x_0)=0$ [或 $f'(x_0)$ 不存在]，如果 $f'(x)$ 在点 x_0 左、右两侧变号，则 x_0 为极值点；且在 x_0 点两侧 $f'(x)$ 的符号由正变负（由负变正），则 $f(x_0)$ 为极大值（极小值）。

b. 第二判别法。设 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq0$，若 $f''(x_0)<0[f''(x_0)>0]$，则 $f(x_0)$ 是极大值（极小值）。

说明：极值是局部性概念，表示局部范围最大或最小，与最值不同。对于可导函数，极值只能在驻点处取得，但驻点不一定是极值点；极值也可能在导数不存在的连续点处取得。

③ 曲线的凹凸性与拐点。设 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，$\forall x_1$、$x_2\in(a,b)$，若 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则称曲线 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是凸的，反之则称其是凹的。曲线 $y=f(x)$ 的凹弧与凸弧的分界点 $(x_0,f(x_0))$ 叫拐点。

在 (a,b) 内若 $f''(x)>0$(或<0)，则曲线 $y=f(x)$ 在该区间上向上凹（向上凸）。

若 $f''(x_0)=0$，且在 x_0 点两侧 $f''(x)$ 变号，则 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点。

设 $f(x)$ 在 x_0 点具有三阶导数，$f''(x_0)=0$，且 $f'''(x_0)\neq0$，则 $(x_0,f(x_0))$ 为拐点。

拐点也可能在 $f''(x_0)$ 不存在的连续点处取得。

(3) 利用导数求函数的最大值与最小值

① 闭区间上连续函数的最大值与最小值求法。求区间内驻点或导数不存在的点及端点处的函数值，比较它们的大小，最大者为最大值，最小者为最小值。

② 如果连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调，则最大值与最小值在端点处取得。

③ 如果 $f(x)$ 在某区间上（有限或无限）连续且仅有一个极值，若是极大（小）值，则为最大（小）值。

(4) 一元函数微分应用

① 求函数在某一点增量的近似值

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x$$

② 求函数值的近似值

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x,\ f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

③ 工程中常用的近似公式（$|x|$ 比较小）

$$\sqrt[n]{1+x}\approx1+\frac{1}{n}x,\sin x\approx x,\tan x\approx x,e^x\approx1+x,\ln(1+x)\approx x$$

(5) 多元函数微分应用

① 空间曲线的切线及法平面。若曲线由参数方程 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$ 给出，则在点 $M_0(x(t_0),y(t_0),z(t_0))=M_0(x_0,y_0,z_0)$处，切向量为 $\vec{T}=\{x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)\}$,切线方程为

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}$$

法平面方程为 $x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$

② 曲面的切平面及法线。若曲面方程为 $F(x,y,z)=0$，在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$处，法向量 $\vec{n}=\{F_x(M_0),F_y(M_0),F_z(M_0)\}$，切平面方程为

$$F_x(M_0)(x-x_0)+F_y(M_0)(y-y_0)+F_z(M_0)(z-z_0)=0$$

法线方程　$$\frac{x-x_0}{F_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(M_0)}$$

若曲面方程为 $z=f(x,y)$，在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处，法向量 $\vec{n}=\{f_x(x_0,y_0),\ f_y(x_0,y_0),-1\}$，切平面方程为

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$

③ 二元函数极值的必要条件。可导函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点有极值的必要条件是 $f'_x(x_0,y_0)=0$，$f'_y(x_0,y_0)=0$。

④ 二元函数极值的充分条件。设函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点某邻域内具有一阶、二阶连续偏导数，且 $f_x(x_0,y_0)=0$，$f_y(x_0,y_0)=0$，

令 $f_{xx}(x_0,y_0)=A$，$f_{xy}(x_0,y_0)=B$，$f_{yy}(x_0,y_0)=C$

则 a. $AC-B^2>0$，且 $\begin{cases}A<0\text{，则 } f(x_0,y_0) \text{ 为极大值}\\ A>0\text{，则 } f(x_0,y_0) \text{ 为极小值}\end{cases}$

b. $AC-B^2<0$，则无极值；

c. $AC-B^2=0$，该方法失效。

1.2.2　典型例题及解析

[例 1-11]　若 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=2$，则必有（　　）。

A. $a=2$，$b=8$　　B. $a=2$，$b=5$　　C. $a=0$，$b=-8$　　D. $a=2$，$b=-8$

解： 当 $x\to 2$，分母极限为零，分子也必须为零，故有 $4+2a+b=0$；利用罗必达法则，

$$2=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x+a}{2x-1}=\frac{4+a}{3}$$

所以 $a=2$，代入 $4+2a+b=0$ 有 $b=-8$，故应选 D。

[例 1-12]　极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$ 的值为（　　）。

A. e　　B. 1　　C. e^{-3}　　D. e^3

解： $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{-3x}\times(-3)}=[\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{-3x}}]^{-3}=e^{-3}$ 故选 C。

[例 1-13]　若 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)$ 为 x^2 高阶无穷小，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sin^2 x}=$（　　）。

A. 0　　B. 1　　C. ∞　　D. $\dfrac{1}{2}$

解： 因为 $\sin^2 x\sim x^2$，所以 $f(x)$ 为 $\sin^2 x$ 高阶无穷小，极限为 0，故选 A。

[例 1-14]　若有 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x-a}=0$，则当 $x\to a$ 时，$f(x)$ 是（　　）。

A. 有极限的函数　　B. 有界函数

C. 无穷小量　　D. 比 $(x-a)$ 高阶的无穷小

解： 由 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x-a}=0$ 知，必有 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$. 且 $f(x)$ 是比 $(x-a)$ 高阶的无穷小，故应选 D。

[例 1-15]　设 $f(x)=\dfrac{1-2e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}\arctan\dfrac{1}{x}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（　　）。

A. 可去间断点　　B. 跳跃间断点　　C. 无穷间断点　　D. 振荡间断点

解： 正确答案为 B。当 $x\to +0$，$\dfrac{1}{x}\to+\infty$；$x\to -0$，$\dfrac{1}{x}\to-\infty$。故有