初中升高中知识与能力训练指导丛书

数 学

SHU XUE

于长盈 赵忱 杨秋影

$12n^2+8$

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)$

辽宁大学出版社

初中升高中知识与能力训练指导丛书

顾　问　姬庆生
　　　　孙有春

主　编　方祖良

副主编　于长盈
　　　　王洪升

目　　录

第一单元　实数和有理式

一　实　　数

（一）实数概念及类型题分析

1．有理数　有限小数和循环小数统称为有理数，由于循环小数都可以化为分数，如，$0.\dot{3}\dot{1}=\frac{31}{99}$，因此有理数包括有整数和分数。

任何一个有理数都可以表示成分数形式，即$\frac{q}{p}$，其中q和p都是整数，分母$p\neq 0$。

如果a和b都是有理数，则$a\pm b$，ab，$\frac{a}{b}$，（$b\neq 0$）四则运算的结果仍然都是有理数．也可以说有理数对四则运算是封闭的．

2．无理数

无限不循环小数叫无理数。

如0.20220022200022220000…，这个小数就是一个无限不循环小数，它就是一个无理数．常见的无理数，如开不尽的方根，$\sqrt{2}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt[3]{4}$，$\sqrt[5]{6}$等，还有圆周率π等等．

如果a、b都是无理数，则$a\pm b$，ab，$\frac{a}{b}$四则运算的结果不

一定都是无理数，也就是说有时可能得有理数，如无理数 $2+\sqrt{3}$ 和 $2-\sqrt{3}$，则二数相加，$(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$，其结果是有理数。

如果a是有理数，b是无理数，则代数和$a\pm b$一定是无理数。

3．实数

有理数和无理数统称为实数。

$$\text{实数系}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数（正整数、零、负整数）}\\\text{分数（正分数，负分数）}\end{cases}\text{：有限小数或无限循环小数．}\\\text{无理数（正无理数，负无理数）：无限不循环小数．}\end{cases}$$

4．实数的有关概念

（1）数轴：规定了有原点、正方向和长度单位的直线叫做数轴。

利用数轴，可以把实数和数轴上的点建立起联系。即每一个实数都可以用数轴上唯一的一个点来表示；反过来，数轴上的每一个点都表示唯一的一个实数。通常把这种关系，说成实数和数轴上的点一一对应。

（2）相反数：实数a和$-a$称为相反数；0的相反数仍旧是0。

相反数的和为0，即$a+(-a)=0$。

（3）实数的绝对值：一个正实数的绝对值是它本身；一个负实数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零。

$$\text{即}\quad |a|=\begin{cases}a & (a>0),\\0 & (a=0),\\-a & (a<0).\end{cases}$$

一个实数的绝对值就是实数在数轴上的对应点到原点的

距离．相反数的绝对值相等．

用正实数可以表示线段的长度．

（4）倒数：两个实数的乘积等于1，其中一个数叫做另一个数的倒数．0没有倒数．

（5）实数的大小：在数轴上表示两个实数，右边的总比左边的大．由此可得：

正数都大于0；负数都小于0；正数大于一切负数；两个负数，绝对值大的反而小．

当实数$a\geqslant 0$时，常称a是非负数．

例1 如果实数x满足$x|x-1|+|x-1|=8$，试求x．

解：解这个方程，必须先去掉绝对值符号，当$x\geqslant 1$时，$|x-1|=x-1$．则原方程化为

$$x(x-1)+x-1=8.$$

化简后，得$x^2=9$．

$\therefore\quad x=\pm 3$．舍去$x=-3$．

$\therefore\quad x=3$．

当$x<1$时，$|x-1|=1-x$，则原方程化为

$x(1-x)+(1-x)=8$．

化简后，得 $x^2=-7$．(无实根)

$\therefore\quad x=3$．

例2 如果实数a和b满足$\begin{cases}a+b=6,\\ab=4.\end{cases}$不解方程，试判断$a$和$b$是有理数还是无理数？

解：由$\begin{cases}a+b=6,\\ab=4.\end{cases}$可得

a和b一定是方程$x^2-6x+4=0$的两根．这个二次方程的系数都是有理数，则它的判别式

$\triangle=(-6)^2-4\times4=20$.

由于判别式△不是完全平方数，

∴ a和b同是无理数.

例3 试求$\sqrt{15}+\sqrt{8}$这个无理数的小数部分.

解：∵ $3<\sqrt{15}<4$，$2<\sqrt{8}<3$，

∴ $5<\sqrt{15}+\sqrt{8}<7$

∴ $\sqrt{15}+\sqrt{8}$的整数可能是5或6. 易于验证 $\sqrt{15}+\sqrt{8}>6$.

∴ $\sqrt{15}+\sqrt{8}$的小数部分为

$\sqrt{15}+\sqrt{8}-6$.

（二）练 习 一

1. 选择题

（1）如果实数x满足$|x|-x\geqslant0$，则x是〔 〕

（A）负数. （B）零或负数.

（C）非负数. （D）实数.

（2）如果实数a和b满足$\left|\frac{a}{b}\right|=1$，则$a$和$b$的关系是〔 〕

（A）$a=b$. （B）$a=\pm b$.

（C）$a^2=b^2$. （D）$a=\pm b\neq0$.

（3）如果实数a满足$\sqrt{-a}=\sqrt[3]{a}$，则a的值是

（A）-1. （B）1. （C）0. （D）不存在.

（4）如果实数a和b满足$a^2>b^2$，则a和b的关系是〔 〕

(A) $a>b$.　　　　(B) $a>\pm b$.

(C) $a>|b|$.　　　　(D) $|a|>|b|$.

(5) $\sqrt{\dfrac{81}{16}}$的算术平方根是

(A) $\dfrac{9}{4}$.　　　　(B) $\pm\dfrac{9}{4}$.

(C) $\pm\dfrac{3}{2}$.　　　　(D) $\dfrac{3}{2}$.

2．判断：下面各命题正确的打√号；错误的打×号.

(1) 如果$a>b$，则$a^2>b^2$. (　　　)

(2) 如果$|a|=|b|$，则$a=\pm b$. (　　　)

(3) 若a是有理数，b是无理数，则积ab一定是无理数. (　　　)

(4) 若a和b都是无理数，则积$ab\neq 0$. (　　　)

(5) 两个正无理数的和，可能是一个正整数吗？(　　　)

(6) 无限小数都是无理数吗？(　　　)

(7) 任意一个实数的算术平方根只有一个. (　　)

(8) $\sqrt{2}$是最小的无理数. (　　　)

(9) 如果实数a和b至少有一个不为零，则$a^2+b^2>0$.

(10) 实数a是有理数又是无理数. (　　　)

3．填空

(1) 满足$2\leqslant|x|<5\dfrac{1}{2}$的负整数$x$是________.

（2）一个数的倒数的相反数是$-\frac{2}{5}$，则这个数是

____________.

（3）一个数的倒数是它本身，则这个数是______.

（4）一个数的绝对值是它的相反数，则这个数是

________.

（5）如果$a+|a|>0$，则a是____________.

（6）若实数a满足$\frac{a}{|a|}=-1$，则a是________.

（7）最大的负整数是____________；最小的正数数是____________；绝对值最小的实数是____________.

（8）用科学记数法表示，$2500^2=$____________.

（9）实数a满足$|a|>5$，其中最小的正整数$a=$____________；最大的负整数$a=$____________.

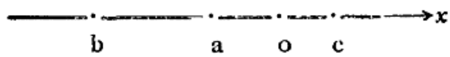
（10）$\sqrt{6}-\pi-\sqrt{2}$（精确到0.01）是__________.

4．解方程$\sqrt{x^2}+\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[4]{x^4}=6$.

5．如果非零的有理数a，b，c，d，e，满足$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}=e$试求$a$，$b$，$c$，$d$，$e$之间的关系。

6．如果实数x和y满足$x^2+4y^2+2x-4y+2=0$，试求$x:y$的值。

7．实数a、b、c在数轴上的相应的点的位置如图所示，化简：$\sqrt{a^2}+|a-b|+|a+b|+|-3c|$.



（图 1 — 1）

8．计算：

（1）$\left[1\frac{1}{24}-\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{6}-0.75\right)\times 24\right]\div 5$；

（2）$[(-3)^3-(-5)^3]\div[(-3)-(-5)]$．

二 有 理 式

（一）整式及类型题分析

1．代数式的分类

（1）代数式：用运算（加、减、乘、除、乘方、开方）符号把数或表示数的字母连结而成的式子．

单独的一个数或者一个字母，也是代数式．由于代数式里的每一个字母都表示数，所以有关数的运算律，也适用于代数式．

用数值代替代数式里的字母，计算后所得的结果叫做代数式的值．

（2）有理式：只含有加、减、乘、除、乘方运算（包含数字开方运算）的代数式．

（3）无理式：含有关于字母开方运算的代数式．

（4）分式：除式中含有字母的有理式．

（5）整式：除式中不含有字母的有理式．

因此，代数式的分类为

$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\\ \text{分式}\end{cases}\\ \text{无理式}\end{cases}$$

2．和整式运算有关的一些问题

（1）正整数指数幂的运算法则：

① $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$；　② $(a^n)^m = a^{nm}$；

③ $(ab)^n = a^n b^n$；　④ $a^n \div a^m = a^{n-m}$；（$a \neq 0$，$n > m$）

⑤ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$．（$b \neq 0$）

上面各式中的n、m都是正整数．

（2）乘法公式：

① $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$；

② $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$；

③ $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$；

④ $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$．

3．因式分解

（1）因式分解：把一个多项式化成几个整式因式的积的形式，叫做多项式的因式分解．

在进行因式分解时，应注意以下几点：

① 注意分解范围．进行因式分解时，一定要注意到是在什么数的范围内进行．若题目没有说明，一般是指在有理数范围内分解．

② 因式分解要分解到每个因式在指定数的范围内都不能再分解时为止.

③ 分解时遇有重因式时，应把重因式写成幂的形式.

（2）因式分解的方法：

① 提取公因式法：$ma+mb+mc=m(a+b+c)$.

多项式的各项都含有相同的因式，叫做多项式各项的公因式.

② 应用公式分解法：根据多项式因式分解的意义，可以知道，如果把乘法公式反过来，就可以用来把某些多项式分解因式.

常用的公式有：

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b);$$

$$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2;$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2);$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

③ 分组分解法：如果能把一个多项式的各项适当地分组，使分组后各组间有公因式，那么这个多项式就可以用分组的方法来分解因式. 利用分组分解法，必须要预见到下一步分解的可能性，主要是分组后能否提取公因式，或者是分组后能否应用公式.

④ 二次三项式ax^2+bx+c的因式分解：

十字相乘法：对于系数比较简单的二次三项式可分解为

$$ax^2+bx+c=(px+m)(qx+n).$$

用这种方法的关键是在于掌握二次项系数a的两个因数p、q 常数项c的两个因数m、n与一次项系数b的关系. 即$pq=a$　$mn=c$，$pn+mq=b$.

配方法：某些二次三项式利用配方法变换成平方差的形

式进行分解。

利用求根公式分解因式：如果我们用求根公式，先求出一元二次方程$ax^2+bx+c=0$的根：$x_1=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，$x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，那么由根与系数的关系可知：

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2=\frac{c}{a},$$

就是 $\dfrac{b}{a}=-(x_1+x_2)$，$\dfrac{c}{a}=x_1x_2$。

所以 $$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$
$$=a[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2]$$
$$=a(x-x_1)(x-x_2).$$

即 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

对于二次三项式的因式分解，先考虑用十字相乘法分解，不行时再用求根公式法分解。

例1 计算：

（1）$(a+b)^2(a-b)^2(a^2+b^2)^2$。

（2）$(a+2b)^3(a-2b)^3$.

解：

（1）原式$=[(a+b)(a-b)]^2(a^2+b^2)^2$
$$=(a^2-b^2)^2(a^2+b^2)^2$$
$$=[(a^2-b^2)(a^2+b^2)]^2$$
$$=(a^4-b^4)^2$$
$$=a^8-2a^4b^4+b^8.$$

（2）原式$=[(a+2b)(a-2b)]^3$

$$=(a^2-4b^2)^3$$

$$=a^6-3a^4(4b^2)+3a^2(4b^2)^2-(4b^2)^3$$

$$=a^6-12a^4b^2+48a^2b^4-64b^6.$$

例2 计算：

（1） $(x-3)(x-1)(x+1)(x+3)$；

（2） $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.

解：

（1）原式$=[(x-1)(x+1)][(x-3)(x+3)]$

$$=(x^2-1)(x^2-9)$$

$$=x^4-10x^2+9.$$

（2）原式$=[(x-1)(x-4)][(x-2)(x-3)]$

$$=(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)$$

$$=(x^2-5x)^2+10(x^2-5x)+24$$

$$=x^4-10x^3+25x^2+10x^2-50x+24$$

$$=x^4-10x^3+35x^2-50x+24.$$

例3 计算：

（1） $(a+b+c)^2$ （2） $(2a-3b+c)^2$.

解：

（1）原式$=[a+(b+c)]^2$

$$=a^2+2a(b+c)+(b+c)^2$$

$$=a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$$

$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca.$$

（2）由（1）的展开式，可得

$$(2a-3b+c)^2=(2a)^2+(-3b)^2+c^2+2(2a)(-3b)+2(-3b)c+2c\cdot(2a)$$

$$=4a^2+9b^2+c^2-12ab-6bc+4ca.$$

例 4 分解因式：

（1）$a^2-b^2-c^2+d^2-2ad+2bc$；

（2）$(a^2-1)(b^2-1)-4ab$；

（3）$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$。

解：

（1）$$\text{原式}=(a^2+d^2-2ad)-(b^2+c^2-2bc)$$
$$=(a-d)^2-(b-c)^2$$
$$=(a-d+b-c)(a-d-b+c).$$

（2）$$\text{原式}=a^2b^2-a^2-b^2+1-4ab$$
$$=(a^2b^2-2ab+1)-(a^2+2ab+b^2)$$
$$=(ab-1)^2-(a+b)^2$$
$$=(ab-1+a+b)(ab-1-a-b)$$
$$=(ab+a+b-1)(ab-a-b-1).$$

（3）$$\text{原式}=[(a+b+c)^3-a^3]-(b^3+c^3)$$
$$=(b+c)[(a+b+c)^2+a(a+b+c)+a^2]$$
$$-(b+c)(b^2-bc+c^2)$$
$$=(b+c)(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca+a^2$$
$$+ab+ac+a^2-b^2+bc-c^2)$$
$$=(b+c)(3a^2+3ab+3bc+3ca)$$
$$=3(b+c)[a^2+a(b+c)+bc]$$
$$=3(b+c)(a+b)(a+c)$$
$$=3(a+b)(b+c)(c+a).$$

例 5 分解因式：

（1）$6x^2-11x-10$；　　（2）$3-10x-8x^2$；

（3）$50x^2-45x-18$；　　（4）$x^2+4xy+4y^2-2x-4y-3$.

解：