高等学校教学用書

高等数学教程

第二卷 第二分册

B. И. 斯米尔諾夫著

高等教育出版社

統一書号 13010・114
定价 ¥1.10

高等学校教学用書

高等数学教程

第二卷 第二分册

B. И. 斯米尔諾夫著
孙念增譯

高等教育出版社

本書系根据1952年苏联国立科学技术理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的斯米尔諾夫(В. И. Смирнов)著"高等数学教程"(Курс высшей математики) 第二卷第十一版譯出的，这次是照原書的十四版（1956年版）修訂过的，并改正了原譯本中的个別錯誤。原書經苏联高等教育部审定为綜合大学数理系以及高等工业学院需用較高深数学的各系作为教本之用。

本書系榮获斯大林獎金的著作。

高等数学教程

第二卷　第二分册

В. И. 斯米尔諾夫著

孙　念　增　譯

高等教育出版社出版　北京宣武門內承恩寺7号

（北京市書刊出版业营业許可証出字第054号）

上海新华印刷厂印刷　新华書店发行

統一書号 13010·114　开本 850×1168 1/32　印張 9 13/16

字数 282,000　印数 32,501—42,500　定价（4）¥ 1.10

1956年4月新1版　1959年2月第2版（修訂本）

1959年2月上海第8次印刷

第二分册目次

第三章　重积分、曲綫积分、反常积分及依賴于参变量的积分………157

§6. 重积分

54. 容积(157)　55. 二重积分(161)　56. 二重积分的計算法(163)　57. 曲綫坐标(167)　58. 三重积分(171)　59. 柱面坐标与球面坐标(176)　60. 空間的曲綫坐标(181)　61. 重积分的基本性質(183)　62. 曲面的面积(184)　*63. 曲面积分与奥斯特洛格拉得斯基公式(187)　64. 沿确定一側的曲面积分(191)　65. 矩(193)

§7. 曲綫积分

66. 曲綫积分的定义(197)　67. 力場作的功.例(201)　68. 面积与曲綫积分(205)　69. 格林公式(207)　70. 司鐸克斯公式(210)　71. 平面上曲綫积分与路徑的无关性(213)　72. 复通区域的情形(218)　73. 空間中曲綫积分与路徑的无关性(221)　74. 流体的稳定流动(223)　75. 积分因子(224)　76. 三个变量的全微分方程(230)　77. 二重积分的換元法則(231)

§8. 反常积分与依賴于参变量的积分

78. 积分号下求积分法(234)　79. 狄义赫利公式(236)　80. 积分号下求导数法(239)　81. 例(242)　82. 反常积分(246)　83. 非絕对收斂积分(251)　84. 一致收斂积分(254)　85. 例(257)　86. 反常重积分(260)　87. 例(265)

§9. 关于重积分理論的补充知識

88. 預备概念(270)　89. 集合論中的基本定理(271)　90. 外面积与内面积(273)　91. 可求面积的区域(275)　92. 与坐标軸的选擇的无关性(277)　93. 任何多維空間的情形(278)　94. 达尔补定理(279)　95. 可积函数(281)　96. 可积函数的性質(282)　97. 二重积分的計算法(283)　98. n 重积分(285)　99. 例(286)

第四章　矢量分析及場論………288

§10. 矢量代数基础

100. 矢量加减法(288)　101. 矢量乘以数量.矢量的共面性(290)　102. 矢量沿三个不共面的矢量的分解法(291)　103. 数量积(292)　104. 矢量积(294)　105. 数量积与矢量积之間的关系(297)　106. 剛体轉动时速度的分布;矢量的矩(300)

§ 11. 場論

107. 矢量的微分法(301)　108. 数量場及其梯度(304)　109. 矢量場.旋度与散度(307)　110. 势量場与管量場(311)　111. 定向曲面單元(313)　112. 矢量分析中几个公式(316)　113. 剛体的运动及微小形变(317)　114. 連續性方程(319)　115. 理想流体的流体动力方程(323)　116. 声的傳播方程(324)　117. 热傳导方程(325)　118. 馬克士威方程(328)　119. 拉普拉斯算子在正交坐标系的表达式(330)　120. 对于变場情形求导数的运算(337)

第五章　微分几何基础……342

§ 12. 在平面和空間中的曲綫

121. 平面曲綫,它的曲率与漸屈綫(342)　122. 漸伸綫(349)　123. 曲綫的本質方程(350)　124. 空間曲綫的基本元素(351)　125. 富列耐公式(355)　126. 密切平面(356)　127. 螺旋綫(357)　128. 單位矢量場(359)

§ 13. 曲面理論初步

129. 曲面的参变方程(360)　130. 高斯第一微分式(363)　131. 高斯第二微分式(365)　132. 关于曲面上的曲綫的曲率(367)　133. 杜潘指示綫与尤拉公式(371)　134. 主曲率半徑与主方向的确定(373)　135. 曲率綫(375)　136. 杜潘定理(378)　137. 例(379)　138. 高斯曲率(381)　139. 面积單元的变値与曲率中值(382)　140. 曲面族与曲綫族的包絡(386)　141. 可展曲面(389)

第六章　富里埃級数……392

§ 14. 調和分析

142. 三角函数的正交性(392)　143. 狄义赫利定理(397)　144. 例(398)　145. 在区間$(0, \pi)$上的展开式(401)　146. 以$2l$为周期的周期函数(405)　147. 平方中値誤差(407)　148. 一般的正交函数系(412)　149. 实用的調和分析(417)

§ 15. 富里埃級数理論中的补充知識

150. 富里埃級数展开式(423)　151. 第二中値定理(429)　152. 狄义赫利积分(431)　153. 狄义赫利定理(434)　154. 用多項式作連續函数的逼近(436)　155. 封閉性公式(441)　156. 函数系的封閉性質(444)　157. 富里埃級数收斂性的特征(447)　158. 富里埃級数收斂性的改善(451)　159. 例(453)

§ 16. 富里埃积分及重富里埃級数

160. 富里埃公式(456)　161. 复数式富里埃級数(463)　162. 重富里埃級数(464)

第三章　重积分、曲綫积分、反常积分及依賴于参变量的积分

§6.　重积分

54. 容积　到現在为止我們所講作为和的極限的定积分

$$\int_a^b f(x)dx$$

是就函数 $f(x)$ 确定在 OX 軸的一个綫段 (a, b) 上的情形考虑的。換句話說，积分区域总是某一个直綫段。

在这一节中我們把积分概念推广到下列情形：积分区域是平面上某一个区域，或是空間中某一个区域，或者甚至于是随便一个曲面上的某一个区域。在这一节的討論中，我們利用对面积与容积的直觉看法，而不細講有关取極限时一些論点的根据。在本章的最末一节我們再講严格討論的基本关鍵。我們由两次积分的概念开始，它連系着計算容积的問題，就像上面写的积分連系着計算面积的問題一样，所以，在引进两次积分的概念之前，我們先看計算容积的問題。

我們知道，計算界于曲綫 $y=f(x)$，OX 軸以及两个縱坐标：$x=a$, $x=b$ 之間的面积問題，是利用定积分的概念解决的，而这面积正是由上面写的定积分来表达的[I, 87]。

現在我們来看一个类似的問題，就是計算物体的容积 v，这物体的界面是：已知的曲面 (S)，它的方程是

$$z=f(x, y); \tag{1}$$

平面 XOY，以及一个柱面 (C)，这个柱面的母綫平行于 OZ 軸，

它把(S)投影到平面 XOY 的区域(σ)上(圖 33)。

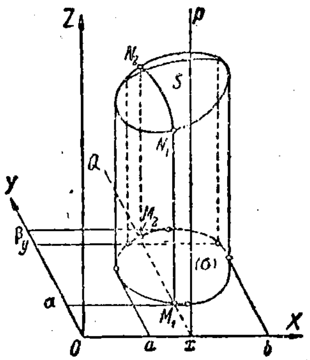

圖　33

在 [**I, 104**] 中我們講过用定积分計算物体的容积，为此只需要知道物体的平行断面；对于现在的問題我們也应用这个方法。

为簡單起見，我們設曲面(S)整个在平面 XOY 之上，并且平行于坐标軸的直綫与(σ)的界綫(l)相交时至多交于两点。

用平行于平面 YOZ 的平面把所考慮的物体分开，这些平面与平面 XOY 的交綫是平行于 OY 軸的直綫(圖 33 与 34)。把两个極端断面的横坐标各記作 a 与 b。这也就是界綫(l)上把該界綫分为两部(1)与(2)的点的横坐标，这两部分(1)与(2)中，一个是

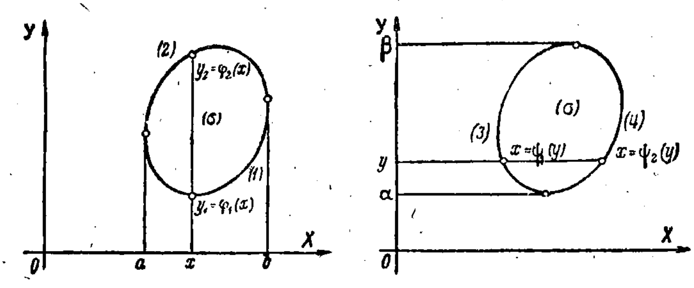

圖　34

平行于 OY 軸的直綫穿入区域(σ)的位置，一个是穿出的位置(圖 34)。每一部分各有它的方程

$$y_1=\varphi_1(x);\quad y_2=\varphi_2(x)。\qquad (2)$$

与 YOZ 距离为 x 的平面 PQ 在物体上截下的断面，它的面积是依賴于 x 的，我們把它記作 $S(x)$。于是就有[**I, 104**]

$$v=\int_a^b S(x)dx。\tag{3}$$

現在只要求函数 $S(x)$ 的表达式，这函数就是圖形 $M_1N_1N_2M_2$ 的面积；它位于平面 PQ 上，它的界綫是：平面 PQ 与曲面 (S) 相交的曲綫 N_1N_2，平行于 OY 軸的直綫 M_1M_2 以及两个縱标 M_1N_1 与 M_2N_2。

因为对所考慮的断面来講，所有的点的 x 是常数，曲綫 N_1N_2 的縱标可以算作是 y 的函数，这个函数是当 x 是常数时由下面这方程确定的

$$z=f(x, y),$$

这时自变量 y 取在区間 (y_1, y_2) 上，其中 y_1 与 y_2 是直綫 M_1M_2 穿入区域 (σ) 与穿出这个区域的点的縱坐标。

根据[I, 87]可以写成：

$$S(x)=\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)dy;$$

代入到(3)中就有：

$$v=\int_a^b dx\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)dy。\tag{4}$$

如此，我們得到容积的一个表达式是两次积分的形状，这里先把 x 看作常数，对 y 求出积分，然后把所得到的結果对 x 求积分。

用平行于平面 XOZ 的平面分割所給的物体，我們得到同一个容积的另一个表达式：

$$v=\int_\alpha^\beta dy\int_{x_1}^{x_2} f(x, y)dx,\tag{5}$$

其中 x_1 与 x_2 是 y 的已知函数：

$$x_1=\psi_1(y);\ x_2=\psi_2(y),\tag{6}$$

而 α 与 β 表示界綫 (l) 上的 y 的两个極端值(圖 33 与 34)。

公式(4)与(5)是在两个假定下推出的：1. 曲面 (S) 整个位于平面 XOY 之上；2. 曲面 (S) 在平面 XOY 上的投影 (σ) 的界

綫(l)与平行于一个坐标軸的任何直綫最多交于两点。若不滿足条件1，則公式(4)与(5)的右边所給出的不是眞正的容积，而是容积的代数和，其中位于平面 XOY 之上的容积带(+)号；位于其下的带(−)号。若不滿足条件2，例如(圖35)，界綫(l)与直綫 $x=$常数的交点有好几对，則需要把区域(σ)分为几部分，使得每一部分滿足条件2，与这对应的，曲面(S)与容积 v 也就被分为几部分，計算每一部分的容积时公式(4)是适用的。

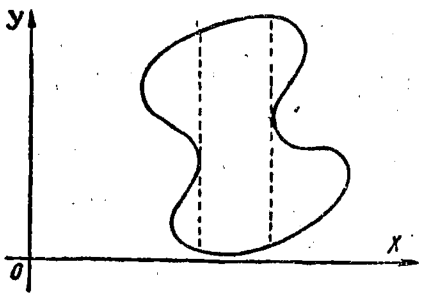

圖 35

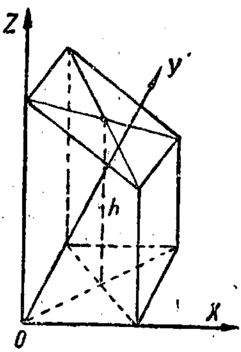

圖 36

例 1. 正稜柱的截断的容积(圖36)。底是由坐标軸 OX, OY 与直綫 $x=k$, $y=l$ 形成的。截面的方程是

$$\frac{x}{\lambda}+\frac{y}{\mu}+\frac{z}{\nu}=1。$$

在这情形下公式(4)給出：

$$v=\int_0^k dx\int_0^l z\,dy=\int_0^k dx\int_0^l \nu\left(1-\frac{x}{\lambda}-\frac{y}{\mu}\right)dy=\nu\int_0^k dx\left(y-\frac{xy}{\lambda}-\frac{y^2}{2\mu}\right)\Big|_{y=0}^{y=l}=$$

$$=\nu\int_0^k\left(l-\frac{xl}{\lambda}-\frac{l^2}{2\mu}\right)dx=\nu\left(kl-\frac{k^2l}{2\lambda}-\frac{kl^2}{2\mu}\right)=kl\cdot\nu\left(1-\frac{k}{2\lambda}-\frac{l}{2\mu}\right)=\sigma h,$$

其中 σ 是底面积，h 是上截面的对角綫交点$\left(对应于\ x=\frac{k}{2},\ y=\frac{l}{2}\right)$的縱标。

2. 求橢圓体 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$ $\frac{x^2}{a^2(1-\frac{z^2}{c^2})}+\frac{y^2}{b^2(1-\frac{z^2}{c^2})}=1$

的容积。用平面 $z=$常数截这橢圓体时，得到橢圓，具有半軸長

$$a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}},\quad b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}},$$

于是利用

$$S(z)=\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right),$$

因而所求的容积是

$$v=\int_{-c}^{+c}\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz=\frac{4}{3}\pi abc。$$

55. 二重积分 为要得到曲綫 $y=f(x)$ 下的面积的近似式，我們[I, 87] 把它分为竪条，并且用一些矩形来替代每一个竪条的面积，这些矩形的底各是每一个竪条的底，而高等于这个竪条上曲綫的縱坐标的某一个中間值。当竪条的数目增加而每一个都趋向零时，差誤→0，于是由近似式取極限就成为定积分，它給出面积的准确表达式。

計算容积时也可以用类似的作法。把区域(σ)(圖 37) 分成很多个任意形状的小單元 $\Delta\sigma$，这里我們一方面用 $\Delta\sigma$ 記这些个小区域，另一方面也用 $\Delta\sigma$ 記它們的面积。以每一个这样的單元为底作一个柱体直到与曲面(S)相交，就把容积 v 分为單元容积。显然，我們可以取一个柱体的容积作为这样的單元容积的近似值，这个柱体的底也是 $\Delta\sigma$，而高是一个縱标，也就是投影为 $\Delta\sigma$ 的曲面單元上任何一点的 z 的值。換句話說，这就是在 $\Delta\sigma$ 上任取一点 N，为簡短起見，把曲面 (S) 上对应于点 N 的点 M 的縱标記作 $f(N)$，也就是函数 $f(x, y)$ 在 N 点的值，我們就得到單元容积为 $f(N)\Delta\sigma$，于是

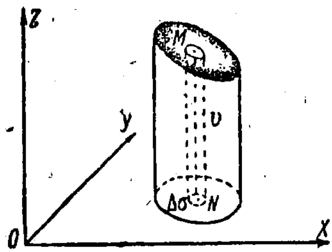

圖 37

$$v\sim\sum_{(\sigma)}f(N)\Delta\sigma,$$

这里要对于填滿面积(σ)的所有的單元面积 $\Delta\sigma$ 求和。

每一个單元 $\Delta\sigma$ 愈小，而且單元的数目 n 愈多时，所得到的近

似公式就愈准确，取極限后可以写成：

$$\lim \sum_{(\sigma)} f(N)\,\Delta\sigma = v。$$

抽去几何的形象，不管函数 $f(N)$ 的几何意义，我們还是可以确定这个和的極限，这个極限叫做函数 $f(N)$ 沿区域 (σ) 的二重积分，并且表示成：

$$\iint_{(\sigma)} f(N)\,d\sigma = \lim \sum_{(\sigma)} f(N)\,\Delta\sigma。$$

这个極限的存在是很明显的，因为像我們以上所講的，这个極限应当給出以上我們所作的容积 v。自然这种論証不是严格的，不过，对于具有一般条件的 $f(N)$ 以及所有的連續函数的任何情形，上述極限的存在可以严格証明。

若我們設 $f(N)=1$，則得到区域 (σ) 的面积 σ 的一个表达式，而是二重积分的形状：

$$\sigma = \iint_{(\sigma)} d\sigma。$$

我們来叙述二重积分的完全定义：設 (σ) 是一个有界的平面区域，$f(N)$ 是这个区域上的点的函数，就是說，在区域 (σ) 的每一点 N 取确定值的一个函数。把区域 (σ) 分为 n 个部分区域，并設 $\Delta\sigma_1,\ \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$ 是这些部分的面积，而 $N_1,\ N_2, \cdots, N_n$ 各为这些部分上的任一点。作出乘积的和：

$$\sum_{k=1}^{n} f(N_k)\cdot\Delta\sigma_k。$$

当分成的数目 n 无限增加，而每一个部分区域无限减小，这个和的極限就叫做函数 $f(N)$ 沿区域 (σ) 的二重积分

$$\iint_{(\sigma)} f(N)\,d\sigma = \lim \sum_{k=1}^{n} f(N_k)\,\Delta\sigma_k。$$

附注 設 d_k 是面积为 $\Delta\sigma_k$ 的部分区域中两点間的最大距离

(这个区域的直徑)，而 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 中的最大的数是 d。在定义中所說的每一个部分区域 $\Delta\sigma_k$ 无限减小这句話就具有 $d\to 0$ 的意义。如果用字母 I 来記积分的数値，則上述定义就相当于：对于給定的任何正数 ε，存在这样一个正数 η，使得［参考 **I, 87**］只要 $d\leqslant\eta$，則

$$\left|I-\sum_{k=1}^{n} f(N_k)\Delta\sigma_k\right|\leqslant\varepsilon。$$

在本章末，討論重积分的完整理論时，我們才引出面积的严格定义，并且更准确的講可以求积分的那样的区域 (σ) 的概念，以及如何把它分成各部分区域，并且对于連續函数 $f(N)$ 以及某些类的間断函数，来証明上述和的極限的存在。

56. 二重积分的計算法 把二重积分考慮作容积，我們可以把二重积分化为两次积分。

对于区域 (σ) 应用直角坐标，設用平行于坐标軸的直綫，把区域 (σ) 的面积分割成具有边为 Δx, Δy 的矩形，得到單元 $\Delta\sigma$（圖 38），并設 (x, y) 是点 N 的坐标。这时可以写成：

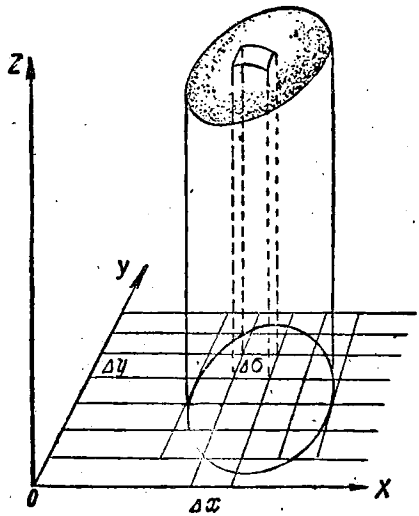

圖 38

$$f(N)=f(x, y);\quad \Delta\sigma=\Delta x\Delta y;\quad d\sigma=dx\,dy,$$

并且

$$\iint_{(\sigma)} f(N)d\sigma=\lim\sum_{(\sigma)} f(x, y)\Delta x\Delta y=\iint_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy。$$

另一方面，应用[54]中所講的用两次积分来表达容积的方法，这可以写成：

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\,dy=\int_\alpha^\beta dy\int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\,dx, \quad (7)$$

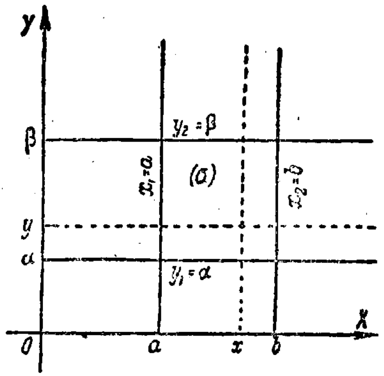

圖 39

这就給出計算二重积分的法则，而与函数 $f(x, y)$ 的几何意义无关。

若是先对 y 求积分，則这时 x 算作常数，而积分限 y_1 与 y_2 是 x 的函数，这两个函数是由[54]中公式(2)所确定的。若先对 x 求积分，也有类似的情況。只有当积分区域是个矩形，它的边平行于坐标軸时，在两次积分中先求积分的积分限才可能是常数，而不依賴于第二次积分的积分变量。若 (σ) 是界于直綫(圖 39)：

$$x=a;\quad x=b;\quad y=\alpha;\quad y=\beta$$

的矩形区域，則

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_\alpha^\beta f(x, y)\,dy=\int_\alpha^\beta dy\int_a^b f(x, y)\,dx。\quad (8)$$

表达式 $d\sigma=dx\,dy$ 叫做在直角坐标系中的面积單元。

注意，在公式(7)中把 x 看作常数先对 y 求积分这件事，就对应于沿着平行于 OY 軸的一竪条内所含的矩形求和，其中所有的矩形有相同的寬度 dx，它被提出在第一次求积分的記号之外。第二次对 x 求积分对应于把沿平行于 OY 軸各条求和所得的所有結果再相加。在本章最后一节中我們要給出公式(8)与(7)的严格論証。

如果平行于坐标軸的直綫与(σ)的界相交多于两个交点，則应当像在[54]說过的那样来处理。

当然，这里和以后我們假設說到的积分存在[看95]。为此，只要使得被积函数在(σ)直到它的边界上都連續，我們还假設，区域(σ)滿足[91]中在論証积分概念时所說的条件。

現在我們用極坐标(r, φ)来处理区域(σ)。这时曲面(S)的方程应当写成$z=f(r, \varphi)$。

画出曲綫族$r=$常数以及$\varphi=$常数，就是同心圓周以及通过原点的射綫，我們得到單元$\Delta\sigma$(圖40)。

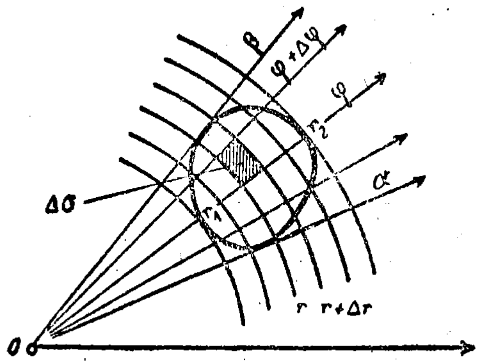

圖　40

半徑为r与$(r+\Delta r)$的圓弧以及斜角为φ与$(\varphi+\Delta\varphi)$的两条射綫交成的曲綫圖形$\Delta\sigma$，可以考慮作边長为Δr与$r\Delta\varphi$的矩形，所差的只是高級的无穷小，于是

$$\Delta\sigma=r\Delta r\Delta\varphi,$$

这时可以写成：

$$\iint_{(\sigma)} f(N)d\sigma=\lim\sum_{(\sigma)} f(r, \varphi)\, r\Delta r\Delta\varphi=\iint_{(\sigma)} f(r, \varphi)\, r\, dr\, d\varphi。$$

这里我們得到一个二重积分，它的被积函数是$f(r, \varphi)r$。为要計算它，可以应用化为两次积分的法則，不过現在只是r与φ起着x与y的作用。

先对r求积分把φ算作常数，这对应于沿着界于两条射綫φ与$(\varphi+d\varphi)$之間的單元$\Delta\sigma$求和，而把$d\varphi$放在第一次求积分的記号之外。第二次对φ求积分对应于把第一次求和所得到的所有結

果相加。应用上述法则时，我們首先标記出变量φ的極端值α与β（对应于[**54**]中x的極端值）。以后对于固定的φ找出射綫$\varphi=$常数穿入与穿出(σ)的点的矢徑r_1与r_2（这对应于在[**54**]中确定y_1与y_2）。确定了这些已知量，就有：

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(N)d\sigma=\iint\limits_{(\sigma)} f(r,\varphi)r\,dr\,d\varphi=\int_{\alpha}^{\beta}d\varphi\int_{r_1}^{r_2}f(r,\varphi)r\,dr, \quad (9)$$

其中r_1与r_2是φ的已知函数。

圖40对应于坐标原点在界綫(l)外的情形。若原点在界綫(l)內，則可把φ看作是由0变到2π，并且对于給定的φ值r由0变到r_2，其中r_2来自曲綫(l)的方程：$r_2=\psi(\varphi)$，这就給出（圖41）：

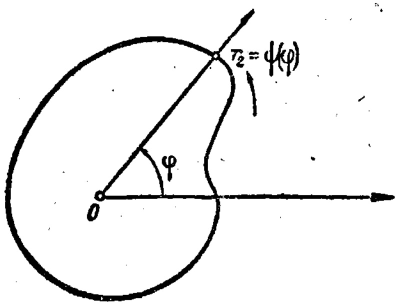

圖 41

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(N)d\sigma=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{r_2}f(r,\varphi)r\,dr。$$

表达式
$$r\,dr\,d\varphi \quad (10)$$
叫做極坐标系中的面积單元。

特别是，若$f(N)=1$，我們就得到在[I, **102**]中所講的曲綫所包的面积的極坐标表达式：

$$\int_{\alpha}^{\beta}d\varphi\int_{r_1}^{r_2}r\,dr=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(r_2^2-r_1^2)d\varphi。$$

（[I, **102**]中的公式对应于$r_2=r$, $r_1=0$的情形。）

例 求界于半徑为a的球与通过球心的半徑为$\frac{a}{2}$的正圓柱之間的容积（圖42）。取球心作坐标原点，通过球心垂直于圓柱的軸的平面作为平面XOY，通过球心以及平面XOY与圓柱的軸的交点的直綫作为OX軸。根据对称性，可以說，所求的容积是界于平面ZOX，XOY以及上半球之間的一部分圓柱体的容积的四倍。

这里积分区域是圓柱的半个底，它的界綫由半圓周

$$r=a\cos\varphi$$

以及 OX 軸上的綫段組成，其中角度 φ 由 0 变到 $\frac{\pi}{2}$，对应于射綫——由 OX 軸到 OY 軸。

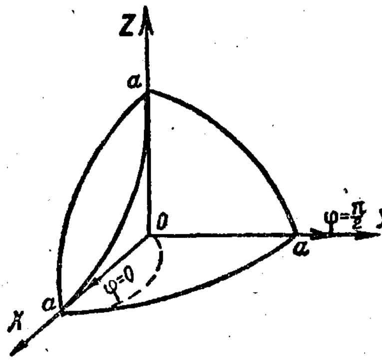

圖 42

球面的方程

$$x^2+y^2+z^2=a^2,$$

在这情形下可以写成：

$$z^2=a^2-(x^2+y^2);\quad z=\sqrt{a^2-r^2}。$$

所以，所求的容积是：

$$v=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\cos\varphi}\sqrt{a^2-r^2}\,r\,dr=$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_{r=0}^{r=a\cos\varphi}d\varphi=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^3-a^3\sin^3\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\frac{4}{3}a^3\left[\varphi+\cos\varphi-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]\Bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)。$$

57. 曲綫坐标　在前一段中，我們就直角坐标与極坐标的情形，确定了面积單元，并且考慮了計算积分的問題。現在我們就任何的坐标 (u, v) 来考慮这个問題。依照公式

$$\varphi(x, y)=u;\quad \psi(x, y)=v。\tag{11}$$

引用任何的新的变量 u 与 v 来替代直角坐标 x 与 y。

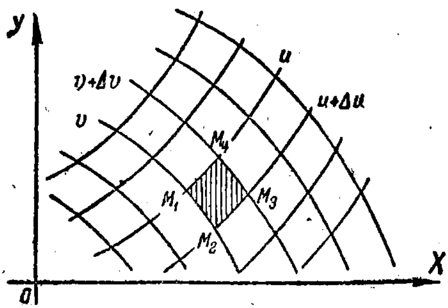

圖 43

給 u 与 v 所有可能的常数值，在平面上就得到两族綫(圖 43)，一般說来，这些綫都是曲綫。平面上点 M 的位置是由一对数 (x, y) 来确定的，或者根据 (11)，它就被一对数 (u, v) 所确定。这一对数 (u, v) 叫做点 M 的曲綫坐标。由方程 (11) 解出 x 与 y，就得到直角坐标 (x, y) 通过曲綫坐标 (u, v) 的表达式：