线性代数

原永久　高　洁　唐春艳◆编著

XIANXINGDAISHU

吉林大学出版社
JILIN UNIVERSITY PRESS

吉林大学珠海学院立项教材

线 性 代 数

原永久 高 洁 唐春艳/编著

吉林大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/原永久编著.—长春：吉林大学出版社，
2009.1
ISBN 978-7-5601-4025-4

Ⅰ.线… Ⅱ.原… Ⅲ.线性代数—高等学校—教材
Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 200366 号

书名：线性代数
作者：原永久　高洁　唐春艳　编著

责任编辑、责任校对：曲天真　　封面设计：孙　群
吉林大学出版社出版、发行　　长春大学印刷厂　印刷
开本：787×960 毫米　1/16　　2009 年 1 月　第 1 版
印张：11.875　　字数：192 千字　　2009 年 1 月　第 1 次印刷
ISBN 978-7-5601-4025-4　　定价：22.00 元

社址：长春市明德路 421 号　邮编：130021
发行部电话：0431-88499826
网址：http://www.jlup.com.cn
E-mail：jlup@mail.jlu.edu.cn

序　言

当你开始阅读这本书时，你就成了这本书的创作者之一。你将和我们一起来审视它的意义与价值，而你的意见和体会显得犹为重要。合作已经开始了，这是我们早就期待的，因为我们相信那将是一个愉快的历程，你的热情参与会给我们留下美好的记忆。

随着综合国力的提高，我国的教育布局也开始逐步地从“宝塔式”走向“大众化”。信息时代的新方法在影响着教育的每一环节；经典的与全新的教材、教学模式，教学方法等各种教学组件都在寻找自己合适的位置。请相信，这些新形势与新思维我们都给予了足够地关注。本教材就是在这种寻觅和探索的思想指导下完成的。

取材时我们充分地考虑了你学习后续课程的需要，本教材涵盖了《线性代数》的经典内容，这也是教学大纲的要求。内容是经典的，但这决不意味着处理方法也必须是经典的。我们知道，你尚未完成初等数学到高等数学的过渡。与传统教材相比，无论是概念的引入，还是定理的证明与应用，我们都不惜花费相当的篇幅用于与你所习惯的思维方式的衔接。始终在力争做到“浅入”而“深出”。你已看到，教材是由两种字体排印的，这是分层次教学的需要。宋体排印部分自成体系，可供教学时数较少或对代数要求不高的专业使用。你可根据自己的需求或在教师的指导下决定取舍。我们特别注意了你对投考硕士研究生的渴求。本教材的深度与广度都达到了非数学专业考研大纲的要求，加之精选的习题本来就有相当数量的历届考研试题，因而把本教材用于考研资料之用也是适宜的。当你阅读其它同类教材时，愿你能体会到本教材的诸多新颖之处。

学习过程中，我们建议你对以下几点给予关注：

(1) 行列式是本教材的有力工具，在以后各章常会看到它的应用；

(2) 矩阵理论是本教材的核心内容；

(3) 秩数与向量的线性关系是难点；

(4) 最简梯矩阵是一条无形的主线，它连接着许多重要的概念与结论，同时也提供了解决相关问题的途径；

(5) 线性方程组问题和二次型理论是矩阵应用的成功范例。

注意并认真品味以上各点的含义，必会对你的学习有所补益。

《线性代数》是高等数学的一个重要分支。高等数学之“高等”，决不仅“高等”于内容上。就其思想方法而言也与初等数学有着很大的区别。顺利完成由初等数学到高等数学的过渡，同时实现由“形象思维”到“抽象思维”的转变是我们对你的期盼，这也是本教材的任务之一。除了把知识介绍给你之外，我们还希望在后续学习的能力与严谨思维方式的培养等方面对你有所帮助。学完本教材之后，即使你获得了很优异的成绩，也不要认为已完成了学业。掌握好基本理论与基本技能固然重要，触摸到问题的本质与精髓却是更加艰深的任务。我们会祝愿着你的知识有一天能升华到那种理想的境界。

毋庸置疑，考入大学意味着你已迈进了一条希望之路。但应清醒地认识到这仅仅是一个新的开始，理想的真正实现还需要你继续付出辛勤地劳动。改革，竞争，快节奏犹如大浪淘沙，谁笑到最后谁笑得最好。望你轻拂高考的征尘，依旧紧束戎装，去笑迎新的挑战。记住，机遇总是偏袒勤奋的人。

愿本教材助你成功，祝你成功，这是我们共同的心愿。

编　者

2008年1月1日于珠海观音山下

目　录

第一章 行列式

行列式这一概念最初产生于 17 世纪后半叶对线性方程组的研究，其确切定义及符号是由 Cauchy 于 1841 年给出的；其理论完善于 19 世纪．行列式作为重要的工具在数学各分支乃至自然科学及众多的工程技术领域都有着广泛地应用．本章主要介绍 n 阶行列式的定义，性质及计算方法．

§1 n 阶行列式的定义

首先考虑二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

这里每个系数都缀上了下标，是为了表达清楚讨论方便之故．将前一个方程乘以 a_{22}，后一个方程乘以 a_{12}，然后相减得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12};$$

同理可得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}.$$

显然，如果 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，则可得方程组的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

现在引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

并且称其为**二阶行列式**，由二阶行列式的定义，方程组的解可表为

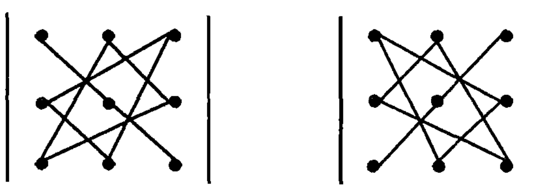
$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

类似地，通过考虑三元一次方程组，而引入三阶行列式的定义如下

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

在二，三阶行列式中，由左上角元素至右下角元素的连线称为行列式的**主对角线**；由右上角元素至左下角元素的连线称为行列式的**次对角线**. 由定义不难看出：二阶行列式恰为其主对角线两个元素之积减去次对角线两个元素之积. 而对于三阶行列式中的任意一项，若以其三个因子为顶点的三角形有一条边平行于主对角线，则该项符号为正(包括主对角线三个元素之积组成的项)；若以其三个因子为顶点的三角形有一条边平行于次对角线，则该项符号为负(包括次对角线三个元素之积组成的项). 这种方法可称之为**对角线法**. 如下图所示：



正项　　　　负项

例 1　解二元一次方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -3 \\ 3x_1 + 2x_2 = 7 \end{cases}$$

解　由于

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - (-2) \times 3 = 8 \neq 0,$$

则方程组有解. 又由于

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = (-3) \times 2 - (-2) \times 7 = 8,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 1\times 7-(-3)\times 3 = 16,$$

因此方程组的解为

$$x_1 = \frac{8}{8} = 1, \qquad x_2 = \frac{16}{8} = 2.$$

例 2　计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

解

$$\begin{aligned} D &= 1\times 0\times 2+2\times 1\times 1+3\times(-1)\times 3-3\times 0\times 1 \\ &\quad -2\times(-1)\times 2-1\times 1\times 3 \\ &= -6. \end{aligned}$$

下面要给出 n 阶行列式的定义，为此，再考察一下二，三阶行列式．为方便，横排称为行，竖排称为**列**．在二阶行列式中，每一项都是两个既不同行又不同列的两个元素之积，且恰好包含全部 2!个这样的项．类似地，在三阶行列式中，每一项也都是三个既不同行又不同列的三个元素之积，也恰好包含全部 3!个这样的项．

一般地，n 阶行列式记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

它是由 n^2 个数 a_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,n)$排成的并在两侧框以竖线的正方形数表，记为 D．类似于二，三阶行列式，其横排自上而下依次称为**第一行，第二行，…，第 n 行**；其竖排由左至右依次称为**第一列，第二列，…，第 n 列**．a_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,n)$称为行列式 D 的第 i 行第 j 列**元素**．i，j 依次称为元素 a_{ij}的**行标与列标**．由二，三阶行列式的定义可以想象到，D 的展开式中的一般项也应是 n 个既不同行又不同列的 n 个元素的乘积，并且恰好包含全部 n!个这样的项．问题是如何确定每一项的符号．当 $n\geqslant 4$ 时，前面的对角线法显然已不再适用，为此先引入 n 阶排列这一概念．

由 1，2，…，n 这 n 个数码排成的有序数组称为一个 **n 阶排列**．例如 213，

15243 分别是 3 阶排列和 5 阶排列.

在一个 n 阶排列中，如果较大的数码 j 排在较小的数码 i 的前面，则称 i，j 二数码构成此 n 阶排列的一个**逆序**，记为 (j, i). 逆序的总数称为此 n 阶排列的**逆序数**. 例如 5 阶排列 15243 就有 $(5, 2)$，$(5, 4)$，$(5, 3)$，$(4, 3)$ 四个逆序；故 5 阶排列 15243 的逆序数为 4，记为 $\tau(15243)=4$. 一般地，n 阶排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数记为 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$. 计算一个 n 阶排列的逆序数时，为避免重复计算或遗漏某个逆序，最好按某种次序去进行计算. 此外，我们把逆序数为偶数的 n 阶排列称为**偶排列**；逆序数为奇数的 n 阶排列称为**奇排列**. 按此定义，上面的 213 与 15243 便分别是奇排列和偶排列.

下面给出 n **阶行列式**的定义.

定义 1

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

其中 $t=\tau(p_1p_2\cdots p_n)$，求和指对所有的 n 阶排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 求和，其值称为行列式 D 的**值**.

按此定义易知：

(1) D 是一个代数和；

(2) 和中的每一项都是取自 D 的 n 个不同的行及 n 个不同的列的 n 个元素的乘积，这样的项共 $n!$ 个，D 恰好是这 $n!$ 个项的代数和；

(3) 项 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的符号为 $(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}$，即在行标排列成自然顺序时，若列标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 为偶排列，则此项取正号，而当 $p_1p_2\cdots p_n$ 为奇排列时此项取负号.

定义中的 n 阶行列式通常简记为 $\det(a_{ij})$.

容易验证，当 $n=2$, 3 时，定义 1 也适用于前面的二，三阶行列式.

至于一阶行列式 $|a|$，按定义显然有 $|a|=a$.

在 n 阶行列式中，与二，三阶行列式一样，由左上角元素至右下角元素的连线称为行列式的**主对角线**，由右上角元素至左下角元素的连线称为行列式的次对角线.

例 3 证明

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证明　因行列式是一个代数和，故在求其值时不必考虑那些值为零的项．设 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$是行列式中不为零的项，这些因子从左至右依次取自 n 个不同的行．因 $a_{12},\cdots,a_{1n}$全为零，故此项取自第一行的因子只能是 a_{11}，否则此项必为零．即 $a_{1p_1}=a_{11}$．再看取自第二行的因子 a_{2p_2}，显然不能是 a_{21}，因为 a_{21}与 a_{11}在同一个列；可是又因为 a_{23}，$\cdots$，a_{2n}全为零，故 a_{2p_2}只能是 a_{22}，否则此项必为零．如此下去即知，除 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$外，所有的项全为零．而此项的符号显然为正，因此 $D_n=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$．证毕．

上面这种类型的行列式称为**下三角形行列式**．类似地，称下面这种类型的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为**上三角形行列式**．同理可证其值也为 $a_{11}a_{12}\cdots a_{nn}$．下三角形行列式与上三角形行列式可统称为**三角形行列式**．它们的值都等于主对角线上的 n 个元素之积．三角形行列式的特例是所谓**对角形行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其值自然也等于主对角线上的 n 个元素之积．

作　　业

1．已知 *abcdef* 为标准次序，求 *bcadfe* 的逆序数．

2．写出四阶行列式

$$D_4=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中同时包含 a_{12}和 a_{31}的项.

3. 计算下列三阶行列式

$$(1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix},\qquad (2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

习　　题

1. 已知 n 阶排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数为 s，求 n 阶排列 $p_np_{n-1}\cdots p_2p_1$ 的逆序数.

2. 设 $a_{1i}a_{23}a_{35}a_{44}a_{5j}$是 5 阶行列式 D_5 中带有正号的项，求 i,j 的值.

3. 证明 n 阶行列式 $D_n(n>1)$中符号为正的项的个数与符号为负的项的个数相等，均为$\frac{n!}{2}$个.

4. 证明：

$$\begin{vmatrix} 0 & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & * \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} * & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n.$$

§2　行列式的性质

为了有效地计算一给定行列式的值，本节要讨论行列式的性质.

引理　互换 n 阶排列任意二数码的位置，则排列的奇偶性变更.

证明　设所考虑的排列为 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$，其中 $i<j$. 先看 p_i 与 p_j 相邻，即 $j=i+1$ 的情形. 此时原排列为 $p_1\cdots p_ip_j\cdots p_n$，新排列为 $p_1\cdots p_jp_i\cdots p_n$. 因 p_i 与 p_j

在两个排列中与其它数码的相对位置完全相同，故当 $p_i<p_j$ 时，排列 $p_1\cdots p_jp_i\cdots p_n$ 比排列 $p_1\cdots p_ip_j\cdots p_n$ 的逆序数多 1；而当 $p_i>p_j$ 时，排列 $p_1\cdots p_jp_i\cdots p_n$ 比排列 $p_1\cdots p_ip_j\cdots p_n$ 的逆序数少 1. 总之二者的奇偶性不同.

再看一般情形. 互换 p_i 与 p_j 二数码的位置可通过一系列互换相邻二数码来实现. 先将 p_i 依次与后面的 p_{i+1}，$\cdots$，p_j 互换，然后再将 p_j 与前面的 p_{j-1}，$\cdots$，p_{i+1}互换便可完成 p_i 与 p_j 二数码的互换. 显然期间共进行了$(j-i)+(j-i-1)=2(j-i)-1$ 次相邻二数码的互换. 由前面所证，排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 变成$p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$，其奇偶性发生了奇数次变更，因此二者的奇偶性必不相同.

设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix},\qquad D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix},$$

称 D' 为 D 的**转置行列式**.

性质 1　$D'=D$.

证明　显然元素 a_{ij}在 D' 中的行标是其第二个下标 j，而列标是其第一个下标 i. 因此由行列式的定义知 D' 的一般项为

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}.$$

现在设做 t 次因子的互换，可使其列标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 成自然顺序 $12\cdots n$，同时其行标排列 $12\cdots n$ 变成一新排列 $q_1q_2\cdots q_n$. 这表明 $p_1p_2\cdots p_n$ 经 $2t$ 次二数码的互换可变成排列 $q_1q_2\cdots q_n$，由引理两个排列的奇偶性相同，即知

$$(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}=(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)},$$

又由于乘积 $a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$调整因子顺序后成为 $a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}$. 因此

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}=(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}$$

其右边显然是 D 的一般项，故必有 $D'=D$.

由性质 1 可知，若某命题对于行列式的行成立，则对于列也同样成立，反之亦然.

性质 2　互换行列式的某两行(或列)，行列式仅变符号.

证明　设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D_1 是 D 经 i,j 两行互换而得的行列式. 于 D 中任取一项

$$a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n},$$

其符号由排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的奇偶性确定. 互换因子 a_{ip_i} 与 a_{jp_j} 的位置得 $a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}$，则其显然是 D_1 中的项，并且行标排列仍为自然顺序，因之其符号由排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的奇偶性确定. 但由引理，排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 与 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 排列的奇偶性正好相反，这表明将 D 的 $n!$ 个项都变号就成了 D_1 的 $n!$ 个项，因此 $D_1=-D$.

推论 1 行列式若有两行(或列)相同，则其值为零.

证明 设性质 2 证明中 D 的 i, j 两行相同. 则由 $D=D_1=-D$，$2D=0$，即知.

性质 3 行列式的某行(或列)的各元素乘以数 k 等于用数 k 乘以行列式.

证明 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

往证 $D_1=kD$. 而这由行列式的定义直接便可得到：

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_n)} a_{1p_1}\cdots ka_{ip_i}\cdots a_{np_n} \\ &= k\sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_n)} a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n} \\ &= kD. \end{aligned}$$

推论 2 行列式的某行(或列)各元素的公因子可以提到行列式符号外面相

乘.

推论 3 若行列式的某两行(或列)的对应元素成比例，则行列式的值等于零.

此由推论 2 与推论 1 即知.

性质 4 设

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \cdots & \alpha_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{i1} & \beta_{i2} & \cdots & \beta_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1}+\beta_{i1} & \alpha_{i2}+\beta_{i2} & \cdots & \alpha_{in}+\beta_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 $D = D_1 + D_2$. 这里，三个行列式除第 i 行外的元素完全相同. 对于列也有相应的结论.

证明

$$\begin{aligned} D &= \sum (-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_n)} a_{1p_1}\cdots(a_{ip_i}+\beta_{ip_i})\cdots a_{np_n} \\ &= \sum (-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_n)} a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n} \\ &\quad + \sum (-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_n)} a_{1p_1}\cdots \beta_{ip_i}\cdots a_{np_n} \\ &= D_1 + D_2 \end{aligned}$$

性质 5 行列式的某行(或列)的各元素乘以数 k 加到另一行(或列)的对应元素上，行列式的值不变.

此由性质 4 与推论 3 即知.

一般情况下，行列式的定义不适用于计算行列式. 因为它的展开式太复杂，即使是四阶行列式也含有 4! = 24 项，并且每一项都有个确定符号的问题. 利用行列式的性质把给定的行列式化成三角形行列式，再利用三角形行列式之值等于主对角线元素之积是计算行列式的常用方法.

为行文简便计，引入记号：

$r_i \leftrightarrow r_j$($c_i \leftrightarrow c_j$)表示互换行列式的 i，j 两行(两列)；

$r_i + kr_j(c_i + kc_j)$表示把行列式的第 j 行(列)各元素的 k 倍加到第 i 行(列)的对应元素上;

$r_i \to k(c_i \to k)$表示把行列式第 i 行(列)各元素的公因子 k 提到行列式符号外面相乘.

例 1 计算下列行列式.

(1) $D = \begin{vmatrix} 101 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 303 & 300 & 600 \end{vmatrix}$; (2) $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

(3) $D = \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^3 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^3 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^3 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^3 \end{vmatrix}$;

(4) $D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$.

解 (1)

$$D = \begin{vmatrix} 101 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 303 & 300 & 600 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 - c_2, c_3 - 2c_2} \begin{vmatrix} 1 & 100 & 4 \\ -1 & 200 & -5 \\ 3 & 300 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2 \to 100} 100\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 + r_1, r_3 - 3r_1} 100\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -12 \end{vmatrix}$$

$$= 100 \cdot 1 \cdot 3 \cdot (-12) = -3600.$$

(2)

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$