

有限群论导引

[德] Hans Kurzweil Bernd Stellmacher 著

施武杰 李士恒 译

黄建华 校



科学出版社

www.sciencep.com

号 3528-7007-10 字图

现代数学译丛 7

有限群论导引

(德) Hans Kurzweil Bernd Stellmacher 著

施武杰 李士恒 译

黄建华 校

本书是一本有限群论的入门书，旨在为读者提供有限群论的基本概念和理论。本书共分15章，前5章介绍有限群论的基本概念和理论，后10章介绍有限群论的进阶内容。本书可作为有限群论的教材，也可作为有限群论的研究人员的参考书。

本书可作为有限群论的教材，也可作为有限群论的研究人员的参考书。本书共分15章，前5章介绍有限群论的基本概念和理论，后10章介绍有限群论的进阶内容。本书可作为有限群论的教材，也可作为有限群论的研究人员的参考书。

Translation from the English language edition:
The Theory of Finite Groups by Hans Kurzweil and Bernd Stellmacher
Copyright © 2003 Springer-Verlag New York, Inc.
Springer is a part of Springer Science+Business Media
All Rights Reserved

图书在版编目(CIP)数据

有限群论导引(德) Hans Kurzweil 著, 施武杰, 李士恒 译. —北京: 科学出版社, 2009.
ISBN 978-7-03-025258-8
I. ① H… II. ① H… ② 李… ③ 施… III. 有限群论 IV. O152.1
中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第18282号

责任编辑: 李士恒、李士恒、李士恒
责任印制: 李士恒、李士恒、李士恒

科学出版社
北京 100717
http://www.sciencep.com

科学出版社

定价: 58.00元

北京

图字: 01-2007-3535 号

内 容 简 介

本书是一本有限群的入门书,展示了有限群现代理论的概念、方法和结果.全书共12章,前8章是基础,附有习题.全书主要内容包括:群论的基本概念,置换群, p 群和幂零群,可解群,群在陪集和群上的作用、互素作用和二次作用,有限群的局部和整体的对应等.

“该书较早地引入了群在集合和群上的作用,且在整本书中都对此进行了行之有效的运用”(摘自美国《数学评论》).“这是一本写得很好的书.它不仅给出了进入这个学科领域的入门知识,而且为我们展示了近斯研究中非常活跃的部分.它是为我们讲解融合方法及其应用的第一本书”(摘自德国《数学文摘》).

本书可作为高等院校数学、物理和化学专业高年级学生和研究生教材,并适合于上述专业的学生、教师 and 有关的科技工作者阅读.

Translation from the English language edition:

The Theory of Finite Groups by Hans Kurzweil and Bernd Stellmacher
Copyright©2003 Springer-Verlag New York, Inc.

Springer is a part of Springer Science+Business Media

All Rights Reserved

图书在版编目(CIP)数据

有限群论导引/(德) Hans Kurzweil 等著;施武杰,李士恒译.—北京:科学出版社,2009

(现代数学译丛;7)

ISBN 978-7-03-023229-8

I. 有… II. ① Hans… ② 施… ③ 李… III. 有限群 IV. O152.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 162636 号

责任编辑:陈玉琢/责任校对:陈玉凤

责任印制:钱玉芬/封面设计:王浩

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

铭浩彩色印装有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009年2月第一版 开本:B5(720×1000)

2009年2月第一次印刷 印张:19 1/2

印数:1—2 500 字数:372 000

定价:58.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

寄语中国学生

群论课程很可能在几个方面与以前学过的其他数学课程有所不同. 要解的方程很少, 公式则更少. 虽然有一些定义和定理需要学习, 但仅靠死记硬背很难通过这门课程. 深刻理解概念并能够应用它们, 是成功的基础.

本书也很可能在几个方面不同于其他群论教材:

“我们将尽可能向读者介绍这样一些内容, 据此将有助于读者 (在群论领域中) 获得成功, 或可能为将来的工作打开新的前景”(摘自本书英文版序).

“该书是在许多方向深入研究的出发点”(摘自 H. Bechtell, 美国《数学评论》).

“作用是本书的核心内容, 我们的讨论涉及这一概念的若干方面, 如群在陪集和群上的作用, 互素作用和二次作用等”(摘自本书英文版序).

“这是为我们讲解融合方法及其应用的第一本书”(摘自 G.Stroth, 德国《数学文摘》).

本书的前 8 章试图给出一个快速直接的途径, 使得每一个对有限群感兴趣的学生能很快地接触那些应该知道的方法和结果. 前 8 章都附有习题. 这些习题是重要的, 它将会使学生得到从事群论研究和发现自我的能力.

这门课程有两个显著的特点, 一是高度抽象, 二是比以前所学过的数学课程更强调证明. 由于特点之一是证明. 在阅读本书之前, 让我们说明本书中是如何处理证明的. 目标是能读懂证明, 并且能独立地进行证明. 帮助达到这一目标的方法也许要回忆起写作课. 首先, 必须阅读、分析并研究许多范例, 然后才能尝试以自己的风格去写作, 修订, 最后创作出一篇有说服力的文章. 这里, 没有任何公式和固定的路子.

本书将提供大量的证明供阅读和分析. 一些习题要求对证明进行概括、分析和评论, 另一些则要求完成一些未完成的证明. 最后, 有许多机会自己去构造一个证明. 相信自己, 阅读和证明是一项可学习的技能.

更广泛地讲, 我们希望本书能帮助你成为一个善于思考的学习者, 一个具有创新精神的解决问题的能手.

衷心祝愿你获得有趣的体验和成功.

Hans Kurzweil
Bernd Stellmacher

A Word to Chinese Students

A group theory course is likely to be different from your previous mathematics courses in several ways. There are very few equations to solve, even fewer formulas. Although there will be definitions and theorems to learn, rote learning memorization alone will not carry you through the course. Understanding concepts well enough to apply them in a variety of settings is essential for success.

This book is also likely to be different from other group theory texts in several ways:

“We want to introduce the reader to some of the developments in this area that contributed to this success or may open new perspectives for the future” (quoted from the preface of English edition of this book).

“The text serves as a springboard for deeper study in many directions” (quoted from H. Bechtell, *Mathematical Reviews*).

“The notation of action, in all its facets, like action on sets and groups, coprime action and quadratic action, is at the center of our exposition” (quoted from the English edition of this book).

“This is a first book which shows us the amalgam method and moreover shows how it works” (quoted from G. Stroth, *Zentralblatt*).

The first eight chapters are intended to give a fast and direct approach to those methods and results that every student should know who is interested in finite groups. The first eight chapters are accompanied by exercises. These exercises are important and they should allow the students to get engaged with group theory and to find out about their abilities.

Two distinctive features of this course are a higher level of abstraction and more emphasis on proofs than you have perhaps encountered in earlier mathematics course. One of the features is proofs. Before you close the book right here, let us tell you something about how proofs are handled in this book. The goal is for you to be able to read proofs intelligently and to produce proofs on your own. The way we help you to achieve this goal may remind you of your composition classes. First, you read, analyze and study many examples. Next, you try your hand at the specific style and rewrite it to produce an essay or whatever form is required. There are no formulas

or rote procedures for writing.

In this book we give you lots of proofs to read and analyze. Some exercises ask you to outline, analyze or critique a proof. Other exercises require the completion of partial proofs. Finally, there are many opportunities for you to construct a proof on your own. Believe us, reading and writing proofs are learnable skills.

On a large scale, we hope this text helps you become a reflective learner and an innovative problem solver.

Best wishes for a successful and interesting experience.

Hans Kurzweil

Bernd Stellmacher

中译本前言

本书的德文版是第一译者在出席 1998 年于柏林举行的国际数学家大会后,从著名群论专家 O. H. Kegel 教授处得到的. O.H. Kegel 明确指出:“作为研究生教材,这是一本很好的教科书.”时光很快地过了 6 年,当得知此书已有英文版时,译者购买了此书的英文版.此时,本书的第二译者已成为译者的博士研究生.师生共同努力,在教学过程中边读边翻译出了此书的初稿.无独有偶,校者也用此书的德文版为教材培养了多年的研究生.

关于本书,一些群论专家给出了很高的评价,我们摘译如下:

H. Bechtell 在《数学评论》中指出:“这是一本激动人心的教科书,对(群论)这一领域给出了新的贡献,具有使读者爱不释手的魅力.尽管本书没有讲到表示论和单群的结构,但仍然是许多方向进行研究的出发点.读完本书,读者不仅在有限群理论的深度和广度两方面获得知识,而且能够深切地感受到那些构成现代研究基础的概念的产生和发展.这些概念是通过一条主线从一个到另外一个自然地联系起来的,而不是断开的.该书较早地引入了群在集合和群上的作用,并且在整本书中都对此进行了行之有效的运用.参考书目(对相关内容)提供了很好的补充.”

G. Stroth 在《数学文摘》中指出:“总之,这是一本写得很好的书.它不仅给出了进入这个学科领域的入门,而且为我们展示了近期研究中非常活跃的部分.它是为我们讲解融合方法及其应用的第一本书.也许它能够与 20 世纪六七十年代 Gorenstein 的名著一样对群论产生同样的影响.这是一本值得每个图书馆收藏的书.”

根据我们的教学经验,本书的前几章比较容易读懂,但习题较难.可以把一些较难的题放一放,到后面再去做.本书的前三章可以作为大学高年级本科生的选修课教材,前 8 章(附有习题)可作为研究生教材,最后 4 章是一些比较深入的专题研讨.对于研究生来讲,我们提倡读原文,但在教学中我们也发现有些同学对原文理解不准确.在翻译此书的过程中,我们也改正了原文的一些错误(包括印刷错误).

苏州大学将本书作为研究生优秀教材建设立项并给以经费资助,译校者的研究生们对本书的翻译也提供了具体的帮助,特别是本书的出版得到了徐明曜教授的支持,在此我们一并表示由衷的感谢.

2008 年是本书第一译者的导师陈重穆教授逝世 10 周年,本书的第二作者

前 言

有限群理论始于 19 世纪, 现已发展成为一个内容丰富且独立的代数学分支. 20 世纪 80 年代初, 这样的发展在有限单群分类的过程中达到顶点, 有限单群分类的方法和结论给了人们一个深刻的印象和令人信服的论证.

在本书中, 我们将尽可能 —— 在一个导引尽可能做到的范围内 —— 向读者介绍这样一些内容, 据此将有助于读者 (在群论领域中) 获得成功, 或可能为将来的工作打开新的局面.

本书的前 8 章试图给出一个快速直接的途径, 使得每一个对有限群感兴趣的人能很快地接触那些应该知道的方法和结果. 有些部分, 如幂零群和可解群, 只介绍一般情况下所必须了解和研究的内容.

作用是本书的核心内容, 我们的讨论涉及这一概念的若干方面, 如群在陪集和群上的作用、互素作用和二次作用等.

最后一章集中于有限群的局部和整体的对应. 具体目标是研究所有的 2 局部子群均为可解的非可解群. 读者将体会到本书中几乎所有的方法和结果都要用在这个研究上.

在这本书中, 我们至少有两部分内容没有涉及: 有限群表示论和对有限单群 (除少数例外情形) 的讨论. 对于这两部分内容, 我们感到在本书的框架内没有足够的方法来介绍它们.

对在本书中已证明或提到的较重要的结果, 我们将尽量给出原始论文作为参考, 在少数情况下也给出另外的证明. 在附录中, 我们陈述了有限单群分类定理以及一些和最后一章的课题相关的基本定理.

前 8 章都附有习题. 通常没有按照难度的递增来排列这些习题, 其中的一些需要读者深思熟虑和耐心地思考. 这些习题将会使读者得到从事群论研究和发现自我的能力.

读者可以把一些看起来较困难的练习推迟到以后, 以便运用比较丰富的经验和从后面章节的学习中得到的启发来证明它们.

在这里还应该指出, 除第 1 章外所考虑的群都是有限的.

要特别感谢同事 H. Bender. 没有他, 我们不会写这本书, 没有他的鼓励和支持, 将会是另外一种情形.

感谢 J. Hall 阅读了整个手稿, A. Chermak 阅读了其中的一部分. 也感谢

B. Baumann, D. Bandy, S. Heiss 和 P. Flavell, 他们提出了有益的评论和建议。
本书的德文版在 1998 年已由 Springer-Lehrbuch 出版。

前 言

Erlangen, Germany Hans Kurzweil

Kiel, Germany Bernd Stellmacher

February 2003

符号列表

$[x, y]$, 19 $[X, Y]$, 20 $[X, Y, Z]$, 20 (z, n) , 18 $<, \leq$, 4 $\langle X \rangle$, 4 $\langle g \rangle$, 4 $\langle \mathcal{X} \rangle$, 4 $\prod_{i=1}^n G_i$, 21 $\mathcal{A}(G)$, 179 $\mathcal{A}_V(G)$, 177 AB , 5 $A \trianglelefteq B$, 12 A_n , 71 $\text{Aut } G$, 13 $C_H(G)$, 47 C_n , 17 Δ , 67 $E(G)$, 110 \mathbb{F}_q , 159 $F(G)$, 83 $F^*(G)$, 110 $ G $, 2 G' , 19 $G^\#$, 1 $\overline{G}, \overline{g}$, 11 G_α , 46 G_p , 35 $ G : U $, 6 $G_{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}}$, 68 G/N , 11	$G \cong H$, 9 $\text{GL}(V)$, 160 $\text{GL}_n(q)$, 161 $\text{Im } \varphi$, 9 $\text{Inn } G$, 13 $J(G)$, 179 $\text{Ker } \varphi$, 9 $N \trianglelefteq G$, 10 $N_H(A)$, 47 $\mathcal{H}_\theta(A)$, 231 $\mathcal{H}_\theta(A, \pi)$, 233 $o(g)$, 4 $n\mathbb{Z}$, 17 $O_p(G), O^p(G)$, 100 $O_{p'}(G), O^{p'}(G)$, 100 $O_{\mathcal{K}}(G), O^{\mathcal{K}}(G)$, 99 $O_\pi(G), O^\pi(G)$, 100 $\Omega(G)$, 37 $\Omega_i(G)$, 37 \mathbb{P} , 7 $\Phi(G)$, 83 π' , 100 $\pi(G)$, 7 $\pi(n)$, 7 $\text{PGL}(V)$, 169 $\text{PSL}(V)$, 169 $r(G)$, 38 $S(G)$, 96 S_Ω , 44 S_n , 44 $\text{SL}(V)$, 161
---	--

$SL_n(q)$, 161
 $Syl_p G$, 50
 $Syl_\pi G$, 104
 θ , 232
 $\theta(G)$, 232
 $U \leq G$, 4
 $U \text{ char } G$, 14

$W(S)$, 190
 $X \rtimes H$, 26
 $X^\varphi, x^{-\varphi}$, 9
 $Y^{\varphi^{-1}}$, 9
 \mathbb{Z} , 17
 $Z(G)$, 13

素数

《现代数学译丛》已出版书目

(按出版时间排序)

- 1 椭圆曲线及其在密码学中的应用——导引 2007. 12 (德) Andreas Enge 著
吴 铤 董军武 王明强 译
- 2 金融数学引论——从风险管理到期权定价 2008. 1 (美) Steven Roman 著
邓欣雨 译
- 3 现代非参数统计 2008. 5 (美) Larry Wasserman 著 吴喜之 译
- 4 最优化问题的扰动分析 2008. 3 J. Frédéric Bonnans Alexander Shapiro 著
张立卫 译
- 5 统计学完全教程 2008. 6 L. 沃塞曼 著 张 波 等译
- 6 应用偏微分方程 2008. 3 谭永基 程 晋 蔡志杰 译
- 7 有限群论导引 2009. 2 (德) Hans Kurzweil Bernd Stellmacher 著 施武杰
李士恒 译 黄建华 校

目 录

寄语中国学生

A Word to Chinese Students

中译本前言

前言

符号列表

第 1 章 基本概念	1
1.1 群和子群	1
1.2 同态和正规子群	8
1.3 自同构	13
1.4 循环群	17
1.5 换位子	19
1.6 群积	21
1.7 极小正规子群	28
1.8 合成列	31
第 2 章 交换群	34
2.1 交换群的结构	34
2.2 循环群的自同构	39
第 3 章 作用和共轭	44
3.1 作用	44
3.2 Sylow 定理	50
3.3 正规子群的补	56
第 4 章 置换群	62
4.1 传递群和 Frobenius 群	62
4.2 本原作用	67
4.3 对称群	70
4.4 非本原群和圈积	73
第 5 章 p 群和幂零群	79
5.1 幂零群	79
5.2 幂零正规子群	82

5.3	具有循环极大子群的 p 群	85
第 6 章	正规和次正规结构	94
6.1	可解群	94
6.2	Schur-Zassenhaus 定理	96
6.3	根和剩余	99
6.4	π 可分群	102
6.5	分支和广义 Fitting 子群	108
6.6	本原极大子群	112
6.7	次正规子群	120
第 7 章	转移与 p 商群	125
7.1	转移同态	125
7.2	正规 p 补	130
第 8 章	群在群上的作用	133
8.1	在群上的作用	133
8.2	互素作用	139
8.3	在交换群上的作用	144
8.4	作用的分解	149
8.5	极小非平凡作用	154
8.6	线性作用和 2 维线性群	159
第 9 章	二次作用	171
9.1	二次作用	171
9.2	Thompson 子群	175
9.3	p 可分群中的二次作用	181
9.4	一个特征子群	189
9.5	无不动点作用	195
第 10 章	p 局部子群的嵌入	198
10.1	本原对	198
10.2	$p^a q^b$ 定理	210
10.3	融合方法	213
第 11 章	信号函子	231
11.1	定义和基本性质	231
11.2	分解	237
11.3	Glauberman 完备定理	249

第 12 章 N 群	257
12.1 完备定理的应用	259
12.2 $J(T)$ 分支	266
12.3 局部特征为 2 的 N 群	272
参考文献	282
附录	287
索引	289
《现代数学译丛》已出版书目	296

第1章 基本概念

本章将介绍有限群理论的一些基本概念, 这些概念中大部分适用于任意群, 即有限群或无限群. 因此本章中所研讨的对象不要求为有限 (在后面的章节中会有有限性的假设).

1.1 群和子群

一个非空集合 G 称为群 (group), 如果对每一个有序对 $(x, y) \in G \times G$, x 和 y 的乘积 (product) $xy \in G$ 都是确定的, 并且满足下述公理:

结合律 (associativity) 对任意的 $x, y, z \in G$, $x(yz) = (xy)z$.

存在单位元 (identity) 在 G 中存在一个元素 e , 对任意的 $x \in G$ 都有 $ex = xe = x$ ①.

存在逆元 (inverse element) 对每一个 $x \in G$ 存在一个元素 $x^{-1} \in G$, 使得

$$xx^{-1} = e = x^{-1}x.$$

如果群 G 也满足

交换律 (commutativity) 对所有的 $x, y \in G$ 都有 $xy = yx$,

则称群 G 为交换群 ② (或称 Abel 群).

下文中, 记号 G 总表示一个群. 结合律蕴含广义结合律 (generalized associative law): G 中元素 x_i 的乘积 $x_1x_2 \cdots x_n$ 对每一个 (合理的) 添加括号的方式都给出相同的元素. 所以 x_i 的乘积是确定的, 可简记为 $x_1x_2 \cdots x_n$.

G 的单位元 e 可以记为 1 (或 1_G). 如果 G 是交换群, 写为加法形式时, e 也可以记为 0 (或 0_G).

记

$$G^\# := \{x \in G \mid x \neq e\}.$$

设 $x \in G$, y_1 和 y_2 是 x 的两个逆元, 则有

$$y_2 = (y_1x)y_2 = y_1(xy_2) = y_1.$$

① 如果 e' 也是一个单位元, 那么 $e' = ee' = e$. 于是 G 的单位元是唯一确定的.

② 交换群常写为加法形式. 此时, 由有序对 (x, y) 确定的元素记为 $x + y$, 叫做 x 与 y 的和 (sum).