XUEHAIDAOHANG

高二数学 下B

丛书主编　李瑞坤

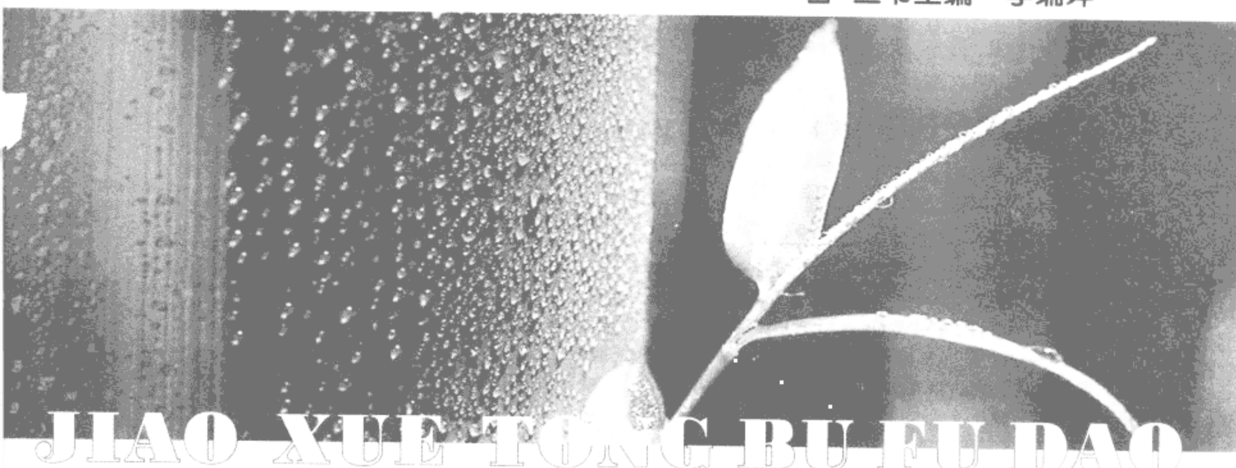
学海导航

高中教学同步辅导

学生用书

首都师范大学出版社

丛书主编 李瑞坤



JIAO XUE TONG BU FU DAO

高中教学同步辅导

高二数学（下B） 学生用书

本册主编 易兰桂

副 主 编 晏建良 张正清

编　　委 符立军 张曙光

本书策划 江小青

首都师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中教学同步辅导·高二数学 / 易兰桂主编.
—北京:首都师范大学出版社,2008.9
(学海导航 / 李瑞坤主编)
ISBN 978-7-81119-212-4

Ⅰ.高… Ⅱ.易… Ⅲ.数学课－高中－教学参考资料
Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 151356 号

学海导航·高中教学同步辅导
高二数学(下 B)·学生用书
丛书主编 李瑞坤
本册主编 易兰桂

责任编辑 张雕冰 责任设计 张鹊红
责任校对 江小青

首都师范大学出版社出版发行
地 址 北京西三环北路 105 号
邮 编 100037
电 话 68418523(总编室) 68982468(发行部)
网 址 cnuph.com.cn
E-mail master@cnuph.com.cn
湘潭市风帆印务有限公司印刷
全国新华书店发行

版 次 2008 年 9 月第 1 版
印 次 2008 年 9 月第 1 次印刷
开 本 880×1230 毫米 1/16
印 张 11.5
字 数 386 千
定 价 29.90 元

前言

PREFACE

《学海导航·高中教学同步辅导·高二数学》本着一切为了教师的"教"和学生的"学",最大限度地发挥教材和课堂的功能,努力融入新课标理念,力争在教师的指导下,充分发挥学生学习的主动性,使学生有效地理解并掌握数学知识,培养学科能力,提高数学素质,实现知识与能力同步发展,技能与素质同步形成的目标。

本书分章按课时编写,与现行高二教材完全同步,每课时围绕一个中心,突出一个重点,解决与中心相关的几个重点问题,形成一个小单元知识、技能网络。每课时由[学习目标]、[基础导引]、[典型范例]、[知识整合]、[课时练习]、[能力提升]六个栏目构成。

[学习目标] 依据教学大纲,遵循考试大纲,渗透新课标理念,列出学习的主干知识,提高数学知识、数学方法和思想的教学目标和能力培养要求。

[基础导引] 根据课时的主干知识,精心设计几个有启发作用的问题或数学试验,激发学生的学习兴趣,引导学生进入课时学习情境。

[典型范例] 是课堂教学的主体、重点,编者精心设计供教师"导"和学生"学"的有针对性的范例材料,通过导、学、练、互动小结等环节,分层实施,从而达到理解、掌握知识的目的,同时起到分层教学、启发思维、激活数学潜能的效果,将学生的知识、技能、数学思想融为一体,进一步培养学生数学素质。

[知识整合] 将本课时主干知识及解题方法、技巧、规律和数学思想进行归纳和总结,构成一个小单元知识、技能体系。

[课时练习] 选题典型,题量适中,难易适度。是为了巩固和提升本课时的单元知识内容而精心设计的,作为学生课后练习和检测使用,同时便于教师及时批阅,把握学习动态。

[能力提升] 以少量精典试题为载体,为了呈现"能力立意"的高考命题思想,培养学生的思维能力而设计,试题具有一定的综合性和创新性。

本书分为教师用书和学生用书。由名校的一线老师精心编写。在编写过程中,力图把本书编成一本既便于教师的"教",又利于学生的"学"的同步辅导用书,但二者达到有机统一并非易事,虽全体编写人员反复研讨,仔细推敲,层层把关,几易其稿,但限于能力和水平,书中难免有疏漏之处,敬请广大读者批评指正。

编　者

目录

CONTENTS

第九章　直线、平面、简单几何体

第1课　平面的基本性质(一)

学习目标

了解平面的概念，掌握平面的表示法，能够画出水平放置的平面的直观图；掌握平面的基本性质及其作用；会用文字语言、图形语言、符号语言表示点、线、面的位置关系.

基础导引

1. 下列命题：

①书桌面是平面，平静的湖面是一个平面；

②8个平面重叠起来，要比6个平面重叠起来厚；

③有一个平面的长是50 m，宽是20 m；

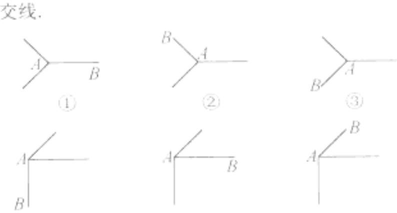
④平面是绝对的平，无厚度，可无限延展的抽象的数学概念.

其中正确的命题个数是　（　　）

A. 1个　　B. 2个

C. 3个　　D. 4个

2. 按照给出的要求，完成下面两个相交平面的作图，如下图①、②、③、④、⑤、⑥中的直线AB，分别是两个平面的交线.



①　②　③　④　⑤　⑥

3. 如何用符号语言表示下列文字语言？

(1)点P在直线l上$\frac{记作}{读作}$____________；

(2)点P在直线l外$\frac{记作}{读作}$____________；

(3)点P在平面α内$\frac{记作}{读作}$____________；

(4)点P在平面α外$\frac{记作}{读作}$____________；

(5)直线l在平面α内$\frac{记作}{读作}$____________；

(6)直线l在平面α外$\frac{记作}{读作}$____________；

(7)平面α和β相交，交线是l $\frac{记作}{读作}$____________；

(8)直线a和b相交于点P $\frac{记作}{读作}$____________.

4. (1)两个平面相交，交线是____________且所有公共点都在____________上，交线上的每一点都是两平面的____________.

(2)画两平面相交时必须画出它们的____________.

互动小结：

1°概念

平面和点、直线一样是构成空间图形的基本元素之一，是一个只描述而不定义的原始概念，其特征：平整的；无限延展的；无厚薄、大小之分，可借助直线的概念来理解和掌握平面的概念.

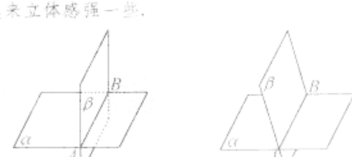
2°画法：

(1)通常画成____________(如图a)；

(a)

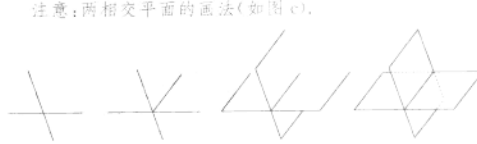
(2)水平放置的平面：当平面是水平放置的时候，通常把平行四边形的锐角画成____________，横边画成邻边的____________倍长；

(3)两相交平面：当一个平面的一部分被另一个平面遮住时，应把被遮部分的线段____________(如图b)，这样，看起来立体感强一些.



(b)

注意：两相交平面的画法(如图c).



(c)

3°表示法：

平面通常用________α、β、γ、δ等来表示，如平面α、平面β、平面γ等，也可以用表示平行四边形的________________来表示，如平面AC(如图a).

典型范例

【例1】分别根据题中的条件画出图形：

(1)直线AB在平面α内；

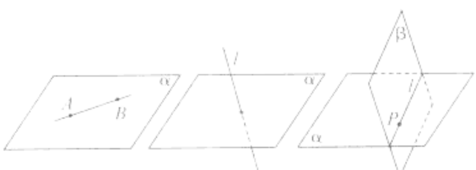
(2)直线l与平面α有且只有一个公共点；

(3)平面α与平面β有一个公共点P，并且平面α与平面β的交线为l.

解：(1)直线AB在平面α内，如图(a)所示；

(2)直线l与平面α有且只有一个公共点，如图(b)所示；

(3)平面α与平面β有一个公共点P，并且平面α与平面β的交线为l，如图(c)所示.



(a)　　(b)　　(c)

【例2】已知$\triangle ABC$在平面α外，$AB\cap\alpha=P$，$AC\cap\alpha=R$，$BC\cap\alpha=Q$，如图所示.求证：P、Q、R三点共线.

证明：因为$AB\cap\alpha=P$，所以$P\in AB$，$P\in$平面α.

又$AB\subset$平面ABC，所以$P\in$平面ABC.

由公理2可知：点P在平面ABC与平面α的交线上.

同理可证Q、R也在平面ABC与平面α的交线上.

所以P、Q、R三点共线.

互动小结：

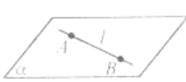
1°公理1：如果一条直线的两点在一个平面内，那么这条直线上的所有点都在这个平面内.

(1)直线与平面的位置关系：

①直线l在平面α内，或者说平面α经过直线l，记作$l\subset\alpha$；

②直线l在平面α外，记作$l\not\subset\alpha$.

(2)公理1的图示如右图：



公理1的符号表示为：

$A\in l,B\in l,A\in\alpha,B\in\alpha\Rightarrow l\subset\alpha$.

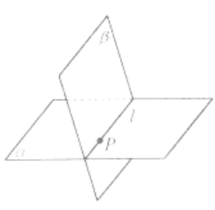
2°公理2：如果两个平面有一个公共点，那么它们还有其他公共点，这些公共点的集合是一条直线.

(1)两个平面的位置关系：

①两个平面α、β相交，记作：$\alpha\cap\beta=l$.

②两个平面不相交.

(2)公理2的图示如右图：



公理2的符号表示为：$P\in\alpha\cap\beta\Rightarrow\alpha\cap\beta=l$且$P\in l$.

3°立体几何中，证三点共线常常是先证三点同在________________，然后由公理2就可得三点共线.

知识整合

1. 平面和点、直线一样，是一个只能描述而不能定义的原始概念；公理产生于生产实践，不需证明.

2. 公理1是判断直线在平面内的依据，公理2是判断平面相交的依据.

3. "看，画，想"是学好立体几何的技巧，学习中应强调，同时，还应掌握数学语言的表达和应用，能准确地掌握数学语言和图象语言之间的转化.

课时练习

1. 下列命题中，正确的命题是　　(　　)

A. 墙面是平面

B. 平面是平滑，无厚度，可以无限延展的

C. 5个平面重叠起来，比2个平面重叠起来厚

D. 一个平面长2000米，宽1000米

2. 下列说法中正确的个数是　　(　　)

①"有且只有一个"中的"有一个"是指"最少有一个"；

②"有且只有一个"中的"只有一个"是指"最多有一个"；

③"有且只有一个"就是指"只有一个".

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

3. 下列推理中，错误的是　　(　　)

A. $A\in$直线l，$l\subset$平面$\alpha\Rightarrow A\in\alpha$

B. $A\in$平面α，$A\in$平面β，且$\alpha\cap\beta=l\Rightarrow A\in l$

C. $l\not\subset$平面α，$A\in l\Rightarrow A\notin$平面$\alpha$

D. A、B、$C\in$平面α，A、B、$C\in$平面β，且A、B、C不共线$\Rightarrow\alpha$与β重合

4. 下列说法中正确的个数是　　(　　)

①直线与平面有公共点，则直线在平面内；

②直线AB在平面α内，但直线AB不全在α内；

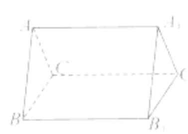
③空间图形先画的是实线，后画的是虚线；

④一个平面的面积是2平方米.

A. 3　　B. 2

C. 1　　D. 0

5. 在右图中，A______平面$A_1C_1B_1$______平面A_1C_1C______平面$B_1C_1A_1$______平面B_1C_1(填"$\in$"或"$\notin$")



6. 如图，点A、B、C确定的平面和D、E、F确定的平面相交于直线l，且AB与l相交，EF与l也相交，作出平面ABD与平面CEF的交线.

作法：

(1)连结AB交l于G，连结EF交l于H；

(2)连结DG交________于________；

(3)连结CH交________于________；

(4)连结________，此即平面ABD与平面CEF的交线.

能力提升

7. 已知 A、B、C 三点都是平面 α 与平面 β 的公共点，并且 α 和 β 是两个不同的平面，试判断 A、B、C 三点的位置关系.

8. 已知直线 $a /\!/ b$，c 与 a、b 都相交，求证：a、b、c 共面.

第 2 课　平面的基本性质(二)

学习目标

1. 理解公理 3 的三条推论，并能用图形语言、符号语言加以表述.

2. 能初步运用平面的基本性质进行判断与推理.

基础导引

1. 有人说，平板仪、照相机的支架用四个脚的话，那将会摇摆不定很难放稳，即使这四个脚是活动的，可以调节的，也比三个活动的脚难调整. 也许有人会问：为什么书桌、椅子一般都是四个脚呢？请同学们想一想.

2. 下面关于平面的说法正确的是　(　　)

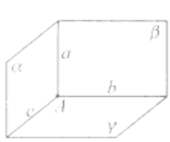
A. 三个点可以确定一个平面

B. 一条直线和一个点可以确定一个平面

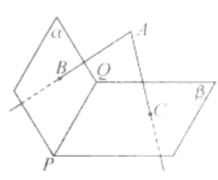
C. 三条相交的直线可以确定一个平面

D. 三条直线两两相交且不过同一点，则此三条直线共面

3. 根据图形填空：



①



②

(1) 对于图①，$\alpha \cap \beta =$ ______；$\beta \cap \gamma =$ ______；$\alpha \cap \gamma =$ ______；A ______ α，A ______ β.

(2) 对于图②，__________ $= PQ$；__________ $= B$；__________ $= C$；__________ $= A$.

互动小结：

1° 公理 3：经过 ______________ 的三点有且只有一个平面，即不共线的三点 ________ 一个平面.

2° 推论 1：经过一条直线和 __________ 一点，有且只有一个平面.

3° 推论 2：经过两条 __________ 直线有且只有一个平面.

4° 推论 3：经过两条 __________ 直线有且只有一个平面.

5° 公理 3 的三个推论用数学符号语言表述为：

推论 1：$A \notin a \Rightarrow$ 有且只有一个平面 α，使得 $A \in \alpha$，$a \subset \alpha$；

推论 2：直线 $a \cap b = P \Rightarrow$ 有且只有一个平面 α，使得 $a \subset \alpha$，$b \subset \alpha$；

推论 3：直线 $a /\!/ b \Rightarrow$ 有且只有一个平面 α，使得 $a \subset \alpha$，$b \subset \alpha$.

典型范例

【例 1】 如图，直线 AB、BC、CA 两两相交，交点分别为 A、B、C. 证明这三条直线共面.

证法 1：因为 AB、AC 相交，

所以 AB、AC 确定一个平面，设为 α.

又因为 $B \in AB$，$C \in AC$，所以 $B \in \alpha$，$C \in \alpha$，所以 $BC \subset \alpha$.

因此，AB、AC、BC 都在平面 α 内，即 AB、AC、BC 共面.

证法 2：因为 AB、AC 相交，所以 AB、AC 确定一个平面 α.

所以点 A、B、$C \in \alpha$，且三点不共线.

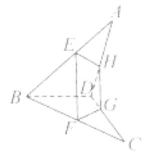
又因为 AB、BC 相交，所以 AB、BC 确定一个平面 β.

所以点 A、B、$C \in \beta$，且三点不共线.

由公理 3，平面 α 与平面 β 是同一个平面，即这三条直线共面.

【例 2】 如图，已知空间四边形 $ABCD$，平面四边形 $EFGH$ 的顶点分别在空间四边形的各边上，若 EH 与 FG 不平行，求证：三条直线 EH、FG、BD 交于一点.

证明：因为四边形 $EFGH$ 为平面四边形，EH 与 FG 不平行，



所以 EH 与 FG 相交，

设 $EH\cap FG=P$.

因为 $EH\subset$ 平面 ABD，$P\in EH$，所以 $P\in$ 平面 ABD，

同理，$FG\subset$ 平面 CBD，$P\in FG$，所以 $P\in$ 平面 CBD，

所以 $P\in$ 平面 $ABD\cap$ 平面 $CBD=BD$，

所以 BD 经过点 P.

所以三条直线 EH、FG、BD 交于一点.

互动小结：

1°欲证三线共面，可先证其中两条直线确定一个平面，再证第三条直线在这个平面内.

2°欲证三线共点，可先证其中两条直线有__________，再证该点在______________.

知识整合

共面、共线、共点问题的证明方法

(1)证明共面问题，一般是先由某些条件确定一个平面，然后证明其余已知元素在这个平面内；

(2)证明共线问题，通常是证明这些点是某两个平面的公共点，然后由公理 2 可知它们共线；

(3)证明共点问题，一般是先证明其中两直线相交，然后证明其余直线过这个交点.

课时练习

1. 下列命题中，不正确的是　(　　)

   A. 三角形是平面图形

   B. 任意四边形是平面图形

   C. 梯形是平面图形

   D. 圆是平面图形

2. 下列命题正确的是　(　　)

   A. 两条直线可以确定一个平面

   B. 一条直线和一个点可以确定一个平面

   C. 空间不同的三点可以确定一个平面

   D. 两条相交直线可以确定一个平面

3. 四条直线相交于一点，它们能确定的平面的个数为　(　　)

   A. 1　　B. 4

   C. 6　　D. 1 或 4 或 6

4. 在空间中，下列命题错误的是　(　　)

   A. 对角线相交且互相平分的四边形是平行四边形

   B. 两组对边分别平行的四边形是平行四边形

   C. 一组对边分别平行且相等的四边形是平行四边形

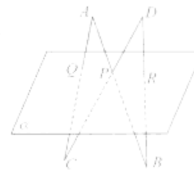
   D. 两组对边分别相等的四边形是平行四边形

5. 一条直线和这条直线外不共线的三点能确定的平面的个数为__________.

6. 直线 $a/\!/b$，在 a 上取两点，b 上取三点，由这五点能确定的平面的个数是______个.

能力提升

7. 如图，$AB\cap\alpha=P$，$CD\cap\alpha=P$，点 A、D 与点 B、C 分别在平面 α 的两侧，$AC\cap\alpha=Q$，$BD\cap\alpha=R$，求证：P、Q、R 三点共线.



8. 三个平面两两相交于三条直线，若这三条直线不平行，求证：这三条直线交于一点.

第 3 课　空间图形在平面内的表示法

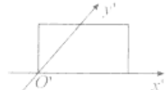
学习目标

理解空间图形的直观图的概念，掌握用斜二测画法画水平放置的平面图形的直观图及空间图形的直观图.

基础导引

1. ________________，叫做空间图形的直观图.

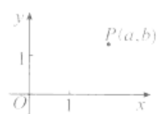
2. 如右图所示为一平面图形的直观图，则此平面的图形可能是下图中的　　（　　）



A　　　B　　　C　　　D

3. 画正三角形的直观图.

4. 如右图，图中 $P(a,b)$ 是竖直放置的平面直角坐标系 xOy 内一点，画出水平放置的坐标系 $x'O'y'$ 及点 P 的对应点 P'.



互动小结：

1°画直观图的方法常用斜二测画法. 斜二测画法的规则是：

(1)在已知图形中取水平平面，取互相垂直的轴 Ox，Oy，再取 Oz 轴，使 $\angle xOz=$________，且 $\angle yOz=$________.

(2)画直观图时，把它们画成对应的轴 $O'x'$、$O'y'$、$O'z'$，使 $\angle x'O'y'=$________(或 $135°$)，$\angle x'O'z'=$________，$x'O'y'$ 所确定的平面表示水平平面.

(3)已知图形中平行于 x 轴、y 轴或 z 轴的线段，在直观图中分别画成平行于________________的线段.

(4)已知图形中平行于 x 轴和 z 轴的线段，在直观图中________，平行于 y 轴的线段，长度为________.

2°作平面图形直观图的基本步骤：

①建系；②画轴；③作平行线段(横不变纵减半)；④连线；⑤擦去辅助线(也可保留辅助线).

3°在第 4 题中，(1) P' 与 P 在相应坐标系内的象限一致. 如果点 P 在坐标系 xOy 的坐标轴上，点 P' 也在坐标系________________.

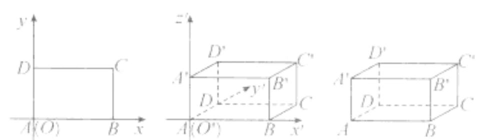
(2)确定点的位置时需利用平行于________的线段(点不在坐标轴上时)，若无过该点与坐标轴平行的线段，________________.

典型范例

【例 1】画长、宽、高分别为 4 cm、3 cm、2 cm 的长方体的直观图.

分析：几何体的直观图的画法规则与平面图形的画法相比，只是多画一个与 x 轴、y 轴都垂直的 z 轴，并且平行于 z 轴的线段的长度保持不变.

画法：



(1)在长、宽分别为 4 cm、3 cm 的矩形中选取互相垂直的轴 Ox、Oy(如图).

(2)画直观图时，把它们画成对应的轴 $O'x'$、$O'y'$，使 $\angle x'O'y'=45°$(或 $135°$)，再过 O' 作 $O'z'$ 轴，使 $\angle x'O'z'=90°$，$\angle x'O'y'$ 所确定的平面表示水平平面.

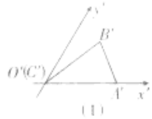
(3)已知图中平行于 x、y 轴(或者在 x、y 轴上)的线段在直观图中分别画成平行于 x'、y' 轴的线段(在轴上的仍画在相应轴上)，即在 $O'x'$ 及 $O'y'$ 轴上分别取点 B、D，以 O' 为一端点作 $O'B=4$ cm，即 $AB=4$ cm，$O'D=1.5$ cm，即 $AD=1.5$ cm，过 B 作 $BC \mathrel{\underline{\parallel}} AD$，连结 CD，所得 $ABCD$ 即 $O'BCD$，即为原矩形的直观图.

(4)在 $O'z'$ 轴上，取一点 A'，使 $AA'=2$ cm(A' 在 z' 轴的正半轴上)，再分别过 B、C、D 沿 z' 轴的正方向作 $BB'=CC'=DD'=2$ cm.

(5)连结 $A'B'$、$B'C'$、$C'D'$、$D'A'$ 即得长方体的直观图.

(6)再将所作辅助线 $O'x'$、$O'y'$、$O'z'$ 擦掉，实、虚线分明，即得所作长方体的直观图.

【例 2】如图(1)，$\triangle A'B'C'$是水平放置的平面图形的斜二测直观图，将其恢复成原图形.



(1)

解：①画直角坐标系 xOy，
在 x 轴上取 $OA=O'A'$，
即 $CA=C'A'$.

(2)

(3)

②在图(1)中，过 B' 作 $B'D'\parallel y$ 轴交 x' 轴于 D'，如图(2)，
在 x 轴上取 $OD=O'D'$，在图(3)中过 D 作 $OB\parallel y$ 轴，并使 $DB=2D'B'$.
③连结 AB、BC，则$\triangle ABC$就是$\triangle A'B'C'$的原图形，如图(3).

互动小结：

1°由直观图探求原图形的高，关键是要明确原图形与直观图________的变化关系.

2°空间图形的画法规则与平面图形的画法相比，只多画了一个与 x 轴、y 轴都垂直的 z 轴，并且平行于 z 轴的线段的________________.

知识整合

1. 画水平放置的平面图形的直观图，关键是确定直观图的顶点，确定点的位置，可采用直角坐标系；建立恰当的坐标系是迅速作出直观图的关键，常利用图形的对称性，并让顶点尽量多地落在坐标轴上或与坐标轴平行的直线上.

2. 互相垂直的 Ox、Oy 轴画成 $O'x'$、$O'y'$轴，使$\angle x'O'y'=45°$或 $135°$.

平行于 x 轴的长度不变，平行于 y 轴的长度取一半，记为"横不变，纵折半".

课时练习

1. 下列关于直观图画法的说法不正确的是　(　　)

A. 原图形中平行于 y 轴的线段，其对应线段平行于 y' 轴，长度不变

B. 原图形中平行于 x 轴的线段，其对应线段平行于 x' 轴，长度不变

C. 画与直角坐标系 xOy 对应的 $x'O'y'$ 时，$\angle x'O'y'$ 可以画为 $135°$

D. 在画直观图时，由于选轴的不同所画直观图可能不同

2. 下列结论中正确的个数是　(　　)

①角的水平放置的直观图一定是角

②相等的角在直观图中仍然相等

③相等的线段在直观图中仍然相等

④若两条线段平行，则在直观图中对应的两条线段仍然平行

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

3. 如图，已知 $A'B'\parallel O'y'$，$A'D'\parallel B'C'\parallel O'x'$，那么，直观图所示的平面图形是　(　　)

A. 任意四边形　　B. 直角梯形

C. 任意梯形　　D. 等腰梯形

4. 如图，$A'B'\parallel O'y'$，$B'C'\parallel O'x'$，那么，直观图所示的平面图形是　(　　)

A. 任意三角形

B. 锐角三角形

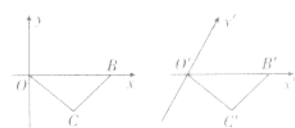
C. 直角三角形

D. 钝角三角形

5. 如图，一个水平放置的平面图形的斜二测直观图是一个底角为 $45°$，腰和上底长均为 1 的等腰梯形，则这个平面图形的面积是__________.

能力提升

6. 如图(2)是图(1)的斜二测画法的直观图，错误之处是________________.



(1)　　(2)

7. 右图$\triangle A'B'O'$为水平放置的$\triangle ABO$的直观图，其中四边形 $O'D'B'C'$为菱形，由图判断原三角形中 AB、BO、BD、DA 由小到大的顺序为______________.

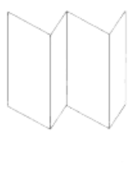
第4课　平行直线

学习目标

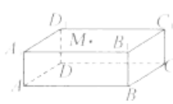
理解和掌握平行公理，理解和掌握等角定理.

基础导引

1. 如右图，把一张长方形的纸对折几次，然后打开，说明为什么这些折痕是互相平行的？



2. 如图，长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点M为平面A_1C_1上的一点，请在平面A_1C_1内过M作一直线a，满足$a\parallel BC$.



3. 判断下列命题是否正确.

(1)如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行，那么这两对相交直线所成的角相等.　(　　)

(2)如果直线a与b都和直线c成等角，则a与b的位置关系可以是相交、平行、异面.　(　　)

4. 定理：如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同，那么这两个角________.（这一定理俗称为空间内的"等角定理"）

互动小结：

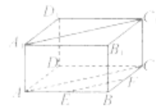
1°平行于同一条直线的两条直线________，此结论又叫做空间平行线的________.

2°如果一个角的两边和另一个角的两边________并且________，那么这两个角相等，此结论称作________.

3°如果空间图形F的所有点都沿同一方向移动相同的距离到F'的位置，则可以说图形F在空间作了一次________；等角定理说明了角平移后大小________.

典型范例

【例1】 如图，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，已知E、F分别是AB、BC的中点，求证：$EF\parallel A_1C_1$.



证明： 连结AC，在$\triangle ABC$中，E、F分别是AB、BC的中点，

所以$EF\parallel AC$.

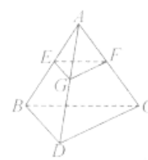
又因为$AA_1 \mathrel{\underline{\parallel}} BB_1$，$BB_1 \mathrel{\underline{\parallel}} CC_1$，

所以$AA_1 \mathrel{\underline{\parallel}} CC_1$，

所以四边形AA_1C_1C是平行四边形，

所以$AC\parallel A_1C_1$，从而$EF\parallel A_1C_1$.

【例2】 如图，立体图形$A-BCD$的四个面分别为$\triangle ABC$、$\triangle ACD$、$\triangle ADB$和$\triangle BCD$，E、F、G分别是线段AB、AC、AD上的点，且满足$AE:AB=AF:AC=AG:AD$. 求证：$\triangle EFG\backsim\triangle BCD$.



证明： 在$\triangle ABD$中，因为$AE:AB=AG:AD$，

所以$EG\parallel BD$，同理，$GF\parallel DC$，$EF\parallel BC$，

又$\angle GEF$与$\angle DBC$方向相同，

所以$\angle GEF=\angle DBC$.

同理，$\angle EGF=\angle BDC$，

所以$\triangle EFG\backsim\triangle BCD$.

互动小结：

在运用平行公理时，应注意平行线的传递性.

知识整合

1. 公理4是初中平行公理在立体几何中的推广，该公理不受直线条数的限制. 但在平面几何中平行线一定共面；空间中的多条平行线两两共面，所有平行线不一定共面.

2. 等角定理可以推广为：如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行，那么这两组直线所成的锐角（或直角）相等.

对于等角定理中的条件"方向相同"，(1)若仅将它改成"方向相反"，则这两个角也相等；(2)若仅将它改成"一边方向相同，而另一边方向相反"，则这两个角互补.

课时练习

1. 设AA_1是正方体的一条棱，这个正方体中与AA_1平行的棱共有　(　　)

A. 1条　　B. 2条

C. 3条　　D. 4条

2. 下列结论正确的是　（　　）
A. 如果两个角相等，那么这两个角的两边分别平行
B. 空间四边形的四个顶点可以在一个平面内
C. 空间四边形的两条对角线可以相交
D. 空间四边形的两条对角线不相交

3. 下面的三个命题，其中正确的个数是　（　　）
①四边相等的四边形是菱形；
②两组对边分别相等的四边形是平行四边形；
③若四边形每一组对角都是直角，则这个四边形是圆的内接四边形.
A. 1　　B. 2
C. 3　　D. 0

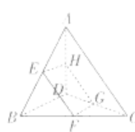
4. 若$\angle AOB=\angle A'O'B'$且$OA\parallel O'A'$，OA与$O'A'$的方向相同，则下列结论中正确的是　（　　）
A. $OB\parallel O'B'$，且方向相同
B. $OB\parallel O'B'$
C. OB与$O'B'$不一定平行
D. OB与$O'B'$不平行

5. 若空间四边形的对角线相等，则以它的四条边的中点为顶点的四边形是________.

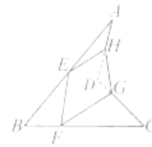
6. 连结空间四边形$ABCD$的两条对角线AC、BD，若M、N分别是$\triangle ABC$和$\triangle ACD$的重心，则MN与BD的位置关系是________.

能力提升

7. E、F、G、H分别是空间四边形$ABCD$各边AB、BC、CD、DA的中点，若对角线$BD=2$，$AC=4$，求EG^2+HF^2的值.



8. 已知四边形$ABCD$是空间四边形，E、H分别是边AB、AD的中点，F、G分别是边CB、CD上的点，且$\frac{CF}{CB}=\frac{CG}{CD}=\frac{2}{3}$，求证：四边形$EFGH$是梯形.



第5课 异面直线及空间直线的位置关系

学习目标

理解异面直线的概念,会判断和证明两条直线是异面直线,会判断两条直线的位置关系.

基础导引

1. 教室的地面、天花板、四周的墙面,它们相交成的直线中,是否存在既不平行又不相交的两条直线?

2. 将两枝笔在空间随意移动,它们所在的直线一定共面吗?

3. 直线 $a\subset\alpha$,直线 $b\subset\beta$,α 与 β 相交. 试讨论 a 与 b 的位置关系.

4. 作图表示两条直线异面时,怎样显示它们不共面的特点呢?

5. 证明:**定理** 过平面外一点和平面内一点的直线,和平面内不经过该点的直线是异面直线.

互动小结:

1°________________的两条直线,叫做异面直线.

2°空间两直线的位置关系分类:

①根据是否在同一平面内分 $\begin{cases}\text{共面直线}\begin{cases}\text{平行直线}\\\text{相交直线}\end{cases}\\\text{异面直线}\end{cases}$

②根据是否有交点分 $\begin{cases}\text{有交点—相交直线}\\\text{无交点}\begin{cases}\text{平行直线}\\\text{异面直线}\end{cases}\end{cases}$

3°两条异面直线的位置关系常用________来衬托.

4°证两直线异面常用反证法证明,先假设两条直线不异面,根据空间两条直线的位置关系,这两条直线一定共面,即这两条直线可能相交也可能平行,然后,推导出矛盾即可.上述定理可作为两条直线异面的判定依据.

5°反证法证题的一般步骤是:假设结论的反面成立,据理推出矛盾,从而断定结论正确.

如果结论的反面情况只有一种,则只须将此否定驳倒,即可达到反证的目的,这种比较单纯的反证法称为归谬法.如果结论的反面情况不只一种,则必须将其逐一驳倒,才能推出命题结论的正确.

典型范例

【例1】异面直线是指 ( )

A. 空间中两条不相交的直线

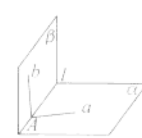
B. 分别位于两个不同平面内的两条直线

C. 平面内的一条直线与平面外的一条直线

D. 不同在任何一个平面内的两条直线

解:对于A,空间两条不相交的直线有两种可能:一是平行(共面),另一是异面. 所以A应排除.

对于B,分别位于两个平面内的直线,既可平行也可相交也可异面,如图所示,就是相交的情况,所以B应排除.

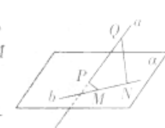


对于C,如图所示的 a、b 可看作是平面内的一条直线与平面外的一条直线,显然它们是相交直线,所以C应排除.

只有D符合定义,综上应选D.

点评:本题主要考查异面直线定义以及空间直线的位置关系.

【例2】如图,已知 a,b 是异面直线,点 $P\in a$,$Q\in a$,$M\in b$,$N\in b$,求证:PM 与 NQ 是异面直线.



证法1:(反证法)假设 PM、NQ 不是异面直线,

则 PM、NQ 共面设为 β,即 $P\in\beta$,$Q\in\beta$.

因为 $P\in a$,$Q\in a$,所以 $a\subset\beta$.

同理 $b\subset\beta$，

所以 a、b 共面，这与已知 a、b 是异面直线矛盾，

所以假设不成立，

故 PM 与 NQ 是异面直线．

证法 2：(定理法)因为 $P\in a$，而 a、b 是异面直线，

所以 $P\notin b$，则直线 b 与点 P 确定一个平面，设为平面 α，

因为 $a\cap\alpha=P$，$Q\in a$，所以 $Q\notin\alpha$，

又因为 $M\in b$，$N\in b$，所以 $N\in\alpha$，$M\in\alpha$，

所以 $PM\subset\alpha$，而 $N\notin PM$，

所以 NQ 与 PM 是异面直线．

点评：证明两直线是异面直线的方法有两种：一是定义法，即用异面直线的定义，此时常需借助反证法，假设两直线不异面，根据空间两直线的位置关系，这两直线一定共面，然后推出矛盾即可；二是定理法，且此方法证明时必须阐述出定理满足的条件，$a\subset\alpha$，$A\notin\alpha$，$B\notin a$，但 $B\in\alpha$，然后才可以推导直线 a 与 AB 是异面直线．

互动小结：

判断两条直线为异面直线常用方法有：________________________等．

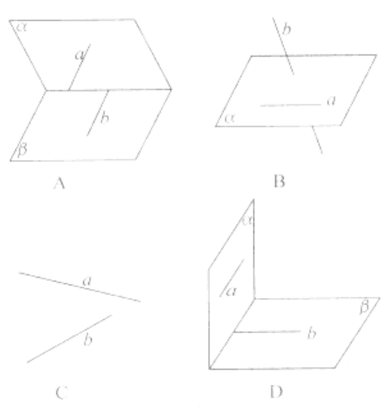
知识整合

1. 异面直线的概念是难点，结合平面理解异面直线是较好的方法，异面直线的画法一般也采用平面衬托法．

2. 判断或证明两条直线是异面直线常用定义判断法，反证法和异面直线判定定理．

课时练习

1. 下列各图中，不能确认 a、b 表示两条异面直线的图形是 ( )



2. 若空间有两条直线，则"这两条直线为异面直线"是"这两条直线没有公共点"的 ( )

A. 充要条件　　B. 必要不充分条件

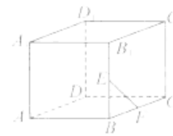
C. 充分非必要条件　　D. 既不充分又不必要条件

3. 若 a、b 是异面直线，b、c 是异面直线，则 a、c 的位置关系是 ( )

A. 相交或平行或异面　　B. 相交或平行

C. 异面　　D. 平行或异面

4. 如右图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 BB_1 和 BC 的中点分别是 E、F，各棱所在的直线中与直线 EF 异面的条数是 ( )



A. 4　　B. 6

C. 8　　D. 10

5. 如果把两条异面直线称作"一对"，那么在正方体的十二条棱中，共有异面直线__________对．

6. 给出下面三个命题：

①a、b 是异面直线，直线 c 和 d 分别与 a、b 交于 E、F、G、H 四个不同的点，则 c、d 是异面直线；

②一条直线和两条异面直线中的一条平行，则它和另一条直线不可能是平行直线；

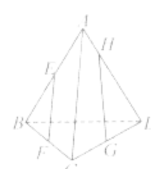
③一条直线和两条异面直线都相交，那么它们可以确定两个平面．

上述命题中，真命题的序号是__________．

能力提升

7. 过一点 O 的三条直线 OA、OB、OC 不共面，且 D、E 在 OA 上，F 在 OB 上，G 在 OC 上，求证：DF 与 EG 是异面直线．

8. 已知 E、F、G 分别是 AB、BC、CD 的中点，H 是 DA 上的点且 $AH:HD=1:3$，试判断 EF 与 GH 是否为异面直线．



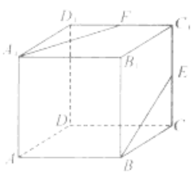
第 6 课　异面直线所成的角

学习目标

理解两条异面直线所成的角，两条异面直线互相垂直的概念；会用平移法求异面直线所成的角.

基础导引

1. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F 分别为 CC_1、C_1D_1 的中点，试判断下列直线的位置关系，并说明你的理由.

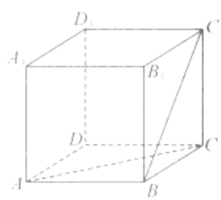


(1)A_1D_1 与 BC 是________；
(2)AD 与 BE 是________；
(3)A_1F 与 BE 是________.

2. 两条异面直线所成的角指的是　(　　)
①两条相交直线所构成的四个角中的一个角
②过空间任一点与两条异面直线分别平行的两条相交直线所成的锐角或直角
③过其中一条直线上的一点作与另一条平行的直线，这两条相交直线所成的锐角或直角
④两条直线既不平行又不相交，无法成角
A. ①②　　B. ②③
C. ③④　　D. ①④

3. 已知 a、b 是一对异面直线，且 a、b 成 $80°$ 角，则在过点 P 的直线中与 a、b 所成角均为 $80°$ 的直线有______条.

4. 右图是棱长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，求：



(1)AB 与 CC_1 所成角的大小；
(2)AA_1 与 BC_1 所成角的大小；
(3)AC 与 BC_1 所成角的大小.

互动小结：

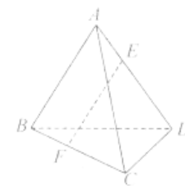
1°异面直线是指________________________.

2°异面直线 a 和 b 所成的角——经过空间任意一点 O，作直线 a' 和 b'，并使______________，由 a' 和 b' 所成的__________称为异面直线 a 和 b 所成的角.

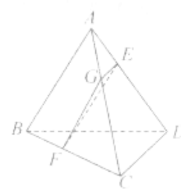
3°两条异面直线的"交叉程度"通过平移到同一平面的位置上，用这两条相交直线的夹角间接地来刻画.

4°当异面直线所成的角是直角时，称为两条异面直线互相垂直，记作 $a\perp b$.

典型范例



【例 1】如图所示，空间四边形 $ABCD$ 中，E、F 分别是 AD、BC 上的点，且 $\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}=\frac{1}{2}$，$AB=CD=3$，$EF=\sqrt{7}$，求 AB、CD 所成角的大小.



解：过点 E 作 $EG\parallel CD$ 交 AC 于 G，连结 FG，

则 $\frac{AG}{GC}=\frac{AE}{ED}=\frac{1}{2}=\frac{BF}{FC}$，

所以 $FG\parallel AB$，

所以 $\angle FGE$ 为 AB、CD 所成的角或其补角.

又 $EG=\frac{1}{3}CD=1$，$FG=\frac{2}{3}AB=2$，

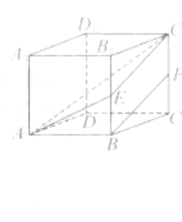
所以 $\cos\angle FGE=\frac{FG^2+EG^2-EF^2}{2FG\cdot EG}=\frac{4+1-7}{2\times2\times1}=-\frac{1}{2}$，

所以 $\angle FGE=120°$，所以 AB、CD 所成的角为 $60°$.

点评：求异面直线所成的角，有时需平移其中一条直线，有时需平移两条直线，平移法是求异面直线所成的角的最常用的方法，而余弦定理则是求角的主要工具.

【例 2】正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F 分别为 BB_1、CC_1 的中点，求 AE、BF 所成角的余弦值.

分析：只需平移 BF 至 EC_1，则角可找到，再解三角形即可.



解：如图，连结 EC_1，则 $EC_1\parallel BF$，

故 AE 与 EC_1 所成的锐角或直角，就是 AE 与 BF 所成的角.

连结 AC_1，令正方体的棱长为 a，

则 $AE=EC_1=\frac{\sqrt{5}}{2}a$，$AC_1=\sqrt{3}a$，

在 $\triangle AEC_1$ 中，

$$\cos\angle AEC_1=\frac{2AE^2-AC_1^2}{2AE^2}=1-\frac{AC_1^2}{2AE^2}$$

$$=1-\frac{6}{5}=-\frac{1}{5}，$$

所以AE、BF所成角的余弦值是$\frac{1}{5}$.

互动小结:

例2中,(1)因为异面直线所成的角为锐角或直角,由$\cos\angle AEC_1=-\frac{1}{5}$,知$\angle AEC_1$为钝角,它是$AE$、$BF$所成角的补角,所以$AE$与$BF$所成角的余弦值为$\frac{1}{5}$,该题易错点:求得$\cos\angle AEC_1=-\frac{1}{5}$之后,认为所求即为$-\frac{1}{5}$,而疏忽了异面直线所成角的范围为$(0,\frac{\pi}{2}]$.

知识整合

1. "平移法"是寻找异面直线所成角的最基本的作法. 处理好平移两条直线中的一条或同时平移两条至恰当位置,是解好这类问题的关键. 平移方法有:①直接平移;②用三角形的中位线来完成平移;③补形平移.

2. 求角的一般步骤:①找(作)角适合题意;②求角(解三角形).

3. 两异面直线所成角的范围是$(0°,90°]$.

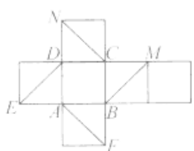
课时练习

1. 在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,面对角线A_1B与B_1C所成的角为 ( )

A. 90° B. 60°

C. 45° D. 30°

2. 右图是正方体的平面展开图,在这个正方体中,



①BM与ED平行;

②CN与BE是异面直线;

③CN与BM成60°角;

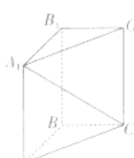
④DM与BN垂直.

以上四个命题中,正确命题的序号是 ( )

A. ①②③ B. ②④

C. ③④ D. ②③④

3. 如图,在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中,$\angle ABC=90°$,$AB=BC=1$,则异面直线B_1C_1与AC所成角的大小为 ( )



A. 30° B. 45°

C. 60° D. 90°

4. 在空间四边形$ABCD$中,对角线$AC=BD=2a$,M、N分别是边AB、CD的中点,若$MN=\sqrt{2}a$,则AC与BD所成角的大小为________,MN和AC所成角的大小为________.

5. 在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,M是DC的中点,$AD=AA_1=\sqrt{2}$,$AB=2$,那么

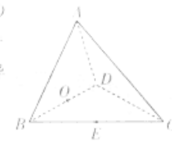
(1)AA_1与BC_1所成角的大小是________;

(2)DA_1与BC_1所成角的大小是________;

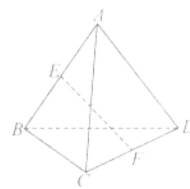
(3)BC_1与D_1M所成角的余弦值是________.

能力提升

6. 如图,O、E分别是四面体$ABCD$的棱BD、BC的中点,$CA=BC=CD=BD=2$,$AB=AD=\sqrt{2}$,求异面直线AB与CD所成角的大小.



7. A是$\triangle BCD$所在平面外一点,$AD=BC$,E、F分别是AB、CD的中点.



(1)若$EF=\frac{\sqrt{2}}{2}AD$,求异面直线AD和BC所成的角;

(2)若$EF=\frac{\sqrt{3}}{2}AD$,求异面直线AD和BC所成角的大小.