21世纪普通高等学校数学系列规划教材

线性代数学习指导

陈克东 主编

中国铁道出版社

CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

21世纪普通高等学校数学系列规划教材

线性代数学习指导

陈克东 主编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内容简介

本系列教材遵循普通高校工科本科《高等数学课程教学基本要求》，按照新形势下教材改革精神，结合编者长期的教学教改实践编写。

本系列教材以“数学思想方法是数学教学的灵魂”为指导思想，努力突出高等数学的基本思想、基本理论和基本方法，在数学知识、数学能力、数学素质三维空间构建其教学内容体系。同时，注意渗透现代数学的思想、观念、语言、方法和符号，为现代数学初步提供内容展示的“窗口”和延伸发展的“接口”，以利于教与学、理论与应用、课内与课外的结合，以利于提高学生数学素质与创新能力。

本书是陈克东主编的《线性代数》分册的配套教材，内容包括矩阵、线性方程组与向量空间、矩阵的相似对角化和二次型等内容。每一章都按照内容提要、重点与难点、典型例题分析、部分习题解答四部分撰写。

本书适合作为理工类和经管类各专业本科生线性代数课程的教学参考书，也可以作为考研的强化训练指导书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导/陈克东主编. 一北京：中国铁道出版社，2008.7
(21 世纪普通高等学校系列规划教材)
ISBN 978-7-113-08826-2

Ⅰ.高… Ⅱ.陈… Ⅲ.线性代数一高等学校一教学参考资料 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 111295 号

书　　名：线性代数学习指导
作　　者：陈克东　主编

策划编辑：李小军　　**责任编辑：**李小军
编辑助理：姚文娟　　**编辑部电话：**(010)63583215
封面设计：付　巍　　**封面制作：**白　雪
责任印制：李　佳

出版发行：中国铁道出版社(北京市宣武区右安门西街 8 号　　邮政编码：100054)
印　　刷：北京市彩桥印刷有限责任公司
版　　次：2008 年 8 月第 1 版　　2008 年 8 月第 1 次印刷
开　　本：787×960　1/16　　**印张：**8.5　　**字数：**176 千
印　　数：4000 册
书　　号：ISBN 978-7-113-08826-2/O·179
定　　价：14.00 元

前　言

线性代数是高等理工科院校和经济管理类院校的公共必修基础课，也是硕士研究生高等数学入学考试的组成内容之一．该课程理论深邃，概念抽象，论证严谨，结构严密，具有一套特有的数学逻辑体系、思想方法和解题技巧．同时，在线性代数中，还有不少运算以及运算法则，又与大学生此前已烙下深刻印象的常规运算以及常规运算法则有不少差异，乃至本质上的不同；再加上教学内容繁多与教学时数偏少的矛盾，使得初学者普遍反映该课程理论深，法则多，难于理解，不易学习．因此，较长时间以来，编者就在思考是否可以编写一本有关线性代数学习的辅导教材，**把大学生在学习中普遍感到困难的问题，容易混淆导致谬误的问题以及借助于独特技巧方能解决的问题等集中起来，分析比较，归纳总结，以进行研究探讨，这样既可以弥补理论教学时的不足，又便于大学生进行自学，从而在总体上提高线性代数的教学效果和学习水平**．不久前，中国铁道出版社希望我们在编写线性代数教材的同时，编写一本与之相配套的线性代数学习指导书，从而使我们这个良好的愿望得以顺利实现．

这本教学辅导书根据高等学校工科本科基础课程教学基本要求之线性代数部分编写．在编写过程中，我们吸收了国内诸多同类教材，尤其是同类教学参考书中某些有益的做法，着力渗透了**编者在工科数学教学改革研究与实践中率先提出的“数学思想方法是数学教学的灵魂”的改革创新理念，反映了编者在多年从事线性代数教学实践中积累起来的一些行之有效的经验与体会**．尤其重点考虑了二、三类本科学生的教学基础．简而言之，本书在编写上起点较低，内容充实，涵盖较广，例题典型，叙述简明，具有启发性、可读性与吸引力．

本书共分 4 章，与陈克东主编的《线性代数》教材相配套．每章都按照内容提要、重点与难点、典型例题分析、部分习题解答四部分编写．本书第 1 章由陈克东编写，第 2 章由段复建编写，第 3 章和第 4 章由陈利霞编写．全书由陈克东统稿、修正、定稿．

本书在编写过程中，得到桂林电子科技大学教务处、数学与计算科学学院，中国铁道出版社的大力支持．中国铁道出版社李小军编辑，桂林电子科技大学张楠、刘翠玉、凌琳诸同志给予了热情帮助，编者在此表示诚挚的谢意．

由于编者的水平所限，书中疏漏之处恐难避免，恳请读者批评指正．

陈克东

2008 年 5 月

目　　录

第 1 章

矩　　阵

§1.1　内 容 提 要

1.1.1　有关定义

1. 矩阵

将 $m\times n$ 个元素排成 m 行 n 列的矩形阵列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

称为一个 m 行 n 列的**矩阵**，简称为 $m\times n$ **矩阵**，记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，简记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$.

当 $m=n$ 时，$\boldsymbol{A}$ 称为 m **阶矩阵**，或 m **阶方阵**. 对于 m 阶矩阵，自左上角到右下角的那一条连线称为**主对角线**，自右上角到左下角的那一条连线称为**副对角线**. 主对角线以下（上）元素都是零的矩阵，称为**上（下）三角形矩阵**. 除主对角线以外的元素全是零的矩阵，称为**对角矩阵**.

在对角矩阵中，若对角线元素都相同，则称为**数量矩阵**，即为

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & \boldsymbol{O} \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{O} & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

在数量矩阵中，若对角线元素都是数“1”，则称为**单位矩阵**，记为 $\boldsymbol{I}$（或 $\boldsymbol{E}$）. 为了区分不同阶的单位矩阵，通常以下标注明，如 $\boldsymbol{E}_5$、$\boldsymbol{E}_n$ 分别表示五阶、n 阶单位矩阵.

元素都是零的 $m\times n$ 矩阵称为**零矩阵**，记为 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$，简记为 $\boldsymbol{O}$.

本书所讨论的矩阵都是实矩阵 —— 即其元素都是实数的矩阵，除非另有说明.

2. 同型矩阵

若矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的行数、列数分别相等，则称 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为**同型矩阵**.

两个同型矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，若 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，则称 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 相等，记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

两个 $m\times n$ 矩阵相等，当且仅当 $m\times n$ 对元素分别相等.

3. 矩阵相加、相减

若矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 是同型矩阵，则称矩阵 $(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$ 为**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相加**，记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$.

称矩阵 $(-a_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**，记为 $-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})_{m\times n}$.

称矩阵 $(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$ 为**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相减**，记为 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$. 且定义 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$.

4. 数乘矩阵

若 λ 是任一实数，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，定义数 λ 乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 $\lambda\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\lambda=(\lambda a_{ij})_{m\times n}$.

5. 矩阵相乘

若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，则由元素 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum\limits_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$，$(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 组成的 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$ 称为**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积**，记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

6. 矩阵的转置

将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一行(列)写成同序号的列(行)，所得到的矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的**转置矩阵**，记为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$(或 $\boldsymbol{A}'$).

若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**对称矩阵**.

若 $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，则称 A 为**反对称矩阵**.

显然，对称矩阵、反对称矩阵都是方阵.

7. 伴随矩阵

若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}(n>1)$ 为 n 阶矩阵，由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一个元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 组成的 n 阶矩阵，称为 $\boldsymbol{A}$ 的**伴随矩阵**，记为 $\boldsymbol{A}^*$，即

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}.$$

注意：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列的元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 应位于伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 i 列第 j 行上，而不是 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 i 行第 j 列上，切勿搞错.

8. 逆矩阵

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{E}$ 是同阶单位矩阵，若存在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，满足

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ **可逆**，称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**逆矩阵**，记为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

逆矩阵若存在，则必唯一.

9. 矩阵的初等变换

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，若

(1) 互换矩阵的某两行，记为 $r_i\leftrightarrow r_j$；

(2) 用非零数 k 乘以矩阵的某一行，记为 kr_i；

(3) 把矩阵的第 i 行的 k 倍加到另一行上，记为 kr_i+r_j；

上述三种变换分别称为**互换变换**、**倍法变换**、**消去变换**. 对矩阵施行这三种类型的变换，统称为矩阵的**初等行变换**.

类似地，可以定义矩阵的初等列变换.

矩阵的初等行变换与初等列变换，统称为矩阵的**初等变换**.

矩阵的初等行(列) 变换皆可逆，且均为同一类型的初等行(列) 变换：

(1) 互换变换 $r_i\leftrightarrow r_j$，其逆变换为 $r_j\leftrightarrow r_i$，仍为互换变换；

(2) 倍法变换 kr_i，其逆变换为$\dfrac{1}{k}r_i$，仍为倍法变换；

(3) 消去变换 kr_i+r_j，其逆变换为 $-kr_i+r_j$，仍为消去变换.

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次的初等变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，记为 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$.

10. 初等矩阵

由单位矩阵经过一次初等变换得到的矩阵，称为**初等矩阵**，亦称为**初等方阵**.

初等矩阵有三种：$E(i,j)$，$E(i(k))$，$E(i(k),j)$，它们分别对应互换变换，倍法变换和消去变换.

对矩阵施行一次初等行(列) 变换，相当于左(右) 乘一个同类型的初等矩阵.

11. 行列式

将 n^2(n 为正整数) 个数组成由 n 行、n 列构成的符号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为 n 阶**行列式**. 行列式 D 是一个算式，其值定义为

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\ (i=1,2,\cdots,n),$$

或
$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\ (j=1,2,\cdots,n),$$

其中，A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式.

行列式有下列性质：

(1) 行列式与其转置行列式相等.

(2) 互换行列式的两行(列),行列式变号.

(3) 如果行列式中有两行(列) 相同,则该行列式等于零.

(4) 行列式的某行(列) 所有元素的公因子可以提到行列式符号外面.

(5) 行列式中如果有两行(列) 对应元素成比例,则该行列式等于零.

(6) 行列式中某行(列) 的所有元素都是两数之和,则该行列式等于两个行列式之和.这两个行列式除了这一行(列) 以外,其余各行(列) 的元素与原来行列式相应各行(列) 的元素相同.

(7) 把行列式的某一行(列)k 倍加到另一行(列) 上,行列式的值不变.

利用上述性质,可以大大简化行列式的计算.

12. 克拉默法则

若 n 个未知数 n 个线性方程的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则线性方程组有**唯一解**

$$x_i = \frac{D_i}{D}, i = 1,2,\cdots,n.$$

其中,D_i 是把 D 的第 i 列元素用线性方程组右端的自由项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 代替后,所得到的 n 阶行列式.

当线性方程组右端的自由项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 不全为零时,称为**非齐次线性方程组**;否则,即当 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 全部为零时,称为**齐次线性方程组**.

显然,若 $D \neq 0$ 时,齐次线性方程组仅有**零解**,即 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$,又称为**平凡解**.

同样,若 $D = 0$ 时,非齐次线性方程组或无解,或有无穷多个解.

13. 方阵的行列式

若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$,称行列式 $D = |a_{ij}|_{n\times n}$ 为**方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式**,记为 $D = |\boldsymbol{A}| = |a_{ij}|_{n\times n}$,或记为 $D = \det\boldsymbol{A}$.

14. 矩阵的秩

在矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ 中任取 k 行、k 列($1 \leqslant k \leqslant \min\{m,n\}$) 所确定的 k 阶行列式,称为

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k **阶子式**.

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最高阶的不等于零的子式的阶数为 r，称之为矩阵 A 的**秩**，记为 $R(\boldsymbol{A}) = r$. 显然，$0 \leqslant R(\boldsymbol{A}) \leqslant \min\{m,n\}$.

n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A}) = n$ 的充分必要条件是：$|\boldsymbol{A}| \neq 0$.

当 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为**满秩矩阵**，亦称为**非奇异矩阵**；否则，称 $\boldsymbol{A}$ 为**奇异矩阵**. 若 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 必可逆，其逆矩阵唯一，且 $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}$.

15. 分块矩阵

根据研究问题的需要，将一个大型矩阵分成若干小块，构成一个分块矩阵. 此时，矩阵的元素仍是矩阵. 这是处理矩阵问题常用的一个重要方法与技巧.

1.1.2 有关运算法则

本章定义多，法则多，不少法则与读者在初等代数中所熟知的某些法则又有差异，乃至本质上的不同. 因此，在学习过程中，常感困惑，难于理解，不好掌握，容易出错. 根据多年教学实践的经验体会，将有关运算法则集中起来，并做必要的归纳或提示，以便读者理解记忆.

1. 矩阵相加的运算法则

设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 为同型矩阵，则

$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$,

$\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C}$,

$\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O}$,

$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{O} = \boldsymbol{A}$.

2. 数乘矩阵的运算法则

设 λ、μ 为数，$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵，则

$1 \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$;

$(\lambda + \mu)\boldsymbol{A} = \lambda\boldsymbol{A} + \mu\boldsymbol{A}$;

$\lambda(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \lambda\boldsymbol{A} + \lambda\boldsymbol{B}$;

$\lambda(\mu\boldsymbol{A}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{A}$.

上述两类运算法则与初等代数中的运算法则完全类似.

3. 矩阵相乘的运算法则

设下列矩阵相乘均有意义，且 λ 为数，则

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC}$,

$(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BA} + \boldsymbol{CA}$,

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) = (\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$,

$(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B}) = \lambda(\boldsymbol{AB})$.

注意：一般情形下，矩阵乘法不满足交换律，即

$$AB \neq BA.$$

矩阵相乘及其运算法则，既是学习矩阵运算的重点，也是学习矩阵运算的难点. 我们将在下面详细地予以分析、论述.

4. 伴随矩阵的运算法则

设 A^* 是 A 的伴随矩阵，则

$$AA^* = A^*A = |A|E,$$

其中，E 为单位矩阵.

5. 方阵行列式的运算法则

设 A、B 都是 n 阶方阵，λ 是数，则

$|A| = |A^{\mathrm{T}}|$，

$|AB| = |A||B|$，

$|\lambda A| = \lambda^n |A|$.

注意：读者对其中的运算法则 $|\lambda A| = \lambda^n |A|$，必须真正理解. 这个等式右端 λ^n 的指数"n"是不可或缺的，即 $|\lambda A| \neq \lambda |A|$. 也就是说，不要将方阵行列式的这个运算法则，与"行列式的某一行(列) 所有元素的公因子可以提到行列式符号外面" 的性质混为一谈.

6. 转置矩阵的运算法则

设 A、B 相加或相乘均有意义，则

$(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$，

$(\lambda A)^{\mathrm{T}} = \lambda A^{\mathrm{T}}$($\lambda$ 是数)，

$(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$，

$(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

注意：读者对其中的运算法则 $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$，必须真正理解. 在一般情形下，$(AB)^{\mathrm{T}} \neq A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}$.

7. 逆矩阵的运算法则

设 A、B 是两个同阶的非奇异矩阵，其逆矩阵分别记为 A^{-1}、B^{-1}，且 λ 是数，则

$(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}A^{-1}(\lambda \neq 0)$；

$(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$；

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$；

$(A^{-1})^{-1} = A$；

$|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$.

注意：读者对其中的运算法则 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$，必须真正理解. 在一般情形下，$(AB)^{-1} \neq A^{-1}B^{-1}$.

§1.2 重点与难点

本章主要内容是矩阵及其运算,行列式及其运算,克拉默法则等.其中有些内容较为直观,容易理解,且与读者已有的数学知识相类似,所以这部分内容可以少花一些时间与精力.而有些内容却较为困难,且与读者已有的数学知识有本质上的区别,与所谓"常规"的运算法则完全不同.因此,必须关注每一个这样的特殊点,找出差异,认真思考,仔细钻研,熟练掌握.这些特殊点,我们已在上一节的"1.1.2 有关运算法则"的"注意"(共有四处)中,极其清晰、明确地予以强调.这就是学习本章,乃至学习线性代数的难点所在.况且这些难点多数内容又是本章的重点.因此,读者要切实学懂、弄通、会用.

这里,对本章尤其要关注的一些特殊点再进行分析、解释.

1. 关于矩阵的乘法

(1) 不是任意两个矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都可以相乘的.换句话说,任意两个矩阵相乘不一定有意义.只有当左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数与右乘矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数相等时,$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相乘才有意义;否则,两矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 不可以相乘.

(2) 矩阵的乘法不满足交换律.在一般情形下,$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$,这是与"常规"的数的运算法则完全不同的.为了加深理解,下面从三个层次进行剖析:

其一,如果 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可以相乘,即 $\boldsymbol{AB}$ 有意义,但 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 不一定可以相乘,即 $\boldsymbol{BA}$ 没有意义,因此 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 显然不相等.比如设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&-1&5\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&3\\1&-1&4\\0&1&5\end{pmatrix}.$$

则
$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}2&2&13\\5&6&30\end{pmatrix}.$$

而 $\boldsymbol{BA}$ 没有意义,故
$$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}.$$

其二,如果 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可以相乘,且 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 也可以相乘,但是在一般情形下,它们的阶数不相等,因此 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 显然也不相等.比如设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&-1&5\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0\\1&-1\\0&1\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}2&2\\5&6\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}2&0&4\\-2&1&-3\\3&-1&5\end{pmatrix},$$

故

$$AB \neq BA.$$

其三，即使 A 与 B、B 与 A 都可以相乘，且 AB 与 BA 的阶数也相同，但是在一般情况下，AB 与 BA 仍不相等. 比如设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

则

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

故 $AB \neq BA$.

(3) 基于矩阵的乘法不满足交换律，因此矩阵乘法对加法的分配律有两个，即左分配律

$$A(B + C) = AB + AC$$

和右分配律

$$(B + C)A = BA + CA.$$

这也是与"常规"的数的乘法对加法的分配律只有一个是不同的.

(4) 如果 A、B 都不是零矩阵，但 A、B 的乘积可能是零矩阵，这又是与"常规"的数的乘法的运算法则完全不同的. 比如设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix},$$

它们都不是零矩阵，但是

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

在矩阵理论中，由 $AB = O$，不能得出或者 $A = O$，或者 $B = O$ 这个结论.

换句话说，在矩阵运算中，非零矩阵可能是零因子. 如上述矩阵 A、B 均为非零矩阵，但 A、B 均为零因子.

(5) 矩阵运算中消去律不一定成立.

在"常规"的数的运算情形下，消去律必成立. 即当 $a \neq 0$ 时，若 $ax = ay$，则 $x = y$. 但是在矩阵运算中，消去律就不一定成立. 即当 $A \neq O$ 时，若 $AZ = AY$，则 $Z = Y$ 不一定成立. 比如设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

这里 $A \neq O$，且

$$AZ = AY = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

但是 $Z \neq Y$，说明消去律不成立.

2. 关于矩阵的表达式

在矩阵的表达式中，尚有一些与“常规”的代数的表达式不同之处，读者必须予以注意，以免产生错误.

比如，矩阵的表达式

$$AB - 2B = (A - 2)B$$

是错误的. 正确的写法是

$$AB - 2B = (A - 2E)B.$$

又如，矩阵的表达式

$$ABC - AC = A(B - 1)C$$

也是错误的. 正确的写法应当是

$$ABC - AC = A(B - E)C.$$

3. 关于行列式的计算

行列式计算的“对角线法则”只适用于二阶与三阶行列式. 对于四阶以及四阶以上的所谓高阶行列式的计算而言，“对角线法则”是不适用的，读者必须予以注意，以免产生错误.

对于四阶及四阶以上的高阶行列式的计算，除了熟练掌握行列式的定义与性质以外，遵循具体问题具体分析的思维方法显得尤为重要. 也就是说，读者对所要计算的行列式应进行比较与分析，看看是否具有以下某一个特点：是否能化为三角行列式？各行或各列的和是否相等？是不是范德蒙型行列式？是否可用递推法？是否可用降阶法？是否可用升阶法？等等. 再根据其所具有的某一个特点进行计算. 这样去思考，可使计算得法，简便快捷. 当然，如果将几种方法综合运用，则效果会更好.

至于行列式性质，必须正确理解、运用. 比如，下面这个行列式的等式

$$\begin{vmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ z & u \end{vmatrix}$$

是错误的，其原因就是对行列式的性质的理解是不正确的. 正确的结果是

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+u \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & b+y \\ c & d+u \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & b+y \\ z & d+u \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & y \\ c & u \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & b \\ z & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ z & u \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

4. 关于方阵行列式的运算法则

设 A 是 n 阶方阵，λ 是数，则

$$|\lambda A| = \lambda^n |A|.$$

而一些初学者往往将上述法则错误地写成

$$|\lambda A| = \lambda |A|,$$

将 λ^n 之幂指数"n"丢掉了. 究其原因,这些初学者将数 λ 乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与数 λ 乘行列式这两个不同的概念混为一谈.

5. 关于转置矩阵的运算法则

对于转置矩阵运算法则中的下述这一个运算法则:

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

读者要予以理解且熟练掌握. 切勿出现"常规"性的 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 这样的错误.

6. 关于逆矩阵的运算法则

对于逆矩阵运算法则中的下述这一个运算法则:

$$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$$

读者要真正理解且熟练运用. 不要出现"常规"性的 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$ 这样的错误.

7. 认真学习,善于思考,比较分析,逐步提高

矩阵这一章的显著特点是"四多":定义多,定理多,运算多,且每种运算的运算法则多. 而且不少运算以及运算法则往往与读者在以前数学学习中已经熟识且有深刻印象的所谓"常规"的运算以及运算法则有不少差异,乃至本质上的不同. 于是,读者在本章学习过程中,普遍反映概念多,难理解,不易记,很难学. 因此,对上述的重点与难点,要认真对待,仔细钻研,多做练习,逐步提高,进而达到正确理解,熟练运用.

应当指出,"一题多解"是实现这个目标要求的较为有效的方法. 比如,已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\0&2\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},$$

试计算行列式 $|(3\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}^2|$.

解法 1: 在一般情形下是先算出 $3\boldsymbol{A}$, 再算出 $(3\boldsymbol{A})^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^2$, 然后再计算矩阵乘积 $(3\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}^2$,最后计算这个矩阵的行列式 $|(3\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}^2|$.

这样求解显然是正确的. 问题是有没有再好一些的解法呢? 只要读者善于思考,勤于钻研,较为简捷的好解法是能够得到的.

解法 2:先由 $|\boldsymbol{A}|=2$,得到 $|3\boldsymbol{A}|=3^2|\boldsymbol{A}|=18$(注意 $|3\boldsymbol{A}|\neq 3|\boldsymbol{A}|$),于是 $|(3\boldsymbol{A})|^{-1}=|3\boldsymbol{A}|^{-1}=\frac{1}{18}$. 又由 $|\boldsymbol{B}|=2$,故

$$|(3\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}^2|=|(3\boldsymbol{A})^{-1}||\boldsymbol{B}|^2=\frac{1}{18}\times 2^2=\frac{2}{9}.$$

§1.3 典型例题分析

我们选择了一些较有代表性的典型例题,进行较为详尽的分析与评述,力求达到这样三个目的:其一,复习本章的重点与难点内容,并期望读者掌握;其二,介绍一些简捷的解题方法与技巧,并期望读者能运用;其三,揭示矩阵理论内涵着的某些特殊的思想方法,并期

望读者理解.

例 1 已知
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

(1) 求 $\boldsymbol{AB}$,$\boldsymbol{BA}$.

(2) 从运算结果可以得出什么结论?

解:(1) 易知
$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{O},$$
$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}.$$

(2) 从上述运算结果,至少可以得出以下三个结论:

① 由 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$ 知,矩阵相乘不可以任意交换次序. 从理论上说,矩阵乘法不满足交换律.

② 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 知,当 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$,且 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$ 时,$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 是可能的. 从理论上说,在矩阵运算中,仅由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 推导出 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 两个矩阵中至少有一个是零矩阵是错误的.

③ 由 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}=\boldsymbol{BE}$,说明仅由 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$,从等式 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{BE}$ 的两边消去 $\boldsymbol{B}$,得到 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 是错误的. 从理论上说,矩阵乘法不满足消去律.

例 2 已知同阶方阵 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 满足
$$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}),$$
试证:$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$.

证:由矩阵乘法对加法的分配律,可得
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})&=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}\\&=(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{BA})-(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2)\\&=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B}^2,\\(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})&=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}\\&=(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{BA})+(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B}^2)\\&=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B}^2.\end{aligned}$$
类似地,可得
$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}^2.$$

由题设:$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$,可得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.
故证明了
$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2.$$

这里,进行分析与评述:

第一,在初等代数中有一批乘法公式,如 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$,$(a+b)^2=a^2+2ab+$

$b^2, a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2), a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ 等等，类似的公式对矩阵不一定成立. 但是，当 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 可交换时，即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 时，类似的公式对矩阵又是成立的.

第二，由于单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 与任何同阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 均可交换，且

$$\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{A}.$$

又因为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}^2=\boldsymbol{E}^3=\cdots=\boldsymbol{E}^n(n\text{ 是正整数}),$$

所以当 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 是同阶方阵时，有以下一批乘法等式：

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}),\\
&(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^2=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})=\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2,\\
&\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{E}^n-\boldsymbol{A}^n=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{n-1})\\
&\qquad=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{n-1})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(n\text{ 是正整数}),
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{E}^3+\boldsymbol{A}^3=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2)=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2)(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}),$$

等等.

例 3 设 x 的 n 次多项式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n(a_0\neq 0)$，称

$$f(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{A}^n+a_1\boldsymbol{A}^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\boldsymbol{A}+a_n\boldsymbol{E}$$

为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 次多项式，其中 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 是同阶的单位方阵.

(1) 若 $f(x)=3x^2+4x+1$，求 $f(\boldsymbol{A})$；

(2) 若 $f(x)g(x)=2x^4-2x^3+3x^2-3$，且 $f(x)$，$g(x)$ 均为 x 的多项式，求 $f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{A})$；

(3) 设 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$，且 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n(a_0\neq 0)$，求 $f(\boldsymbol{\Lambda})$.

解：(1) $f(\boldsymbol{A})=3\boldsymbol{A}^2+4\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 为方阵.

(2) $f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{A})=2\boldsymbol{A}^4-2\boldsymbol{A}^3+3\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 为方阵.

(3) 因为

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix},$$

所以

$$\boldsymbol{\Lambda}^k=\begin{pmatrix}\lambda_1^k & 0\\ 0 & \lambda_2^k\end{pmatrix}(k\text{ 为正整数}).$$

于是

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{\Lambda})&=a_0\boldsymbol{\Lambda}^n+a_1\boldsymbol{\Lambda}^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\boldsymbol{\Lambda}+a_n\boldsymbol{E}\\
&=a_0\begin{pmatrix}\lambda_1^n & 0\\ 0 & \lambda_2^n\end{pmatrix}+a_1\begin{pmatrix}\lambda_1^{n-1} & 0\\ 0 & \lambda_2^{n-1}\end{pmatrix}+\cdots+a_{n-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}+a_n\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}a_0\lambda_1^n+a_1\lambda_1^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda_1+a_n & 0\\ 0 & a_0\lambda_2^n+a_1\lambda_2^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda_2+a_n\end{pmatrix},
\end{aligned}$$