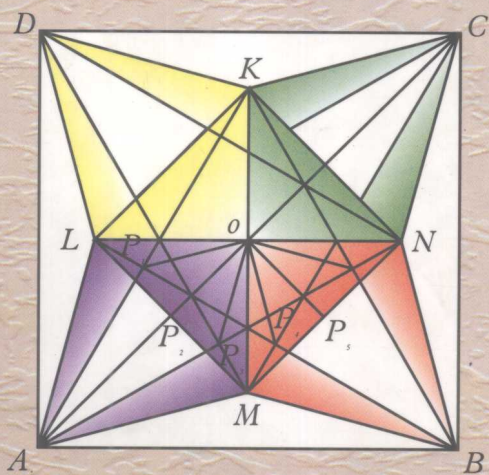


罗增儒数学教育书系

数学竞赛导论

罗增儒 著



陕西师范大学出版社

罗增儒数学教育书系

数学竞赛导论

罗增儒 著

陕西师范大学出版社

图书代号: JC156701

图书在版编目(CIP)数据

数学竞赛导论/罗增儒著. - 西安:陕西师范大学出版社,2001.7
(罗增儒数学教育书系)

ISBN 7-5613-1048-X

I. 数… II. 罗… III. 数学-竞赛-导论 IV. 01

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 67544 号

O12
74
=2

陕西师范大学出版社出版发行

(西安市陕西师大 120 信箱 邮政编码 710062)

西北大学印刷厂印刷 新华书店经销

2001 年 7 月第 2 版 2003 年 1 月第 2 次印刷

开本 850×1168 $1/32$ 印张 13.875 字数 316 千

印数:3001~6000 定价:16.00 元

开户行:光大银行西安南郊支行 账号:0303070-00330004695

读者购书、书店添货或发现印刷装订问题,请与发行科联系、调换

电 话:(029)5251046(传真) 5233753 5307864

E-mail: if-centre@snnph.com

为了数学竞赛学的诞生——写在前面

数学竞赛的兴起,不仅对数学,而且对教育学、人才学和考试学都产生了影响,经过40年(从1959年算起)的积累,这些影响正在从竞赛教育和竞赛数学两方面汇合成一门新的学科层面——数学竞赛学。

虽然,作为一门成熟的学科,这还仅仅是历史的使命或时代的召唤,但它的曙光已经呼之欲出了。

我们所理解的数学竞赛学应是一门交叉学科,表现为数学与教育学的交叉、高等数学与初等数学的交叉,同时又是学术性与师范性的融合。它的研究对象应是竞赛活动,包括竞赛活动的所有方面与全过程,而不仅仅是赛题或题解,数学竞赛学研究的基本方法可以有:经验总结法、统计分析法、实验研究法、跟踪调查法等。

由于中国的数学竞赛工作具有了出类拔萃的实践成果和初露锋芒的理论研究水平,还形成了一支宏大的学术队伍——数学竞赛活动家群体,所以,“数学竞赛学”的建设工作,正在中国这块古老的大地上表现出领导世界新潮流的潜力与后来居上的实力。本书是笔者与同行们通力合作建设“数学竞赛学”的一个实际行动,同时,也是我们关于“奥林匹克数学学科建设”课题的重要构成。此课题曾获国家级优秀教学成果二等奖。

本书以数学竞赛为研究对象,总结竞赛数学的基本内容和基本方法,探讨竞赛教育中的一些热点课题。限于水平,所有的看法都只是作为问题向读者提出来,而不是作为结论向大家作灌输,因此,书中的内容只是建立理论的一些素材,书中的结论只是理论建立的一种尝试。

本书是笔者主编的《数学竞赛教程》基础上的继续思考,该书自1993年12月出版以来,得到许多数学教学法专家的肯定,亦被众多师范院校选作相应选修课的教材。浙江一位资深教授认为,该书“突破了我国众多的数学竞赛辅导资料只介绍竞赛试题的解法,不涉及对竞赛数学的特征、方法的探讨;只介绍竞赛试题,不涉及数学竞赛有关的理论问题;只介绍数学竞赛知识性的一面,不涉及数学竞赛教育性的一面的局限。该书从数学竞赛的历史发展,竞赛数学的内容、特征与方法,到数学竞赛教育活动的组织,系统地论述了数学竞赛的基本问题,作为我国第一本“教程”的书,其史料丰富、内容翔实、例题精当、文字生动,它的出现在我国数学竞赛书籍出版史上是标志性的,对我国数学竞赛学的研究具有较高的学术理论价值及实践指导意义,并为我国高师院校数学教育专业选修课——数学竞赛的规范化教材的编写奠定了较为坚实的基础。”(1995.5.7)

同时,读者在使用中也提出了一些问题,这构成了我们继续思考的基本工作。首先,我们充实了新的资料;其次,我们对第二章作了更具系统性的改写,并补充了基本概念和常用定理(有41个定义,71条定理)。本来还要附上习题参考答案的,但反复权衡之后,还是不要妨碍读者的创造性思考为好。

我们深知,建设有中国自己特色而无世界先例的数学竞赛学是一项艰巨、艰难、艰苦的工作。但是,我们认识到,在当今人才激烈竞争的世界上,青少年的智力奥林匹克角逐实在是一场前哨白刃战,是各国未来科技领袖走上正式擂台前的一场预赛。我们别无选择!既然,风雨兼程的前期工作已经得到了充分的肯定,那么,乘胜前进的成功定然是为期不远了。但愿有更多的人投身到这一工作中来,为了数学竞赛学的诞生。

趁此机会,笔者衷心感谢编写原《数学竞赛教程》的长期合作者李元中、魏暹荪、文锐等良师益友,衷心感谢关心本书的广大同行和出版社人士。

目 次

第一章 竞赛活动

1-1 国际数学竞赛	(1)
1-1-1 国际数学奥林匹克的由来与发展	(1)
1-1-2 国际数学奥林匹克的组织	(6)
1-1-3 普特南数学竞赛	(14)
1-1-4 数学竞赛发展的基本特征	(20)
1-2 中国数学竞赛	(26)
1-2-1 中国数学奥林匹克的早期萌芽	(27)
1-2-2 中国数学奥林匹克的国内成熟	(36)
1-2-3 中国数学奥林匹克的国际发展	(51)
1-2-4 小学数学竞赛	(63)
1-2-5 数学竞赛热的思考	(67)
1-3 数学竞赛活动的学术成果	(70)
习题 1	(72)

第二章 竞赛数学

2-1 竞赛数学的特征	(73)
2-1-1 中间数学	(74)
2-1-2 研究数学	(81)
2-1-3 艺术数学	(89)
2-1-4 教育数学	(97)
习题 2-1	(98)

2-2 数学竞赛中的几何问题.....	(98)
2-2-1 IMO 中几何问题的主要特征	(99)
2-2-2 几何赛题求解的基本方法	(101)
2-2-3 数学竞赛中的组合几何问题	(117)
习题 2-2	(120)
2-3 数学竞赛中的代数问题.....	(127)
2-3-1 IMO 中的代数问题	(127)
2-3-2 多项式	(136)
2-3-3 不等式	(144)
2-3-4 函数方程	(160)
2-3-5 递推数列	(167)
习题 2-3	(181)
2-4 数学竞赛中的数论问题.....	(186)
2-4-1 基本内容	(186)
2-4-2 例题选讲	(189)
习题 2-4	(199)
2-5 数学竞赛中的组合问题.....	(201)
2-5-1 基本内容	(202)
2-5-2 例题选讲	(205)
习题 2-5	(217)
2-6 数学竞赛中的图论问题.....	(221)
2-6-1 基本内容	(221)
2-6-2 例题选讲	(225)
习题 2-6	(234)
2-7 奥林匹克数学的技巧.....	(237)
2-7-1 构造	(238)
2-7-2 对应	(239)
2-7-3 递推	(244)
2-7-4 区分	(248)

2-7-5 染色	(251)
2-7-6 极端	(256)
2-7-7 对称	(257)
2-7-8 配对	(259)
2-7-9 特殊化	(262)
2-7-10 一般化	(264)
2-7-11 数字化	(266)
2-7-12 不变量	(269)
2-7-13 整体处理	(271)
2-7-14 变换还原	(274)
2-7-15 逐步调整	(277)
2-7-16 奇偶分析	(279)
2-7-17 优化假设	(283)
2-7-18 计算两次	(286)
2-7-19 辅助图表	(288)
习题 2-7	(290)

第三章 竞赛教育

3-1 奥林匹克数学教育的性质	(298)
3-2 数学竞赛活动的教育功能	(302)
3-3 数学竞赛的培训	(306)
3-3-1 数学竞赛的学校训练	(306)
3-3-2 理科实验班	(309)
3-3-3 国家集训队	(310)
3-3-4 数学竞赛大纲	(311)
3-4 竞赛型选手的综合素质	(322)
3-5 数学奥林匹克学校	(330)
3-5-1 对数学奥林匹克学校的认识	(331)
3-5-2 数学奥林匹克学校的组织	(332)

3-5-3 数学奥林匹克学校的教学原则	(334)
3-6 数学竞赛的命题.....	(336)
3-6-1 中国数学竞赛命题工作的发展	(336)
3-6-2 数学竞赛命题的基本要求	(337)
3-6-3 数学竞赛命题的基本方法	(353)
习题 3	(364)
 附录 1 国际数学奥林匹克试题(IMO 1~43)	 (365)
附录 2 中国数学奥林匹克试题(CMO 1~17)	(410)

第一章 竞赛活动

本章介绍国际数学竞赛、中国数学竞赛以及数学竞赛活动本身的学术成果。

关于国际数学竞赛,本书以中学生国际数学奥林匹克(International Mathematical Olympiad 简称 IMO)为中心(也涉及普特南数学竞赛)来展开,介绍了它的由来、发展与组织,在此基础上,分析了40年来数学竞赛发展的基本特征。

关于中国数学竞赛(CMO)既介绍了中国中学生数学竞赛发展的全程(也涉及到小学数学竞赛),又分析了中国数学竞赛成长的阶段:早期萌芽、国内成熟及国际发展,最后,对数学竞赛热进行了冷静的思考。

至于竞赛活动的学术成果,主要从教育学、数学、人才学方面总结出三条:

- 诞生了一个数学教育的新分支;
- 形成了一个教育数学的新层面;
- 造就了一个数学奥林匹克新学派。

1-1 国际数学竞赛

1-1-1 国际数学奥林匹克的由来与发展

数学离不开解题。早期的数学著作像古巴比伦的泥版文书、古埃及的草片文书、中国的《九章算术》等,均无一例外地用问题及其解决的形式记录人们研究数学的成果。进行解题比赛的活动也古已有之。

古希腊有解几何难题比赛的记载;16世纪,在意大利有过关于口吃者塔塔利亚求解三次方程的激烈竞争;17世纪,不少数学家喜欢提出一些问题,向其他数学家挑战,法国的费马是其中的佼佼者,他所提出的费马大定理向人类的智慧挑战了三百年^①;18世纪,法国曾经进行过独立的数学竞赛;19世纪,法国科学院以悬赏的方式征求对数学难题的解答,常常获得一些重要的数学发现,数学王子高斯就是比赛的优胜者。

匈牙利数学家舍贵说得好:

“我们不应忘记,解任何一道有价值的题目,很少有容易得来而无需刻苦钻研的.相反地,它往往是几天、几星期或者几个月竭尽脑力的结果.为什么年轻人愿意花费这么多精力呢?这大概是对某种价值本能的偏爱,即把智力创造和精神成就看得高于物质利益的态度.这种价值标准的建立只能是社会风尚和文化环境长期熏陶发展的结果,那是很难通过政府的帮助,即使是学术上对数学学科加强培训来加速进行的.向年轻人显示智力创作之美,使他们体验到从事伟大和成功的智力创造后的满足,是确立这种价值标准最有效的手段.”

不过,上述种种竞赛是在成年人之间进行的,而专门以十几岁中学生为对象的数学竞赛则是现代时尚,人们一致认为,现代意义下的中学生数学竞赛源于匈牙利.1894年,匈牙利数学物理协会通过了在全国举办中学数学竞赛的决议,适逢协会主席埃特沃斯男爵(数学家、物理学家)出任教育部长,这种考试,人们称为埃特沃斯男爵考试.后来,库尔俄克大力推进这一工作,为了纪念他,匈牙利的中学生数学竞赛又叫做库尔俄克考试.

匈牙利的数学竞赛自1894年起,每年10月举行,中间因两次世界大战中断6年,又因1956年政治事件停止了一届.每次竞赛出3道题,限4小时完成,允许使用参考书.试题别具风格,常有高等数学

^① 已由美国普林斯顿大学教授、英国数学家安德鲁·外尔斯(A. Wiles)于1995年解决.

背景,却用初等数学知识就可解答.这种风格,至今仍为 IMO 所沿袭(参见例 2-1,例 2-2,例 2-4-1 等).

匈牙利的数学竞赛造就了一批与其国土面积和人口数量都不成比例的数学大师.在早期的优胜者中,可以看到这样一些名字:

费叶尔(1880~1959),被称为匈牙利现代数学之父,他在复变函数与傅立叶级数研究方面做了很多工作.1904 年他发表的费叶尔定理是傅立叶级数可和的基本定理之一.

冯·卡门(1881~1933),著名力学家,现代航天事业的奠基人.他的优秀学生中有我国著名科学家钱学森、郭永怀和钱伟长.

寇尼希(1884~1944),著名的组合数学家,写出了第一本系统的图论著作.

哈尔(1885~1933),群上测度与积分论的创始人,以哈尔测度与哈尔积分闻名于世.

黎兹(1880~1956),泛函分析的奠基者之一.他的《泛函分析讲义》两卷集是著名的教科书.

舍贵(1895~),著名的分析学家.波利亚与他合著的《数学分析中的定理与问题》是本世纪最重要、最有特色的分析教科书,曾经是好几代分析学家的入门书.这本书被誉为“造就了两代数学家”,已译成英、俄、法、中等多种文字,一版再版.

拉多(1895~1965),对复变函数、测度论、组合等都有建树的多面手,与道格拉斯同时独立地解决了极小曲面的帕拉德问题.

这些事例表明,数学竞赛是发现和造就人才的一个重要途径.

继匈牙利之后,罗马尼亚于 1902 年首先由《数学杂志》组织竞赛,在以后的 30 年中没有其他国家举办过类似活动,直到匈牙利数学竞赛造就的数学大师纷纷登台的时候,欧洲和其他国家才发生强烈的兴趣,争相仿效.

1934 年苏联在列宁格勒大学(今圣彼得堡)主办了中学生数学奥林匹克,首次把数学考试与公元前 776 年古希腊的奥林匹克体育运动联系起来;1935 年,又由莫斯科大学主办了中学生数学奥林匹

克. 这种活动受到广大师生的热烈欢迎, 以后逐年举行. 1962 年扩大到整个苏联. 从下列各国举办数学竞赛时间表可以看到, 20 世纪中叶, 世界出现了一个举办中学生数学竞赛的热潮(它与新数学运动同时起步, 但新数学运动早已偃旗息鼓, 而数学竞赛则正如火如荼).

表 1-1 世界各地开始举办中学生数学竞赛时间表

时间(年)	国家(或地区)
1894	匈牙利
1902	罗马尼亚
1934	苏联
1949	保加利亚
1950	波兰
1951	捷克斯洛伐克
1956	中国
1958	印度
1961	德意志民主共和国、瑞典
1962	越南、南斯拉夫、荷兰、古巴、意大利
1963	蒙古、卢森堡
1964	西班牙
1965	英国、芬兰、阿根廷、比利时
1968	以色列
1969	加拿大、希腊
1970	德意志联邦共和国
1971	澳大利亚
1972	美国
.....	

世界各地数学竞赛的兴起为国际中学生数学奥林匹克的诞生准备了条件. 经过罗马尼亚的罗曼教授的积极活动, 1956 年, 东欧国家正式确定了开展国际数学竞赛的计划.

第一届 IMO 于 1959 年 7 月在罗马尼亚古都布拉斯(位于现在的首都布加勒斯特西北约 200 千米)拉开帷幕. 罗马尼亚、保加利亚、匈牙利、波兰、捷克斯洛伐克、德意志民主共和国各派 8 名队员, 苏联

派了4名队员(实际上是莫斯科队),一共有7个国家,52名选手,考题6道,都是与中学教材比较接近的算术、代数、三角、平面几何、立体几何问题(参见附录1).结果,罗马尼亚总分第一,匈牙利第二,捷克斯洛伐克第三.

1959年的第一届IMO是数学竞赛跨越国界的创举,但从第一届到第五届参赛国仅限于东欧几个国家,实际上只有地区性而没有多少国际性.到20世纪60年代末才逐步扩大,发展成真正全球性的中学生数学竞赛.1963年南斯拉夫参加,1964年蒙古参加,1965年芬兰参加,1967年英国、法国、意大利、瑞典参加,1969年比利时、荷兰参加,1970年奥地利参加,1971年冲出欧洲,古巴参加,1974年美国、越南参加,1975年希腊参加,1977年联邦德国、阿尔及利亚参加,1978年土耳其参加,1979年卢森堡、以色列、巴西参加,1981年哥伦比亚、委内瑞拉、墨西哥、加拿大、澳大利亚、突尼斯参加,1982年科威特参加,1983年西班牙、摩洛哥参加,1984年塞浦路斯、挪威参加,1985年冰岛、伊朗、中国参加,1987年乌拉圭、秘鲁、巴拿马、尼加拉瓜参加,1988年爱尔兰、中国香港、印度尼西亚、菲律宾、南朝鲜、新加坡、阿根廷、厄瓜多尔、新西兰参加,1989年葡萄牙、印度、泰国参加,到1990年在中国举办第31届IMO时,已发展到54个国家或地区(308人).此后,又继续增加到每届七八十个队、四百多人的规模(参见表1-9).如今,虽然还不是每一个国家每一届都参加,但所有经济、文化上的重要国家都置身其列了,IMO已经成为国际上最有影响的学科竞赛,同时也是公认水平最高的中学生数学竞赛.

虽然,国际数学奥林匹克的参赛队不断增加,竞赛规模不断扩大,但是,在1980年以前,并没有一个统一的国际机构负责组织协调工作.最初,基本上是由最早参加国际数学竞赛的几个东欧国家依次承担组织工作和所需经费(见表1-2).随着许多新加入国家(或地区)的增多,负担不能再压在少数国家身上,1976年奥地利成了第一个主办IMO的西欧国家,此后英国主办了1979年的第21届IMO.但是,1980年,IMO没能举行,原因是当年的主办国(蒙古)由于经费

发生困难无力承担,而 IMO 又缺乏一个国际性协调组织使可能的主办国和参赛国了解这一情况.这使人们清楚地认识到建立一个国际机构来协调组织每年的 IMO 的必要性.1980 年,国际数学教育委员会决定成立 IMO 分委员会(1981 年 4 月正式成立),负责安排每年活动的组织者,所以,自 1981 年起,IMO 的举办一直没有中断^①并且逐步规范化.

回顾 IMO 的几十年发展,大体经历了三个阶段:

第一阶段:从匈牙利 1894 年首开数学竞赛之先河到 1959 年第 1 届 IMO,是国际数学竞赛的国内准备阶段.虽然,这期间已经有一些小型的、国与国之间的比赛,但仅仅是局部的、偶然的现象.

第二阶段:从 1959 年第 1 届到 1979 年第 21 届,是从地区性崛起起到全球性发展的阶段.这一阶段实现了三个大的突破.首先是突破了数学竞赛的国界发展为东欧几个国家的地区性竞赛;其次是意识形态的突破,从开始的“社会主义阵营”突破到“资本主义阵营”;最后是地域方面的突破,从欧洲发展到各大洲.

第三阶段:从第 22 届开始,是 IMO 的成熟阶段,这时 IMO 的运转已经制度化、规范化,选手的水平也大大提高,竞赛的理论研究亦在兴起.据统计,第二阶段的前 21 届第一名队的分数换算为百分进制,大多在 80 分左右,平均为 80.69 分,而第三阶段的各届大多超过 85 分,第 22~36 届平均为 91.07 分,整整高出 10 分(见表 1-4).

1-1-2 国际数学奥林匹克的组织

经过近 40 年的发展,国际中学生数学竞赛虽然还没有正式通过一份章程,但是已经有了一整套约定俗成的运转常规,并为历届东道主所沿袭.“第 26 届国际数学奥林匹克规则”记录了这些常规^②.现

^① 思维.国际数学奥林匹克和中国的数学竞赛.数学的实践与认识,1990 年第 2 期 P.70.

^② 中国数学会普及工作委员会编.第 26 届国际数学奥林匹克.北京:中国青年出版社,1987 年第一版 P.7.

将当今一些比较稳定的事项介绍于下.

1. 目的

主要有两条

- (1)激励和培养数学人才;
- (2)促进各国数学教育的发展.

可以说,这两条目的不仅是应该的,而且也是完全能够达到的.据第 26 届 IMO 组委会秘书长麦第·莱提尼报告:“我们并不知道,是否有人对 IMO 的参加者进行过系统的跟踪研究,这种研究是有用的.通过在标准的数学刊物上的一些表面的观察,可以认为很多 IMO 的优胜者确实在从事数学工作,以 1965 年为例,当年的 IMO 一等奖的 8 名获得者都发表了数学研究成果,12 名二等奖获得者中至少有 7 个人,17 名三等奖获得者中有 8 个人发表了数学研究成果.在世界数学家大会上作一小时的邀请报告者中,至少有 8 个人是 IMO 的优胜者,在获得相当于诺贝尔奖的数学菲尔兹奖的人中,也有一人是 IMO 的优胜者.”

如果说,IMO 促进数学教育的发展,并成功地渗透了现代数学思想和方法在意料之中的话,那么一个始料未及的成果就是产生了奥林匹克数学并造就了奥林匹克学派.

2. 时间

每年举办一届,时间定于 7 月.每届由参赛单位轮流主办,经费也由东道主提供(选手一下飞机,就由东道主提供全部服务,直到送走).各主办国或地区如下表(表 1-2):

表 1-2 IMO 主办国或地区及前三名统计表

届数	年份	东道主	第一名	第二名	第三名
1	1959	罗马尼亚	罗马尼亚	匈牙利	捷克斯洛伐克
2	1960	罗马尼亚	捷克斯洛伐克	匈牙利	罗马尼亚(并列)
3	1961	匈牙利	匈牙利	波兰	罗马尼亚
4	1962	捷克斯洛伐克	匈牙利	苏联	罗马尼亚
5	1963	波兰	苏联	匈牙利	罗马尼亚

届数	年份	东道主	第一名	第二名	第三名
6	1964	苏联	苏联	匈牙利	罗马尼亚
7	1965	民主德国	苏联	匈牙利	罗马尼亚
8	1966	保加利亚	苏联	匈牙利	民主德国
9	1967	南斯拉夫	苏联	民主德国	匈牙利
10	1968	苏联	民主德国	苏联	匈牙利
11	1969	罗马尼亚	匈牙利	民主德国	苏联
12	1970	匈牙利	匈牙利	民主德国	苏联(并列)
13	1971	捷克斯洛伐克	匈牙利	苏联	民主德国
14	1972	波兰	苏联	匈牙利	民主德国
15	1973	苏联	苏联	匈牙利	民主德国
16	1974	民主德国	苏联	美国	匈牙利
17	1975	保加利亚	匈牙利	民主德国	美国
18	1976	奥地利	苏联	英国	美国
19	1977	南斯拉夫	美国	苏联	英国
20	1978	罗马尼亚	罗马尼亚	美国	英国
21	1979	英国	苏联	罗马尼亚	联邦德国
22	1981	美国	美国	联邦德国	英国
23	1982	匈牙利	联邦德国	苏联	民主德国 美国(并列)
24	1983	法国	联邦德国	美国	匈牙利
25	1984	捷克斯洛伐克	苏联	保加利亚	罗马尼亚
26	1985	芬兰	罗马尼亚	美国	匈牙利
27	1986	波兰	美国 苏联(并列)		联邦德国
28	1987	古巴	罗马尼亚	联邦德国	苏联
29	1988	澳大利亚	苏联	中国 罗马尼亚(并列)	
30	1989	联邦德国	中国	罗马尼亚	苏联
31	1990	中国	中国	苏联	美国
32	1991	瑞典	苏联	中国	罗马尼亚
33	1992	俄罗斯	中国	美国	罗马尼亚
34	1993	土耳其	中国	德国	保加利亚
35	1994	中国香港	美国	中国	俄罗斯
36	1995	加拿大	中国	罗马尼亚	俄罗斯