名师导学

高中数学综合讲座

上册

吕学礼　主编·孔令颐　明知白　副主编

前　言

高中学生对数学学习有的比较爱好，并且学有余力. 他们按照课本顺序依次学得的数学知识和数学方法，需要得到综合整理、巩固提高.

高中数学教师对这方面进行个别指导或小组辅导，也需要有相应的参考资料.

为此，特请经验丰富的数学名师，编写本书，以适应上述需要.

本书源于课本，高于课本. 对高中数学基础知识，既复习巩固，又综合运用，对高中数学技巧方法，既说明思路，又广为举例，希望达到帮助学生拓宽知识、提高能力的目的.

本书为讲座集形式，每一讲座就一个讲题综合论述，并附有习题及答案. 上下集各包含十多个讲座，可以依次使用，也可独立使用.

作为第一个读者，我有幸拜读了全部初稿，真觉得精采纷呈. 有几讲综合说明了一类问题，如函数的最值，如何运用各个方面的知识加以解决；有几讲综合说明了一项知识，如数学归纳法，对解决各个方面的问题的应用；又有几讲综合说明了分类、换元、反证法、充要条件等数学方法和思想. 这是单纯按照课本顺序依次学习所不能获得的.

在此乐于推荐本书，供高三学生课外阅读之用，也可供高中数学教师作为数学辅导参考资料之用.

对本书的缺点错误，敬请批评指正.

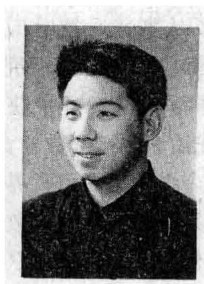
吕学礼

1992 年 8 月

王人伟　1945年生，1968年毕业于中国科技大学近代力学系，1979年至1981年于北京航空学院攻读硕士，并获工学硕士学位，1982年至今在北航附中任数学教师及数学教研组长，现任北京数学会理事，航空普教协会数学会理事长．他在1987年北京市中青年教师教学评优中获优秀课奖，由北京市教研部推荐，他参加了1990年青岛举行的全国首届中学数学教学观摩研讨会，在会上讲了一堂观摩课，作为突出数学思想的典范，受到与会专家及老师们的一致好评．

作为中国奥林匹克高级教练，北京市数学奥校常务教练，他在优秀学生的培养方面做了大量工作．近年来，他作为北京数学集训队的主教练、副主教练及北京代表队的领队，带领学生连续两年夺得CMO（中国数学奥林匹克）团体第一（获陈省身杯），与其他教练员一起，培养出多名学生进入国家队，在IMO（国际数学奥林匹克）上取得优异成绩．

田载今　1946年生，现在北京师范学院分院数学系任教，讲师，数学教材教法教研室主任，曾从事中学数学教学工作数年，1977年恢复高考制度后入大学学习，1982年毕业于北京师范学院数学系，后留校工作．先后在《数学通报》、《中学生数理化》等杂志上发表过多篇文章，并参加了《中国学生百科全书》等书籍的编写，兼任《数学通报》编委．



撰写的文章有《谈谈证明 P⇒A∨B 的思路》、《周期函数的两种定义的差异》、《满射个数及与它相关的一些组合学问题》、《一类集合分划问题的讨论——从一道IMO竞赛题谈起》、《数制种种》等．

译文有《面向21世纪的基础数学》等．

著作有《中国学生百科全书》（任数学卷分卷主编）．

陈剑刚　江苏海门人，1958年毕业于复旦大学数学系，同年任北京大学数力系助教. 1960年任北大附中数学教师，曾任数学教研组长、副校长、校长等职. 1986年被授予北京市中学特级教师、市普教系统先进工作者，1987年被评为北京市中学高级教师，1991年被授予北京市中学数学学科带头人.

著作有《名师启迪丛书》、《名师授课录》.

周沛耕　河北唐山人，1962年至1968年就读于北京大学数学力学系力学专业，1968年毕业. 现在北大附中任教，是北京市特级教师.

在教学中，他注重开发学生的智力，调动学生的积极性，形成了"激发式"的教学风格. 除了从事普通教学工作外，他多年来从事竞赛数学的辅导与研究，他的学生多次在国内、国际数学竞赛中获奖. 他直接培养的学生，先后获得国际数学竞赛的三枚金牌和一枚银牌. 今年，他参与培养的又一名学生已获得世界数学竞赛的参赛资格.

他是中国奥林匹克数学高级教练，现任北京市数学奥林匹克学校培训部主任，任中国"双法"(优选法和统筹法)数学研究会教育委员会副主任.

主要著作有《初等数学概论》、《数学竞赛培训教程》、《组合数学基础》等.

贺信淳　1935年生，浙江镇海人，1955年毕业于北京师范学院专修班，长期在中学任教，1981年起任北京市东城区教研科研中心数学教研员，1992年被评为北京市中学特级教师．1988年起，任北京市数学教学研究会理事，北京市东城区理科学会理事长．

在中学数学的教学和科研岗位上，不断地把教学、教研和科研相结合，探索教法规律．1964年起，在《数学通报》等刊物上发表了多篇论文，近年来又著有《三角》等教学法著作，参与编写《数学教学手册》、《中学数学精要》、《代数学习辅导》、《名师启迪丛书》等十几部中学数学的教学参考读物．近年来，又积极参加了教材改革实验，参加了实验教材和教学参考资料的编写，取得了一些成果．

徐望根　1938年生，浙江上虞县人，1963年毕业于南京大学数学系，毕业后在北京景山学校一直从事数学教学工作，高级教师，现任数学课外活动顾问，编著有《直角三角形世界》、《标准化训练与能力培养》、《标准化题型研究》、《教法、学法、考法》、《错误辨析》等10本书，并发表了论文30篇．

储瑞年　江苏太仓人，1941年生于上海，1963年毕业于北京师范大学数学系，同年任北京师范大学附属女子中学数学教师，1988年被评为北京市中学高级教师，现任北京师范大学附属实验中学（即原北京师范大学附属女子中学）数学教师．

参与编写的书籍有《中国中学教学百科

全书·数学卷》、《中学生学科能力目标与培养·数学(高中部分)》、《高中数学总复习(教学参考书)》、《中学教师实用数学辞典》、《中学数学重点课题研究》、《高考应试能力培养丛书·数学》、《十年高考试题分类解析·数学》、《高中数学课外练习题》.他所撰写的《子集、交集、并集、补集的综合练习》一文被收入《名师授课录(中学数学)》一书中.

魏仲和 1940年生,四川省屏山县人,1962年毕业于四川大学数学系,先后在北京23中学工作17年,在北京东城区教研科研中心工作13年,中学高级教师,现任北京东城区教研科研中心副主任,北京市数学会理事,北京市东城区理科学会副理事长.主要著作有《高中数学精读与测评》、《高中数学解难释疑》(代数第一册)、《代数与微积分自学辅导》、《解题与分析》、《高中数学导引》、《初中数学导引》等.

目　　录

第一讲 集 合

集合是数学研究的基本对象之一.一些数,一些图形,一些事物,……,凡在考虑某个问题的过程中能看作一个整体的那些个体的全部,都是一个集合.

在数学研究中,集合又兼有工具的性质.这主要表现在三个方面:第一,集合是数学语言的一部分,恰当使用集合的符号和记法,能够准确地表达我们考虑对象的范围及对象的主要性质;第二,集合之间具有运算关系,特别是逻辑运算规律,这使我们能处理逻辑关系较复杂的问题;第三,集合涉及到划分与分类等数学思想,学习集合知识有助于体会划分与分类的思想方法.

一、 集合的表示法

集合的表示法主要有两种:列举法和描述法.任何一种表示法都必须说清楚所考虑的集合具有哪些元素或不具有哪些元素.在多数情况下采用正面肯定的方式描述,有时也可用排除或否定的方式.

把集合所包含的全部元素列出来的方法叫列举法.使用列举法时,应注意以下四点:

1.元素间用分隔号“,”;

2.元素不重复;

3.不考虑元素顺序;

4.对于含较多元素的集合,如果构成该集合的元素有明显规律,可用列举法.但是必须把元素间的规律显示清楚后,

方能用删节号.

例 1 用列举法表示下列集合:

(1)100 以内的素数的集合;

(2)前 100 个自然数中完全平方数的集合;

(3)前 100 个自然数中偶数的集合;

(4)在坐标(XOY)平面上,以自然数为坐标,横、纵坐标之和为 100,且与原点距离小于 71 的点的集合.

分析:(1)100 以内的素数包括 2,3,5,…,97,共有 25 个.它们之间没有明显规律,因此用列举法表示该集合时,不能用删节号,要逐一列出:

$\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97\}$.

(2)$1^2,2^2,\cdots,10^2$ 都在前 100 个自然数中,此外,都不是完全平方数,可见所求的集合是:

$\{1,4,9,16,25,36,49,64,81,100\}$.

(3)偶数间有明显规律,按由小到大的顺序列举该集合的元素时,可以用删节号.这个集合是:

$\{2,4,6,8\cdots,98,100\}$.

(4)先找出"坐标为自然数,横、纵坐标之和为 100"的点,它们是:

$(1,99),(2,98),(3,97),\cdots,(98,2),(99,1)$.

然后考虑这些点到原点的距离.为减少计算量,先找几个点,做些估计

$$\sqrt{1^2+99^2}>\sqrt{99^2}=99>71.$$

容易看出,横、纵坐标中有一个是 71 或 71 以上的那些点都不合要求.我们从横、纵坐标这两个数中最大的那个数取最小值时的点(50,50)试起:

$$\sqrt{50^2+50^2}=50\sqrt{2}<70.8<71,$$

可见，点(50,50)合乎要求．再考虑其他的合乎要求的点．

设$(50+x,50-x)\quad(1\leqslant|x|\leqslant 49,|x|\in N)$合乎要求，则有：

$$\sqrt{(50+x)^2+(50-x)^2}<71,$$

$$\therefore\quad\sqrt{50^2+50^2+2x^2}<71,$$

$$\therefore\quad 5000+2x^2<5041,$$

$$\therefore\quad 2x^2<41.$$

x可取±1，±2，±3，±4，由此知所求的集合为：

{(50,50,),(49,51),(48,52),(47,53),(46,54),(51,49),(52,48),(53,47),(54,46)}.

除去列举法外，还可用描述法．

把集合所包含的元素的性质表达清楚，使得人们能准确地判断任一个元素是或不是该集合的元素，这种表示方法叫描述法．使用描述法时，应注意六点：

1. 写清楚该集合中元素的代号(字母或用字母表达的元素符号)；
2. 说明该集合中元素的性质；
3. 不能出现未被说明的字母；
4. 多层次描述时，应当准确使用逻辑连结词(例如“且”，“或”等)；
5. 所有描述的内容都要写在集合符号内；
6. 用于描述的语句力求简明、确切．

例2 用描述法表示以下各集合：

(1)数轴上，区间[0,1]，[2,3]，[4,5]，…，[98,99]的并集；

(2)数轴上，区间[0,1]，[2,3]，[4,5]，…，[−1,0]，[−3,

$-2]$，$[-5,-4]$，…的并集；

(3)数轴上，区间$[0,1]$，$[2,4]$，$[5,8]$，$[9,13]$，…，$[54,64]$的并集；

(4)数轴上，区间$[0,1)$，$(2,3]$，$[4,5)$，$(6,7]$，…，$(-2,-1]$，$[-4,-3)$，$(-6,-5]$，…的并集.

分析：(1)$[0,1]$，$[2,3]$，$[4,5]$…，$[98,99]$共包括50个区间，这些区间的端点有明显规律.只要选择一个参数，就可用描述法表示所求的集合.如果把其中的"代表区间"写成$[2k,2k+1]$，那么$k=0,1,2,\cdots,49$.这时k采取了列举方式.为进一步把k的取值范围用描述方式表达，需要把$[2k,2k+1]$改为$[2(k-1),2k-1]$所求的集合是

$$\{x \mid 2(k-1)\leqslant x\leqslant 2k-1, k\in N, k\leqslant 50\};$$

(2)对于无穷个区间$[0,1]$，$[2,3]$，$[4,5]$，…的并集，容易用"$2(k-1)\leqslant x\leqslant 2k-1, k\in N$"描述；对于无穷区间$[-1,0]$，$[-3,-2]$，$[-5,-4]$…，也可用"$-(2k-1)\leqslant x\leqslant -2(k-1), k\in N$"描述.但是，把这两种描述方式合在一起有一定困难.注意到$[0,1]$与$[-1,0]$，$[2,3]$与$[-3,-2]$，…分别关於数轴原点对称，这启发我们用绝对值进行描述.所求的集合是：

$$\{x \mid 2(k-1)\leqslant |x|\leqslant 2k-1, k\in N\};$$

(3)观察区间$[0,1]$，$[2,4]$，$[5,8]$，$[9,13]$，…，$[54,64]$的特点，我们发现：①每个区间的右端点比下一个区间的左端点少1；②各区间长度分别是1，2，3，…；③共有10个区间.

考查数列$\{a_n\}$：0，2，5，9，…，54.容易看出：$a_1=0$，$a_{n+1}-a_n=n+1$.由此知

$$\begin{aligned}a_n&=1+(n-1)+a_{n-1}\\&=1+(n-1)+[1+(n-2)]+a_{n-2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\cdots\cdots \\
&=[1+(n-1)]+[1+(n-2)]+[1+(n-3)]+\cdots \\
&\quad +(1+1)+a_1 \\
&=(n-1)+\frac{n(n-1)}{2} \\
&=\frac{1}{2}(n-1)(n+2) \\
&=\frac{1}{2}(n^2+n-2). \quad (1\leqslant n\leqslant 10, n\in N)
\end{aligned}
$$

同理，对于数列$\{b_n\}$：1，4，8，13，…，64，又有 $b_n=\frac{1}{2}(n^2+3n-2)$，$(1\leqslant n\leqslant 10, n\in N)$. 由此可知，所求的集合是：

$$\{x \mid \frac{1}{2}(n^2+n-2)\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}(n^2+3n-2), n\in N, n\leqslant 10\}.$$

(4) 区间$[0,1)$，$(2,3]$，$[4,5)$，$(6,7]$，…，$(-2,-1]$，$[-4,-3)$，$(-6,-5]$，… 的左端点可用$2k(k\in Z)$表示，右端点则是$2k+1(k\in Z)$. 但是因为这些区间的开、闭状况不同，所以不便于写成一个“通用区间”的形式. 为克服这个困难，把区间$[0,1)$，$[4,5)$，$[8,9)$，…，$[-4,-3)$，$[-8,-7)$，…与区间$(2,3]$，$(6,7]$，…，$(-2,-1]$，$(-6,-5]$，…分开表达. 所求的集合是

$$\{x \mid 4k\leqslant x<4k+1 \text{或} 4k-2<x\leqslant 4k-1, k\in Z\}.$$

例3 设 $z\in C$，$z=x+yi(x,y\in R)$，集合 $M=\{z \mid |z+1-yi|=\sqrt{1+z\cdot\bar{z}}, z\in C\}$. 在复平面上，集合 M 的图形如何？

分析：首先要明确这样的事实：$z=x+yi$ 中的“z”与集合 M 中的元素代号“z”是不是一回事？这是对描述法的理解问题. 我们知道：描述法中的元素代号仅在集合符号内部有效，也就是说，我们并不区分 x,y,m,n 字母的差异，总认为$\{x \mid x=2m+1, m\in Z\}=\{y \mid y=2n+1, n\in Z\}$. 在本题中，$M=\{z \mid |z+1$

$-yi|=\sqrt{1+z\cdot\bar{z}}, z\in Z\}$，其中的元素 z 被条件 $|z+1-yi|=\sqrt{1+z\cdot\bar{z}}$ 约束. 字母 y 并没有与元素 z 建立直接联系，所以，字母 y 只能理解为预先给定的实数参数. 也就是说，在集合 M 外面写的 $z=x+yi(x,y\in R)$ 与 M 内部的元素代号 z 不能看成同一个数.

为求 M 的图形，设 M 中符合约束条件的元素 $z=a+bi$ $(a,b\in R)$，依题意：

$$|a+bi+1-yi|=\sqrt{1+(a+bi)(a-bi)},$$

$$\therefore \quad (a+1)^2+(b-y)^2=1+a^2+b^2,$$

$$2a-2yb+y^2=0. \qquad (*)$$

在复平面 $(a\text{-}O\text{-}b)$ 上，这是含有参数 y 的直线族. 对每一个给定的实数 y，它表示一条具体的直线，对于不同的参数 y，它表示不同的直线，这无数条直线（对应于无数个实参数 y 的值）形成了集合 M 在复平面上的图形. 可以说，集合 M 的图形是由无数条（含参数的）直线（它们由直线族方程（$*$）确定）“编织”而成的.

为画出 M 的图形，可以给定不同的 y，对应地作出不同直线（例如，当 $y=0$时，给出直线 $a=0$；当 $y=2$时，给出直线 $a-2b+2=0$；当 $y=-4$时，给出直线 $a+4b+8=0$等）. 为求出集合 M 的包络线（即是“轮廓线”），可以把方程（$*$）看成关于 y 的二次方程 $y^2-2by+2a=0$. 令这个方程的判别式 $\Delta=(-2b)^2-8a=0$，得 $b^2=2a$，这是以横轴为对称轴，顶点在坐标原点，开口向右的抛物线，集合 M 的图形是图1-1画斜线的区域. 集合 M 由含参数 y 的直线（$*$）“编织”的示意图，如图1-2所示.

评注：集合 $M_1=\{z\,|\,|z+1-yi|=\sqrt{1+z\cdot\bar{z}}, z\in C\}$（其中 y

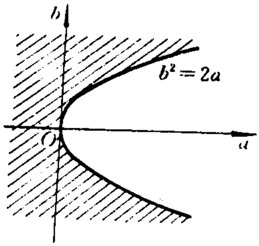


图1-1

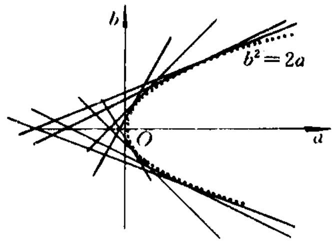


图1-2

$\in R$)与集合 $M_2=\{z\,|\,|z+1-yi|=\sqrt{1+z\cdot\bar{z}},z=x+yi,x,y\in R\}$ 不同，M_1中元素 z 不一定是 $x+yi$，M_2中元素是 $z=x+yi$. 因此本题条件中"$z\in C,z=x+yi(x,y\in R)$"的条件多余，只给 $y\in R$ 即可. 对于 M_2，由於 $z=x+yi(x,y\in R)$放在了集合符号内部，所以 M_2中元素的约束条件是

$$|(x+yi)+1-yi|=\sqrt{1+(x+yi)(x-yi)},$$

$$(x+1)^2=1+x^2+y^2,$$

$$\therefore \quad y^2=2x.$$

可见集合 M_2的图形只是集合 M_1的图形的包络线. 这个例子，目的在于指出集合符号内部描述成分的用途. 我们都知道，终边在象限角平分线上的角的集合是$\{\alpha\,|\,\alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}k\pi,k\in Z\}$，而不能写成$\{\alpha\,|\,\alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}k\pi\}(k\in Z)$，就是这个道理. 至此，我们应当再强调一下：使用描述法时，对元素的限定条件(描述或说明的字母和语句)都要放在集合符号内部.

二、 子集与等集，交集与并集，全集与补集

子集与等集，交集与并集，全集与补集是集合间的容量关系与运算关系.

设有集合 A、B. 若对任何一个 $x\in A$，都有 $x\in B$，则称 A 是 B 的一个子集，记为 $A\subseteq B$. 特别地 $A\subseteq A$. 为研究问题方便起见，规定空集 $\varnothing$ 是任一集合的子集，即对任一集合 A，都有 $\varnothing\subseteq A$.

若 $A\subseteq B$，且存在 $x\in B$，但 $x\notin A$，则称 A 是 B 的真子集，记为 $A\subset B$.

若 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$，则称集合 A 与集合 B 相等，记为 $A=B$.

对于给定的集合 A、B，定义 A 与 B 的交集 $A\cap B=\{x\mid x\in A,且\ x\in B\}$. 它是由集合 A 与集合 B 的公共元素构成的集合.

对于给定的集合 A、B，定义 A 与 B 的并集 $A\cup B=\{x\mid x\in A\ 或\ x\in B\}$. 它是由集合 A 的全部元素与集合 B 的全部元素构成的集合. 下列结论是显而易见的：

$A\cap A=A, A\cup A=A, A\cap\varnothing=\varnothing, A\cup\varnothing=A$；

若 $A\subseteq B$，则 $A\cap B=A, A\cup B=B$；

$(A\cap B)\cup A=(A\cup B)\cap A=A$；

$(A\cap B)\subseteq A, (A\cap B)\subseteq B, A\subseteq(A\cup B), B\subseteq(A\cup B)$；

$A\cap B=B\cap A, A\cup B=B\cup A$；

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ 等.

在研究某个（或某类）问题中，可能涉及到几个集合 $A,B,C,\cdots$. 如果存在这样的集合 I，使得 A、B、C、$\cdots$ 都是集合 I 的子集，则称 I 是研究这个（或这类）问题中的全集. 有了全集 I，可定义集合 A 的补集 $\overline{A}=\{x\mid x\in I,且\ x\notin A\}$.

下面几个结果是很有用的：

$A\cap\overline{A}=\varnothing$，　　$A\cup\overline{A}=I$；

若 $A\subseteq B$，则　$\overline{B}\subseteq\overline{A}$；

$\overline{(\overline{A})}=A$;

若 $A=B$,则 $\overline{A}=\overline{B}$;若 $\overline{A}=\overline{B}$,则 $A=B$;

$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$;　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

例4　集合 $M=\{x\,|\,x=1+a^2,a\in N\}$,$P=\{x\,|\,x=a^2-4a+5,a\in N\}$,下列关系中正确的是(　　)

(A)$M\subset P$;　　　(B)$P\subset M$;

(C)$M=P$;　　　(D)$M\not\subseteq P$,且 $P\not\subseteq M$.

分析:M,P 都是整数的集合.为确定它们之间的关系,可由描述的内容来看.

集合 M 中的元素形为$1+a^2(a\in N)$,也就是说,M 中任一个元素减去1都是自然数的平方数.集合 P 中的元素形为 $a^2-4a+5=(a-2)^2+1$.可见,集合 P 中任一元素减去1都是整数的平方数.两者相差在于"自然数的平方"还是"整数的平方".具体地说,$1\in P$(这只要在 a^2-4a+5中取 $a=2$),但$1\notin M$(因为$1+a^2=1$在 $a\in N$ 时无解).另一方面,任一元素 $x\in M$,都有 $x\in P$,可见 $M\subset P$,因此选择(A).

例5　集合 $A=\{-3,a^2,1+a\}$,$B=\{a-3,a^2+1,2a-1\}$,$A\cap B=\{-3\}$,求 $A\cup B$.(题中 $a\in R$)

分析:用列举法给出的集合 A,B 含有同一个参数 a.为求 $A\cup B$,必须先把 a 的值确定下来.

由 $A\cap B=\{-3\}$知:

$$\begin{cases}a^2\neq-3,\\1+a\neq-3,\\a-3,a^2+1,2a-1\text{中恰有一个只能是}-3.\end{cases}$$

解之得 $a=0$或 $a=-1$.

当 $a=0$时,$A=\{-3,0,1\}$,$B=\{-3,1,-1\}$.这时 $A\cap B=\{-3,1\}$,与 $A\cap B=\{-3\}$的已知条件矛盾.这表明 $a\neq0$.

当 $a=-1$时，$A=\{-3,1,0\}$，$B=\{-4,2,-3\}$，符合条件 $A\cap B=\{-3\}$. 由此知 $A\cup B=\{-3,-4,0,1,2\}$.

说明：$a=0$或 $a=-1$是 $A\cap B=\{-3\}$的必要条件，不是充分条件，为得到使 $A\cap B=\{-3\}$的 a 的值，应当进行检验. 为什么要检验?原因在于原题中的 a 是作为 $A\cap B=\{-3\}$的充分条件给出来的. 原题的题意是：实数 a 使得$\{-3,a^2,a+1\}\cap\{a-3,a^2+1,2a-1\}=\{-3\}$，求$\{-3,a^2,a+1\}\cup\{a-3,a^2+1,2a-1\}$忽略了原条件的充分性，就可能出错.

例6 a,b 为实参数，集合 $A=\{x\,|\,x=f(x)=x^2+ax+b,x\in R\}$，$B=\{x\,|\,x=f[f(x)],x\in R\}$，试判断 A,B 之间的关系.

分析：$x=f(x)=x^2+ax+b$，得出关於 x 的二次方程：

$$x^2+(a-1)x+b=0.$$

它的判别式 $\Delta=(a-1)^2-4b=a^2-2a-4b+1$. 如果 $a^2-2a-4b+1<0$，则 $A=\varnothing$. 这时 $A\subseteq B$. 如果 $a^2-2a-4b+1\geqslant 0$，$A\neq\varnothing$.

任取 $x_0\in A$，则 $x_0=f(x_0)$. 把括号内的实数 x_0用 $f(x_0)$代替，则有 $x_0=f[f(x_0)]$. 这表明 $x_0\in B$. 可见 $A\subseteq B$.

注意到取 $a=b=0$时，$A=\{x\,|\,x=x^2\}$，即是 $A=\{0,1\}$，$B=\{x\,|\,x=f^2(x)+af(x)+b\}=\{x\,|\,x=f^2(x)\}=\{x\,|\,x=(x^2)^2\}=\{0,1\}$，可见 $a=b=0$时，$A=B$，因此，存在参数 a,b(例如 $a=b=0$)，使得 $A=B$.

另一方面，取 $a=-1,b=-3$，则有 $A=\{x\,|\,x=x^2-x-3\}=\{x\,|\,x^2-2x-3=0\}=\{-1,3\}$. 这时，$B=\{x\,|\,x=f^2(x)-f(x)-3\}=\{x\,|\,x=(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-3\}=\{x\,|\,x^4-2x^3-6x^2+6x+9=0\}$. 因为 $A\subseteq B$，所以$-1\in B$，$3\in B$，可见多项式 $x^4-2x^3-6x^2+6x+9$有因式$(x+1)(x-3)$. 利用这个已知的因式，不难求得 $x^4-2x^3-6x^2+6x+9=(x+1)(x-3)(x^2-3)$. 由此求得 $B=\{-1,3,\sqrt{3},-\sqrt{3}\}$这表明存在参数 a,b(例如 a