



21世纪技术与工程著作系列·地质工程
地质工程江苏省重点学科建设项目

第四纪松散沉积层 地下水渗流与 地面沉降控制数值模拟

骆祖江 李会中 付延玲 著



科学出版社
www.sciencep.com

21 世纪技术与工程著作系列·地质工程

地质工程江苏省重点学科建设项目



第四纪松散沉积层 地下水渗流与地面沉降控制 数值模拟

骆祖江 李会中 付延玲 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书从系统观点出发,详细论述了有自由面三维非稳定渗流及考虑土体变形参数和渗透性随应力状态变化的地下水渗流与土体变形三维全耦合模型的建立,有关参数、源汇项和边界条件的处理,模型的求解及计算机软件的研制,并结合工程实例给出了采用上述模型进行渗流和地面沉降模拟控制计算的步骤和方法。

本书可供地质、土木、环境、交通、市政等相关领域的科技人员和高等院校相关专业的师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

第四纪松散沉积层地下水渗流与地面沉降控制数值模拟/骆祖江,李会中,付延玲著. —北京:科学出版社,2009

(21世纪技术与工程著作系列·地质工程;地质工程江苏省重点学科建设项目)

ISBN 978-7-03-023912-9

I. 第… II. ①骆…②李…③付… III. ①第四纪地质-地下水-数值模拟②第四纪地质-地面沉降-数值模拟 IV. P641.2 P642.26

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 004161 号

责任编辑:童安齐 / 责任校对:刘彦妮

责任印制:吕春珉 / 封面设计:耕者设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

双青印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009年3月第一版 开本:B5(720×1000)

2009年3月第一次印刷 印张:8 3/4

印数:1—1 500 字数:163 000

定价:38.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换<环伟>)

销售部电话 010-62134988 编辑部电话 010-62137026(BA08)

版权所有,侵权必究

举报电话:010-64030229; 010-64034315; 13501151303

前 言

近年来,随着国民经济的发展,在第四纪松散沉积层地区,如长江三角洲、华北平原等,由重大工程降水及地下水过量开采造成的地下水疏降引起的地面沉降问题日趋严重,不仅给国民经济的发展带来了不可估量的损失,而且严重威胁了人民群众的生命财产安全。如何正确地模拟、预测重大工程地下降水和地下水开采引起的地下水渗流场的变化及由此引起的地面沉降问题,并通过优化重大工程降水及地下水开采方案,有效地控制地下水位下降所引起的地面沉降,已成为一个亟需解决的重要课题。

第四纪松散沉积层从上往下通常分布有一个潜水含水层和多个承压含水层,各含水层通过其间的黏性土弱含水层发生水力联系,因此工程降水和地下水开采的渗流问题是具有自由面的非稳定渗流问题,并且涉及复杂的源、汇项和边界条件,属非线性问题,常用的数值解法是有限差分法和有限单元法,并采用迭代法来求解代数方程,其解的稳定性一直是模型求解的难点。地下水渗流场变化引起的地面沉降问题实际上是渗流场和应力场相互影响、相互作用的过程,并随着土体应力场的改变,土体的变形参数和孔隙率以及渗透性也必然发生改变,因此在预测由工程降水及地下水开采引起的地面沉降时,不仅要考虑土体变形参数随应力状态的变化,还要考虑土体渗透性的相应动态变化。本书从系统的观点出发,从模型的建立,有关参数、源汇项和边界条件的处理,模型的求解,计算机软件的研制到模型的具体应用,一一作了详细论述。

本书共分九章。第一章介绍了地下水渗流的有关概念和基本方程;第二章论述了有自由面三维非稳定渗流的有限元求解理论和方法;第三章讨论了地下水三维渗流有限元模型中有关边界条件、源汇项和渗流量的处理方法及其计算机程序的研制;第四章以比奥固结理论为基础,重点阐述了考虑土体变形参数和渗透性随应力状态变化的地下水渗流与土体变形的全耦合本构模型;第五章叙述了有自由面地下水渗流与土体变形三维全耦合模型的有限元求解理论和方法;第六章论述了地下水渗流与土体变形三维全耦合有限元模型求解的过程及其计算机程序的研制;第七章叙述了地下水渗流与土体变形三维全耦合可视化计算机软件的研制,并介绍了软件的组成和功能;第八、九章结合上海环球金融中心塔楼深基坑降水和M4线董家渡隧道修复深基坑降水工程,给出了采用上述模型进行渗流和地面沉降模拟控制计算的步骤和方法。

本书内容是作者多年来科研工作的结晶,尤其是得到了上海市科委重大科研项

目(项目编号: 04DZ12003)、河北省国土厅专项资金计划项目(项目编号: CZCG2008008)的资助和长江水利委员会三峡勘测研究院等单位的大力支持,在此表示衷心的感谢!

本书由河海大学“地质工程——江苏省重点学科”及“211 工程”建设经费资助出版。

本书由骆祖江、李会中、付延玲负责撰写并统稿,潘玉珍、王正波、田小伟、武永霞、刘金宝、孙立华、黄华、王团乐、赵欣参加了本书的部分工作。

由于我们水平有限,书中不足之处在所难免,恳请广大读者批评指正!

作 者

2008 年 7 月

目 录

前言

第一章 地下水渗流基本理论	1
1.1 渗流基本概念及基本定律	1
1.1.1 多孔介质概念及其性质	1
1.1.2 含水层的储水率与储水系数	2
1.1.3 达西定律	3
1.2 饱和渗流基本方程	4
1.2.1 连续性方程	4
1.2.2 渗流控制方程	5
1.3 渗流基本方程的定解条件	6
1.3.1 初始条件	6
1.3.2 边界条件	6
第二章 地下水非稳定渗流三维有限元数值计算	8
2.1 有限单元法概述	8
2.2 三维非稳定渗流的等参数有限单元法	9
2.2.1 形函数及等参变换	9
2.2.2 渗流分析方程的变分原理	10
2.2.3 有限元求解的时间差分格式及其稳定性	14
2.3 有自由面渗流分析的解法概述	14
2.3.1 变网格法	15
2.3.2 固定网格法	15
2.4 有自由面渗流分析的有限元求解	19
2.4.1 有自由面渗流分析的节点虚流量法	19
2.4.2 有限元算法	20
第三章 地下水非稳定渗流三维有限元计算机程序的研制	25
3.1 第一类边界条件的处理	25
3.1.1 去行去列法	25
3.1.2 置大数法	26
3.2 饱和溢出面边界的处理	27
3.3 抽水井的处理	27
3.3.1 点井法	27
3.3.2 网格法	27

3.4	连续墙的处理	27
3.5	渗流量的计算	27
3.5.1	中断面法	27
3.5.2	体积分法	28
3.6	计算机程序研制	29
第四章	地下水渗流与土体变形耦合基本理论	31
4.1	比奥固结理论	31
4.2	土体本构模型	34
4.3	考虑土体渗透系数非线性性质的改进模型	36
4.4	定解条件	37
第五章	地下水渗流与土体变形全耦合三维有限元数值计算	39
5.1	有限元离散方程	39
5.1.1	渗流有限元离散方程	39
5.1.2	比奥固结理论有限元支配方程	42
5.1.3	有限元方程求解的稳定性讨论	46
5.2	荷载列阵	47
5.2.1	单元集中力、体力、面力和初应变等效荷载列阵	47
5.2.2	附加荷载	47
5.2.3	开挖荷载	50
5.3	自由面边界处理	51
5.3.1	自由面边界积分项的计算	51
5.3.2	有自由面渗流问题求解的改进复合单元渗透矩阵调整法	55
5.4	井的处理	56
5.5	弹塑性问题增量解法	59
5.5.1	增量切线刚度法的计算原理	59
5.5.2	过渡单元的处理	60
5.5.3	荷载增量的计算	62
第六章	地下水渗流与土体变形三维全耦合有限元模型计算机程序研制	63
6.1	总刚存储	63
6.2	边界条件处理	64
6.3	方程的求解	64
6.4	计算机程序研制	65
第七章	三维渗流与变形全耦合可视化计算机软件 (GWS) 研制	68
7.1	软件的组成	68
7.1.1	打开	68
7.1.2	前处理模块	72
7.1.3	计算模块	80

7.1.4 后处理模块	80
7.1.5 还原	82
7.1.6 帮助	83
7.2 软件功能	83
第八章 上海环球金融中心塔楼深基坑降水与土体变形控制	84
8.1 工程概况	84
8.2 场区的地质与水文地质条件	85
8.3 承压含水层减压降水	86
8.3.1 基坑突涌稳定性分析	86
8.3.2 承压含水层的单井抽水试验	88
8.3.3 承压含水层减压降水设计	89
8.3.4 承压含水层现场群井抽水试验	89
8.4 承压含水层减压降水三维渗流控制数值模拟	92
8.4.1 地质模型概化及离散	92
8.4.2 模型的识别与验证	92
8.4.3 承压含水层降水预测及控制	95
8.5 承压含水层降水引起的渗流与土体变形控制耦合数值模拟	98
8.5.1 模型识别与验证	98
8.5.2 承压含水层降水与地面沉降预测及控制	102
第九章 上海 M4 线董家渡隧道修复深基坑降水与土体变形控制	104
9.1 工程概况	104
9.2 场区的地质与水文地质条件	104
9.2.1 场区地层分布特征	104
9.2.2 水文地质条件	105
9.3 承压含水层减压降水	108
9.3.1 修复工程对降水的要求	108
9.3.2 减压降水方案	108
9.3.3 承压含水层现场群井抽水试验	109
9.4 承压含水层降水三维渗流控制数值模拟	112
9.4.1 地质模型概化及离散	112
9.4.2 模型参数识别与验证	114
9.4.3 承压含水层降水预测及控制	116
9.5 承压含水层降水引起的渗流与土体变形控制耦合数值模拟	120
9.5.1 模型参数识别与验证	120
9.5.2 承压含水层降水与地面沉降预测及控制	124
主要参考文献	126

第一章 地下水渗流基本理论

1.1 渗流基本概念及基本定律

1.1.1 多孔介质概念及其性质

1. 多孔介质的概念

在地下水动力学中,把具有孔隙的岩石称为多孔介质。在多孔介质中,固、液、气三相都可能存在,其中至少有一相是气相或液相,固相部分称为固体骨架,气相的空气主要存在于非饱和带中,液相的地下水可能以吸附水、薄膜水、毛细水和重力水等多种形式存在。广义地说,可以把孔隙介质、裂隙介质和某些岩溶不十分发育的由石灰岩和白云岩组成的介质都称为多孔介质。

2. 多孔介质的性质

(1) 孔隙性

多孔介质的孔隙性是指孔隙体积和多孔介质总体积之比。从地下水运动角度来看,只有相互连通的孔隙才有意义。不连通的孔隙称为死端孔隙,其中地下水是相对停滞的;互相连通的、不为结合水所占据的那部分孔隙称为有效孔隙。

孔隙体积的多少用孔隙度来表示,孔隙度是指某一体积岩石中孔隙体积所占的比例,即

$$n = \frac{V_n}{V} \quad (1.1)$$

式中, n 为岩石的孔隙度; V 为包括孔隙在内的岩石体积 (L^3); V_n 为岩石中孔隙体积 (L^3)。

研究地下水运动通常采用有效孔隙度,它是有效孔隙体积与多孔介质总体积的比例,即

$$n_e = \frac{(V_n)_e}{V} \quad (1.2)$$

式中, n_e 为岩石的有效孔隙度; V 为包括孔隙在内的岩石体积 (L^3); $(V_n)_e$ 为有效孔隙体积 (L^3)。

(2) 压缩性

在天然条件下,一定深度处的多孔介质要受到上覆荷重的压力,设作用在该介质表面的压强为 p ,如果压强 p 增加,要引起多孔介质的压缩,这种性质称为多孔介质的压缩性。多孔介质的压缩系数 α 可表示为

$$\alpha = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp} \quad (1.3)$$

其中 $V = V_s + V_n$, 将其及式 (1.1) 代入式 (1.3), 有

$$\alpha = -\frac{1}{V} \frac{dV_s}{dp} - \frac{1}{V} \frac{dV_n}{dp} = -\frac{1-n}{V_s} \frac{dV_s}{dp} - \frac{n}{V_n} \frac{dV_n}{dp} \quad (1.4)$$

$$\text{令 } \alpha_s = -\frac{1}{V_s} \frac{dV_s}{dp}, \alpha_p = -\frac{1}{V_n} \frac{dV_n}{dp}, \text{ 则}$$

$$\alpha = (1-n)\alpha_s + n\alpha_p \quad (1.5)$$

式中, α 为多孔介质压缩系数 ($M^{-1}LT^2$); V 为多孔介质总体积; V_n 为多孔介质孔隙体积; V_s 为多孔介质固体骨架体积; p 为作用在介质表面压强 ($ML^{-1}T^{-2}$); α_s 为多孔介质固体颗粒压缩系数 ($M^{-1}LT^2$); α_p 为孔隙压缩系数 ($M^{-1}LT^2$)。

固体骨架本身的压缩性要比孔隙的压缩性小的多,故式 (1.5) 可写为

$$\alpha \approx n\alpha_p \quad (1.6)$$

1.1.2 含水层的储水率与储水系数

太沙基 (Terzaghi) 于 1925 年提出的有效应力原理可表示为

$$\sigma = \sigma' + u \quad (1.7)$$

式中, σ 为上覆荷重引起的总应力 ($ML^{-1}T^{-2}$); σ' 为有效应力 ($ML^{-1}T^{-2}$); u 为孔隙水压力 ($ML^{-1}T^{-2}$)。

在含水层压缩过程中,固体颗粒体积的压缩很小,可以忽略不计,即 $(1-n)V$ 为常数,所以有

$$d[(1-n)V] = dV - ndV - Vdn = 0 \quad (1.8)$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{dn}{1-n} \quad (1.9)$$

含水层的介质骨架压缩主要在垂直方向, $\Delta x, \Delta y$ 视为常数,故有

$$\frac{dV}{V} = \frac{d(\Delta z)}{\Delta z} \quad (1.10)$$

将式 (1.3) 代入,由 Newton 第三定律知,有效应力的变化与孔隙水压力的变化大小相等,方向相反,故有

$$\frac{d(\Delta z)}{\Delta z} = \frac{dn}{1-n} = -\alpha d\sigma' = \alpha du \quad (1.11)$$

得

$$d(\Delta z) = \Delta z \alpha du \quad (1.12)$$

$$dn = (1 - n)\alpha du \quad (1.13)$$

体积为 1m^3 的含水层, 当水头下降 1m 时, 水体积膨胀和介质骨架压缩所释放的水量分别为

$$|dV_w| = \beta n V dn \quad (1.14)$$

$$|dV| = \alpha V du \quad (1.15)$$

式中, V_w 为水体积; β 为水的压缩系数 (M^{-1}LT^2); $du = \gamma \Delta h = \rho g \times 1 = \rho g$; γ 为重度 ($\text{ML}^{-2}\text{T}^{-2}$); ρ 为密度 (ML^{-3}); g 为重力加速度 (LT^{-2})。

储水率是描述地下水三维非稳定渗流或剖面二维非稳定渗流的水文地质参数, 是衡量不同岩性含水层在相同水头降深下的弹性释水情况的, 定义为当含水层水头下降一个单位时, 从单位体积含水层中, 因水体积膨胀 (或压缩) 以及介质骨架的压缩 (或伸长) 而释放 (或储存) 的弹性水量, 用 μ_s 表示, 量纲是 L^{-1} , 即

$$\mu_s = |dV| + |dV_w| = \rho g (\alpha + n\beta) \quad (1.16)$$

储水系数是储水率与含水层厚度 M 的乘积, 它表示在面积为一个单位、厚度为含水层全厚度 M 的含水层柱体中, 当水头改变一个单位时弹性释放或贮存的水量, 用 μ^* 表示, 无量纲, 即

$$\mu^* = \mu_s M \quad (1.17)$$

1.1.3 达西定律

1856 年法国水利学家达西 (H. Darcy) 在装满砂的圆筒中进行试验, 最后得到关系式为

$$Q = kA \frac{h_1 - h_2}{l} = kAI \quad (1.18)$$

式中, Q 为渗流量 (L^3T^{-1}); k 为渗透系数 (LT^{-1}); h_1 、 h_2 分别为砂柱上、下端处水头 (L); l 为经过砂柱的长度 (L); I 为水力坡度; A 为过水断面面积 (砂柱横截面积) (L^2)。

若用渗流速度形式表示, 则为

$$v = kI = -k \frac{dh}{dl} \quad (1.19)$$

式 (1.18) 和式 (1.19) 所表示的关系就是达西定律, 并非所有的层流都适用, 当渗流速度或水力坡度增大时, 惯性力也随之增大, 达西定律就不适合了, 它只适用于雷诺数 Re 不超过 $1 \sim 10$ 的地下水运动。雷诺数 Re 可表示为

$$Re = \frac{vd}{\gamma} \quad (1.20)$$

式中, v 为渗流速度 (LT^{-1}), γ 为地下水的运动粘滞系数 (L^2T^{-1}), d 为含水层颗粒的平均粒径 (L)。

将式 (1.19) 推广到三维运动, 则有

$$\begin{cases} v_x = -kI_x = -k \frac{\partial h}{\partial x} \\ v_y = -kI_y = -k \frac{\partial h}{\partial y} \\ v_z = -kI_z = -k \frac{\partial h}{\partial z} \end{cases} \quad (1.21)$$

式中, v_x, v_y, v_z 为渗流速度在 x, y, z 三个方向的分量; I_x, I_y, I_z 为水力坡度在 x, y, z 三个方向的分量; h 为渗流区域中各点的水头 (L)。

在各向异性介质中, 渗流速度相应地表示为

$$\begin{cases} v_x = -k_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} - k_{xy} \frac{\partial h}{\partial y} - k_{xz} \frac{\partial h}{\partial z} \\ v_y = -k_{yx} \frac{\partial h}{\partial x} - k_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} - k_{yz} \frac{\partial h}{\partial z} \\ v_z = -k_{zx} \frac{\partial h}{\partial x} - k_{zy} \frac{\partial h}{\partial y} - k_{zz} \frac{\partial h}{\partial z} \end{cases} \quad (1.22)$$

1.2 饱和渗流基本方程

1.2.1 连续性方程

在渗流场中, 各点渗流速度大小、方向都可能不同, 为了反映质量守恒定律

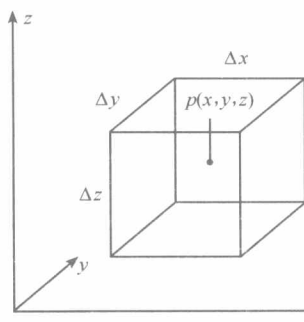


图 1.1 渗流区中的单元体

在地下水运动中的具体表现, 就要在三维空间建立渗流连续性方程。在渗流场中, 任取以 $p(x, y, z)$ 点为中心的六面体微元, 各边长度分别为 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, 且与坐标轴平行, 如图 1.1 所示。

设 v_x, v_y, v_z 分别是点 p 在 x, y, z 方向上的渗流速度, ρ 为水的密度, 则单位时间通过垂直坐标轴方向水平面积的水流质量分别为 $\rho v_x, \rho v_y, \rho v_z$ 。在 Δt 时间

内由单元体左侧面流入单元体的水流质量为 $\left[\rho v_x - \frac{1}{2} \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} \Delta x \right] \Delta y \Delta z \Delta t$, 从单元体右侧面流出的水流质量为 $\left[\rho v_x + \frac{1}{2} \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} \Delta x \right] \Delta y \Delta z \Delta t$, 则沿 x 轴流入

流出单元体的质量差为 $-\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$ ，同理可得沿 y 轴和 z 轴流入流出单元体的质量差分别为 $-\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$ 和 $-\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$ 。因此单位时间内单元体内总的进水质量为

$$-\left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right] \Delta x \Delta y \Delta z \quad (1.23)$$

根据质量守恒定律，它应该等于单位时间内单元体内液体质量 $(\rho n \Delta x \Delta y \Delta z)$ 的变化量，即

$$-\left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right] \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial}{\partial t} (\rho n \Delta x \Delta y \Delta z) \quad (1.24)$$

式 (1.24) 就是渗流的连续性方程，假设含水层的骨架不可压缩，则有

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (1.25)$$

式 (1.25) 为不可压缩流体在刚体介质中流动的连续性方程，它表明任一体积含水层流入流出的水体积相等。

1.2.2 渗流控制方程

设 V_w 为液体体积， u 为水所承受的压强，则在等温条件下，水的压缩系数 β 为

$$\beta = -\frac{1}{V_w} \frac{dV_w}{du} \quad (1.26)$$

因为密度 ρ 和液体体积 V_w 的乘积是常数，所以有

$$d(\rho V_w) = \rho dV_w + V_w d\rho = 0 \quad (1.27)$$

将式 (1.26) 代入式 (1.27) 可得

$$d\rho = -\rho \frac{dV_w}{V} = \rho \beta du \quad (1.28)$$

将式 (1.24) 所示的连续性方程展开，且将式 (1.28)、式 (1.12)、式 (1.13) 代入右端得

$$\text{左端} = -\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z - \left(v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\text{右端} = [\rho n \beta + (1-n)\rho \alpha + n \alpha \rho] \frac{\partial u}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z = \rho(\alpha + n\beta) \frac{\partial u}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z$$

因为水头 $h = z + \frac{u}{\gamma}$ ， $\gamma = \rho g$ 故有

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \rho g \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{u}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.29)$$

将式 (1.28) 代入上式得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\rho g}{1 - \beta u} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (1.30)$$

由于水的压缩性很小, $1 - \beta u \approx 1$, 所以有

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \rho g \frac{\partial h}{\partial t} \quad (1.31)$$

将式 (1.31) 代入连续性方程的展开式, 从展开式中发现, 其左端第二项比第一项小的多, 可忽略不计, 故连续性方程可写为

$$-\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z = \rho^2 g (\alpha + n\beta) \frac{\partial h}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (1.32)$$

将式 (1.21) 及式 (1.16) 代入, 由于单元体体积 $\Delta x \Delta y \Delta z$ 为无限小, 可从等式两端约去, 就可得到表征渗流空间任一点任一时刻渗流规律的地下水运动三维非稳定流微分方程, 即

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial h}{\partial z} \right) = \mu_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (1.33)$$

若将源汇项 W (表示单位时间从单位体积含水层流入或流出的水量, 量纲为 T^{-1}) 加入, 且考虑各项异性, 取坐标轴方向与各向异性介质主方向一致, 则有

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_{zz} \frac{\partial h}{\partial z} \right) + W = \mu_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (1.34)$$

1.3 渗流基本方程的定解条件

前面根据达西定律和连续性方程推导出了渗流的基本方程, 为了确定其唯一解, 就必须附加一定的条件, 即定解条件, 定解条件包括初始条件和边界条件。

1.3.1 初始条件

初始条件是指在初始时刻 ($t=0$), 地下水水头在整个渗流场的分布情况。对于非稳定渗流, 初始条件是至关重要的, 它决定着迭代求解方程的时间。初始条件越接近真实值, 迭代收敛所用时间越短; 反之, 初始条件与实际水头值偏离越远, 迭代收敛所用时间越长。对于三维流, 渗流场中任一点 (x, y, z) 的初始条件可表示为

$$h(x, y, z, t) |_{t=t_0} = h_0(x, y, z, t_0) \quad (1.35)$$

式中, $h(x, y, z, t)$ 为渗流场水头 (L); $h_0(x, y, z, t_0)$ 为初始水头值 (L)。

1.3.2 边界条件

边界条件是未知函数在渗流区边界上的变化规律, 对于三维流来说, 它包括

研究区平面周边及垂直方向的边界。边界条件可分为三类。

1. 第一类边界条件

第一类边界又称为已知水头边界, 若边界 Γ_1 上已知各点水头随时间的变化规律, 则第一类边界条件可表示为

$$h(x, y, z, t) |_{\Gamma_1} = h_1(x, y, z, t) \cdots (x, y, z) \in \Gamma_1 \quad (1.36)$$

式中, h_1 为边界 Γ_1 上各点的已知水头值 (L)。

2. 第二类边界条件

第二类边界又称为流量边界, 当已知边界 Γ_2 上的单宽流量 (对于三维流为通过单位面积的流量) 时, 第二类边界条件可表示为

$$k \frac{\partial h}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = q(x, y, z, t) \cdots (x, y, z) \in \Gamma_2 \quad (1.37)$$

式中, n 为边界外法线向量; $q(x, y, z, t)$ 为已知流量。

当渗透系数方向与坐标轴方向一致时, 上式可写为

$$k_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} \cos(n, x) + k_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} \cos(n, y) + k_{zz} \frac{\partial h}{\partial z} \cos(n, z) = q(x, y, z, t) \quad (1.38)$$

式中, $\cos(n, x)$ 、 $\cos(n, y)$ 、 $\cos(n, z)$ 分别为流量边界外法线方向与坐标轴方向夹角的余弦。

3. 第三类边界条件

第三类边界又称为混合边界, 若边界 Γ_3 上的水头及其导数的线性组合已知, 则第三类边界条件可表示为

$$\frac{\partial h}{\partial n} + ah \Big|_{\Gamma_3} = b(x, y, z, t) \cdots (x, y, z) \in \Gamma_3 \quad (1.39)$$

式中, a, b 为已知函数。

第二章 地下水非稳定渗流三维有限元数值计算

2.1 有限单元法概述

有限单元法是利用高速电子计算机求解数学物理中或实际工程中的微分方程问题，主要是偏微分方程问题的一种系统化的数值计算方法，它从极值原理出发，把微分方程求解的问题转化为一个求极值的问题。

渗流分析有限单元法的基本思想是，将一个连续的含水层剖分为一系列小的有限单元体（如二维问题的三角形、四边形单元体，三维问题的四面体、六面体单元体等），把实际地下水面近似地用通过各有限单元节点的平面所代替，将求解区域内各点水头问题，转化为求解有限元节点水头问题。

渗流分析中有限单元法可分为变分有限元法 [也称里兹 (Ritz) 法]、伽辽金 (Galerkin) 有限元法和均衡有限元法等。其中里兹有限元法是从变分原理出发，把微分方程定解问题转化为对应的泛函方程，再求泛函极值；伽辽金有限元法是从剩余加权法出发离散微分方程，让微分方程的近似解和精确解之间差的总剩余量最小，即总剩余量取得极值；均衡有限元法是从小均衡角度出发，将渗流区划分为很多小的子区域，对每个子区域建立水量平衡关系，从数学角度来说，其实质是对局部区域使用格林公式，建立有限元计算公式。

利用有限单元法求解渗流问题的步骤大致如下：

- 1) 渗流区域的离散化（将研究区剖分成一系列单元体，单元与单元之间通过单元顶点-节点相联系）。
- 2) 选择某种插值函数表示单元内的水头分布。
- 3) 推导有限元方程并建立单元传导矩阵。
- 4) 由单元传导矩阵组装成整体传导矩阵。
- 5) 把给定的边界条件归并到总矩阵中。
- 6) 解线性代数方程组，得各节点的未知水头。

2.2 三维非稳定渗流的等参数有限单元法

2.2.1 形函数及等参变换

1. 形函数

形函数是定义于单元内部的、坐标的连续函数，在有限元法中，其作用十分重要。它满足下列条件：

1) 在节点 i

$$N_i = 1$$

在其他节点

$$N_i = 0$$

2) 在单元内任一点上的形函数之和等于 1。

2. 等参变换

在实际工程问题中，渗流场的边界条件很复杂，剖分网格不一定规则，总会出现一些不规则的单元。对于不规则的单元，要直接在上面建立形函数和插值函数是很困难的，因此就引入了等参数有限单元法。等参数有限单元法的基本思想是，借助坐标变换，先在形状简单、规则的标准单元上建立形函数，再建立标准单元和原来实际单元之间的坐标变换。

对于空间问题，就是使 (ϵ, η, ξ) 坐标系中形状简单、规则的标准单元，在 (x, y, z) 坐标系中变换为具有曲线（面）边界的形状复杂的单元。 (ϵ, η, ξ) 坐标系称为局部坐标系， (x, y, z) 坐标系称为整体坐标系；变换前的单元为母单元，变换后的单元为子单元，如图 2.1 所示。

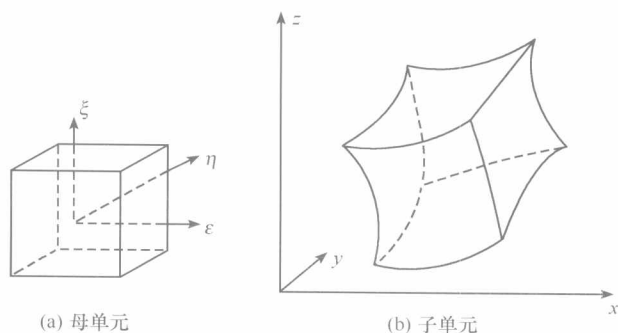


图 2.1 空间坐标转化