高职高专教材

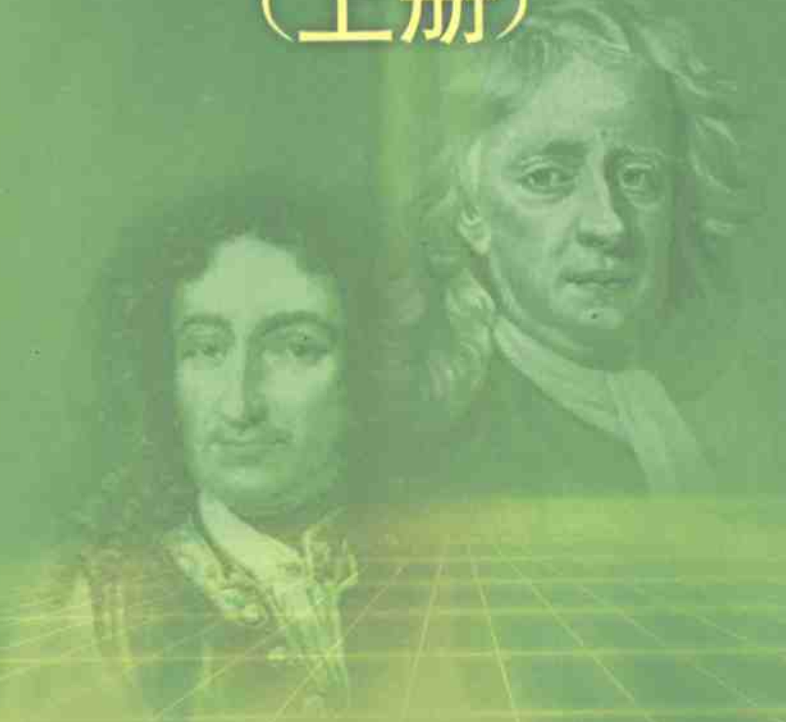
GAODENG SHUXUE

高等数学

（修订本）

侯谦民 董汉芬 主编

（上册）



湖北科学技术出版社
HUBEI SCIENCE&TECHNOLOGY PRESS

高等数学

（上册·修订本）

顾　问　黄木生　杨敬华

主　编　侯谦民　董汉芬

副主编　贺彰雄　许宏刚　常荆燕

湖北科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/侯谦民等主编. —2 版. —武汉：湖北科学技术出版社，2006. 8(2006. 10 重印)

ISBN 7—5352—3417—8

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 侯…　Ⅲ. 高等数学—高等学校：技术学校—教材　Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 085981 号

高等数学(上・修订本)　　© 侯谦民　董汉芬　主编

责任编辑：高诚毅　宋志阳　　封面设计：喻　杨

出版发行：湖北科学技术出版社　　电话：87679468

地　　址：武汉市雄楚大街 268 号湖北出版文化城 B 座 12-13 层　　邮编：430070

印　　刷：武汉中科兴业印务有限公司　　邮编：430071

787 毫米×1092 毫米　16 开　12.75 印张　300 千字

2005 年 8 月第 1 版　2006 年 8 月第 2 版　2006 年 10 月第 4 次印刷

ISBN 7—5352—3417—8/O・52　　定价：22.00 元

内 容 简 介

这套教材分上、下两册，本书为上册，内容包括函数、极限与连续，一元函数微分学，一元函数积分学，导数的应用(包括在经济方面的应用)，定积分的应用(包括在经济方面的应用)以及常微分方程等六章。下册内容有矢量代数与空解析几何简介、多元函数的微分学、积分学及应用，级数(包括 Fourier 级数)，拉普拉斯变换以及线性代数初步等六章。每一节后附有 A、B 两套习题，附录里有习题答案供参考选用。同时上册附录里还介绍了数学建模等内容，下册附录里介绍了本书中出现的数学家以及古今中外著名数学家的生平等。

本教材可作为高职高专以及同类学校各专业使用，也可作为文科经济类有关专业使用。

前 言

随着高职高专教育的蓬勃发展，高职高专教材建设也随之得到迅速发展。近年来社会上出现了许多高职高专教材，然而要真正写好一本反映高职教育特点、符合高职学生实际的教材仍在实践与探索之中。根据高职教育特点和培养目标——应用型人才，基础知识"够用、会用"以及"重实际、轻理论"的原则和思想，并注意到高职教育学制改革的发展趋势，在湖北省高职高专教育管理专业委员会的有关领导和有关院校的大力支持下，我们决定编写这本《高等数学》教材。该教材主要针对高职院校工科类各专业而编写，但同时也兼顾到文科经济类专业的使用，书中用打 * 号部分介绍了一些常用的经济函数、边际、弹性及其分析以及导数与定积分在经济中的应用等内容。因此，该书也可作为高职高专经济类有关专业的使用教材。

此教材紧跟高职高专培养目标，以"够用、会用"为原则，内容精选；重实际、轻理论，例题习题较多，对"难"、"繁"和理论性强的内容只作介绍，不作严格分析与深入讨论。考虑到基础较好的学生需求，用打 * 号或小写字体排列了部分内容，在习题中编排了 A、B 两类，供选用。

为了提高学生的学习兴趣和培养学生解决实际问题的应用能力，在附录中还介绍了数学建模的内容。

本教材是作者根据多年教学实践，并参考其他一些优秀教材，以教学经验和体会编写而成。教材说理浅显、叙述详细，例、习题丰富，便于教、利于学。

本教材由黄木生、杨敬华任顾问；侯谦民、董汉芬主编；祝贵清主审；贺彰雄、许宏刚、常荆燕任副主编。上册第一章由贺彰雄编写；第二章由许宏刚编写；第三章由董汉芬编写；第四、五、六章及附录由侯谦民编写，全书由侯谦民统稿定稿。

由于我们水平有限，加之时间仓促，不足之处在所难免，恳请读者提出宝贵意见，以便再版时加以改进。

编者

2005 年 6 月

修订说明

本套教材上下两册经过一轮使用，征求了许多同行的意见，结合实际我们对教材作了一些适当修订，删繁就简，将第一版中打 * 号或小写字体部分作了删减或修改，使教材更加突出“重实际、轻理论”及“够用”的原则，进一步体现高职教育特点。

这次修订得到了湖北省高职高专教育管理专业委员会及其领导和有关兄弟院校的大力支持。由于我们水平局限，一次修订难免还有不足，我们愿意在此基础之上，通过实践今后再次作出修订。

参加修订的有侯谦民、董汉芬、贺彰雄、许宏刚、常荆燕等。

编者

2006 年 8 月

目　录

第一章　函数、极限与连续

在自然界、人类社会和人们的思维领域，运动与变化无处不在，因而刻画这种运动与变化的量与量之间的依赖关系也就无处不在，科学技术作为一种重要的变量因子，对生产力的发展起着重大的推动作用，更深刻地影响着人类历史的发展进程.

早在文艺复兴末期的16世纪，社会处于封建社会瓦解、资本主义兴起的大变动时期，那时的力学、天文学等自然科学为适应实践的需要，把运动作为研究的主题，对各种变化过程和过程中的量与量之间的依赖关系的研究，产生了函数这一概念. 函数就是从量的角度对运动变化这一永恒真理的抽象描述，是刻画运动变化中变量相依关系的抽象数学模型. 这一模型的建立并不是某个数学家或科学家一朝一夕完成的，而是经由伽利略(Galileo，意，1564～1642)、笛卡儿(Descartes，法，1596～1650)、牛顿(Newton，英，1642～1727)、莱布尼兹(Leibniz，德，1646～1716)、欧拉(Euler，瑞士，1707～1783)、狄利克雷(Dirichlet，德，1805～1859)等许多科学家和数学家的思索、提炼，才形成今日一般人所理解的函数模型. 随着人们认识的深化，函数这一模型也不断地得到改进和拓展.

笛卡儿创立坐标几何后，使变量和函数概念进入数学，从而改变了数学发展的历史进程，使得数学从常量数学转入到变量数学，即微积分.

《高等数学》这门课程的主要内容是微积分，微积分的研究对象是函数(特别是连续函数)，而研究的工具是极限. 因此，本章将介绍函数、初等函数、极限以及连续函数等概念和性质.

第一节　函　　数

一、常用数集

在讨论函数之前，我们先回顾一下在中学已经掌握的常用数集有：自然数集 **N**，整数集 **Z**，有理数集 **Q** 以及实数集 **R**. 除此之外，还有一些被称之为区间的特殊集合.

设 $a,b\in\mathbf{R}$，$a<b$，则数集

$\{x|a<x<b\}$称为开区间，记作(a,b)，即$(a,b)=\{x|a<x<b\}$；

$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$称为闭区间，记作$[a,b]$，即$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$；

$\{x|a<x\leqslant b\}$称为左半开区间，记作$(a,b]$，即$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$；

$\{x|a\leqslant x<b\}$称为右半开区间，记作$[a,b)$，即$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$；

集合$\{x|x\in\mathbf{R}\}=(-\infty,+\infty)$、$\{x|x>a\}=(a,+\infty)$、$\{x|x\geqslant a\}=[a,+\infty)$、$\{x|x<b\}=(-\infty,b)$以及$\{x|x\leqslant b\}=(-\infty,b]$均称为无穷区间.

在研究函数时，常常需要讨论函数在一点附近的性态，下面给出点的邻域概念.

定义 1　设 $a,\delta\in\mathbf{R}$，$\delta>0$，数集$\{x\in\mathbf{R}\,|\,|x-a|<\delta\}$，即实数轴上和点 a 的距离小于 δ 的点的全体，称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，点 a 与数 δ 分别称为这邻域的中心与半径，如图 1-1(a). 若数集是$\{x\in\mathbf{R}\,|\,0<|x-a|<\delta\}$，称之为点 a 的去心邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，如图 1-1(b).

图 1-1

显然 $U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)$，$\mathring{U}(a,b)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$.

二、函数的概念

定义 2 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个数集，对任意 $x\in D$，按照某一对应法则 f 有唯一确定的实数 y 与之对应，记作 $y=f(x)$，则称 f 是定义在 D 上的函数. x 称为自变量，y 称为因变量. D 称为函数 f 的定义域，数集 $\{f(x)\mid x\in D\}$ 称为函数 f 的值域.

由于常常通过函数值讨论函数，因此习惯上把自变量为 x，因变量为 y 的函数 f，称为 y 是 x 的函数.

分析函数定义可知：函数定义中最基本的要素是定义域与对应法则. 这两个要素是区分不同函数，认识各种不同函数的依据.

例 1 数学式

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0;\end{cases}$$

表明变量 y 是 x 的函数，它的图象如图 1-2.

例 2 数学式

$$y=f(x)=\begin{cases}-x+1, & 0<x<1,\\ 0, & x=0,\\ -x-1, & -1\leqslant x<0;\end{cases}$$

也表明变量 y 是 x 的函数，它的图象如图 1-3.

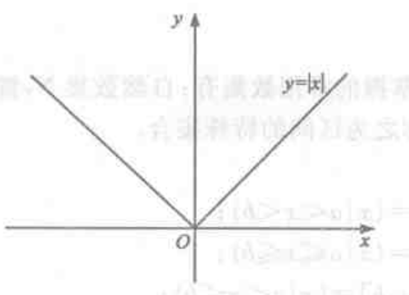


图 1-2

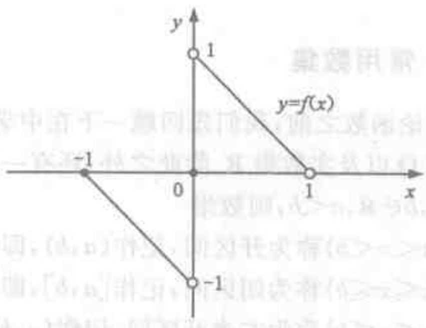


图 1-3

例 3 函数

$$f(x)=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & 当\ x>0,\\ 0, & 当\ x=0,\\ -1, & 当\ x<0;\end{cases}$$

称为符号函数，它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=\{-1,0,1\}$. 它的图形如图 1-4.

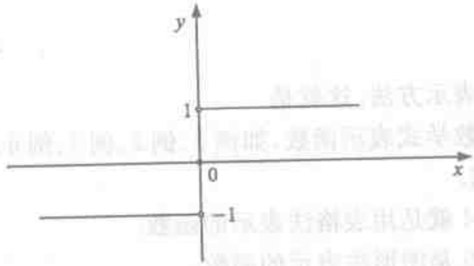


图 1-4

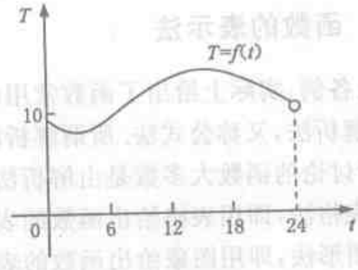


图 1-5

例 1、例 2 和例 3 给出了以后我们常常要讨论的分段函数. 所谓分段函数是指：一个函数用几个式子表示，自变量在不同的变化范围内，对应法则用不同式子来表示的函数.

例 4　某商场 2002 年第一季度各月毛线的零售量(kg)如下表：

月份 t	1	2	3
零售量 s	84.1	95.3	64.5

它表示该商场 2002 年第一季度月零售量 s 与月份 t 之间的函数关系.

例 5　北京某日的气温 T 和时间 t 是两个变量，由气温自动记录仪描得一条曲线（如图 1-5)，这个图形表示了气温 T 和时间 t（从 0 时开始）之间的函数关系，记录的时间范围是 $[0,24)$ (h).

例 6　求函数 $y=\sqrt{2x-1}$ 的定义域.

解　要使函数有意义，则 $2x-1\geqslant 0$，所以此函数定义域为：$\{x\in\mathbf{R}\mid x\geqslant\frac{1}{2}\}$.

例 7　设 p 是某商品价格，Q 是销售量，它们的关系是 $Q=\frac{1}{2p+1}$，试求此函数的定义域.

解　由实际意义，价格 $p\geqslant 0$，要分式有意义 $2p+1\neq 0$，因此此函数定义域必须满足

$$\begin{cases} p\geqslant 0, \\ 2p+1\neq 0; \end{cases}$$

所以此函数的定义域为：$\{p\in\mathbf{R}\mid p\geqslant 0\}$.

由例 6 与例 7 可知，函数的定义域，是使函数有意义的自变量的取值范围.

例 8　下列函数是否相同

(1) $y=f(x)=1$ 与 $y=g(x)=\frac{x}{x}$

(2) $y=f(x)=\frac{x}{x}$ 与 $y=\frac{|x|}{x}$

解　(1)　因为 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$g(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 因为两个函数定义域不同，所以它们是不同的函数.

(2)　$f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域都是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 任取 x_0 属于此定义域，且 $x_0<0$ 时，$f(x_0)=\frac{x_0}{x_0}=1$ 而 $g(x_0)=\frac{|x_0|}{x_0}=\frac{-x_0}{x_0}=-1$，即 $f(x)$ 与 $g(x)$ 对应法则不同，所以它们是不同的函数.

三、函数的表示法

以上各例,实际上给出了函数常用的三种表示方法.这就是

(1)解析法,又称公式法.所谓解析法是用数学式表示函数,如例1、例2、例3、例6、例7、例8,本书所讨论的函数大多数是由解析法表示的.

(2)表格法,即用表格给出函数的表示.例4就是用表格法表示的函数.

(3)图形法,即用图象给出函数的表示.例5是图形法表示的函数.

在函数解析法中,函数的解析式往往用三种不同形式给出.这就是:

若函数以 $y=f(x)$ 的公式给出,很明显地表明 x 是自变量,y 是因变量,称此函数为显函数.如:$y=3x+1$;$y=e^{x^2}+7$ 等等.

若函数以方程 $F(x,y)=0$ 给出,不明显表示 x 与 y 谁是自变量,谁是因变量,称此函数为隐函数.如:$x^2+y^2=1$,$x^2-y^2=1$ 等等.

若函数关系中的两个变量 x 与 y 用第三变量给出,即

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t);\end{cases}\quad (t\in T)$$

称此方程为函数的参数方程,也称为参数式函数.如椭圆的参数方程或参数式函数为

$$\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t;\end{cases}\quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

四、函数的几种特性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D.

1.有界性

设数集 $X\subset D$,若存在正数 M,使得对任意 $x\in X$,相应的函数值满足

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称 $f(x)$ 在 X 上有界,如果不存在这样的正数 M,则称 $f(x)$ 在 X 上无界.

在分析某函数是否有界时,一定要指明在什么区间上有界或无界.例如,函数 $y=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内是无界的,但它在 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 上是有界的.

2.单调性

设区间 $I\subset D$,若对任意 $x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的;若对任意 $x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$,恒有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的.

在区间 I 上单调增加或单调减少的函数,统称为区间 I 上的单调函数.称某函数为单调函数时,一定要指明在何区间上单调.例如,函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是非单调函数,而在 $[0,+\infty)$ 上为单调增函数;在 $(-\infty,0]$ 上为单调减函数.

3.奇偶性

设 D 关于原点对称,若对任意 $x\in D$,都有 $f(-x)=-f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为奇函数;若对任意 $x\in D$,都有 $f(-x)=f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为偶函数.

奇函数的图形关于原点中心对称;偶函数的图形关于 y 轴对称.

4. 周期性

若存在一个不为零的常数 T，对任意 $x\in D$，有 $x\pm T\in D$，且

$$f(x+T)=f(x)$$

则称函数 $f(x)$ 为周期函数，T 为 $f(x)$ 的周期. 当周期函数存在最小正周期时，通常所说的周期是指最小正周期.

例 9 讨论函数

$$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

的特性.

解 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

(1)任意 $x\in\mathbf{R}$，$|f(x)|=\left|\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right|\leqslant\left|\frac{e^x+e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right|=1$；

(2)任意 $x\in\mathbf{R}$，$f(-x)=\frac{e^{-x}-e^x}{e^{-x}+e^x}=-f(x)$；

(3)任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，$x_1<x_2$，则

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{e^{x_2}-e^{-x_2}}{e^{x_2}+e^{-x_2}}-\frac{e^{x_1}-e^{-x_1}}{e^{x_1}+e^{-x_1}}=\frac{2(e^{x_2-x_1}-e^{x_1-x_2})}{(e^{x_2}+e^{-x_2})(e^{x_1}+e^{-x_1})}>0,$$

所以函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是有界的，单调增加的奇函数，但 $f(x)$ 不是周期函数.

五、初等函数

1. 反函数

定义 3 设 $y=f(x)$ 是定义在 D 上的一个函数，值域为 Z. 如果对每一个 $y\in Z$，有一个确定的且满足 $y=f(x)$ 的 $x\in D$ 与之对应，其对应法则记作 f^{-1}，这个定义在 Z 上的函数 $x=f^{-1}(y)$ 称为 $y=f(x)$ 的反函数，或称它们互为反函数.

习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示因变量. 将 $x=f^{-1}(y)$ 改写为以 x 为自变量，以 y 为因变量的函数为 $y=f^{-1}(x)$. 称 $y=f^{-1}(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，称 $y=f(x)$ 为直接函数. 他们的定义域与值域互换.

互为反函数的两个函数 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的几何图形关于直线 $y=x$ 对称，如图 1-6.

例 10 求 $y=e^x+1$ 的反函数

解 $y=e^x+1$ 的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，其值域为 $(1,+\infty)$，解出 x

$$x=\ln(y-1)$$

即得反函数 $y=\ln(x-1)$，其定义域 D 为 $(1,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$.

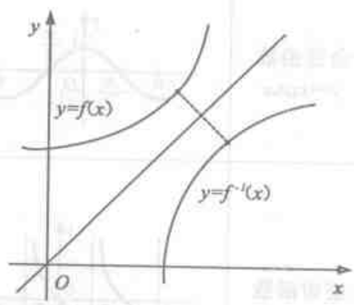


图 1-6

2. 基本初等函数

下面五类函数都称为基本初等函数：

幂函数 $y=x^{\mu}$ （μ 是常数）；

指数函数 $y=a^x$ （a 是常数，$a>0,a\neq1$）；

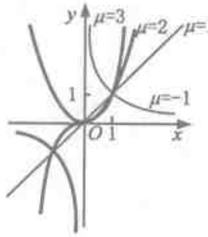
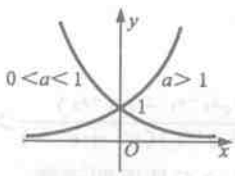
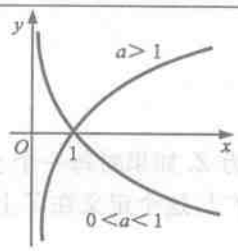
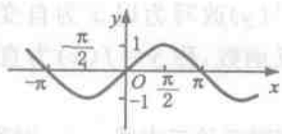
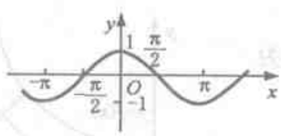
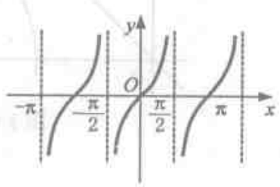
对数函数 $y=\log_a x$ （a 是常数，$a>0,a\neq1$）；

三角函数　　$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$；

反三角函数　　$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\text{arccot}\, x$ 等.

这些函数在中学已讲过，这里不再重复了.

下面我们把基本初等函数的图形及有关性质用表列出来，供读者查用.

函数	图　形	定义域	值域	主要性质
幂函数 $y=x^{\mu}$（μ 是常数）		随 μ 不同而不同，但不论 μ 取什么值，x^{μ} 在 $(0,+\infty)$ 内总有定义.	随 μ 不同而不同.	若 $\mu>0$，x^{μ} 在 $[0,+\infty)$ 内单调增加. 若 $\mu<0$，x^{μ} 在 $(0,+\infty)$ 内单调减少.
指数函数 $y=a^{x}$（a 是常数，$a>0, a\neq 1$）		$(-\infty,+\infty)$	$(0,+\infty)$	$a^0=1$. 若 $a>1$，a^x 单调增加； 若 $0<a<1$，a^x 单调减少. 直线 $y=0$ 为函数图形的水平渐近线.
对数函数 $y=\log_a x$（a 是常数，$a>0, a\neq 1$）		$(0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$\log_a 1=0$. 若 $a>1$，$\log_a x$ 单调增加； 若 $0<a<1$，$\log_a x$ 单调减少. 直线 $x=0$ 为函数图形的铅直渐近线.
正弦函数 $y=\sin x$		$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$	以 2π 为周期的周期函数. 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加. 奇函数.
余弦函数 $y=\cos x$		$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$	以 2π 为周期的周期函数. 在 $[0,\pi]$ 上单调减少. 偶函数.
正切函数 $y=\tan x$		$(2n-1)\frac{\pi}{2}<x<(2n+1)\frac{\pi}{2}$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$	$(-\infty,+\infty)$	以 π 为周期的周期函数. 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加. 奇函数. 直线 $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ 为函数图形的铅直渐近线 $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.