面向21世纪高职高专规划教材教辅

大学应用数学
典型题解及常见考题

主　编　秦少武　南文胜　郑清平

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

面向21世纪高职高专规划教材教辅

大学应用数学
典型题解及常见考题

主　编　秦少武　南文胜　郑清平
副主编　卢社军　严中枝　易江平　张绪林

同濟大學出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书是《面向21世纪高职高专规划教材——大学应用数学》的配套实训辅导教材，根据教育部制订的“高职高专数学教学基本要求”，由多年从事高职高专数学教学工作的一线教师执笔编写而成.既能帮助学生在有限的时间内快速领悟应用数学的知识基础，为相关专业的学习作下良好的铺垫；又能给学生提供更实用、更新颖的题目，帮助同学们拓宽视野；同时还能为教师在布置作业、批改习题方面带来方便.本书共分为9章，每章都包括5个部分：基本知识点、本章重点、典型题解、常见考题及常见考题解答.

本书讲解深入浅出、好学易懂、适用面宽，无论是对教师备课、授课，还是对学生学习、复习和巩固课程的教学效果都大有裨益.本书适合作为高职高专各专业的数学辅导用书.

图书在版编目(CIP)数据

大学应用数学典型题解及常见考题/秦少武，南文胜，郑清平主编.—上海：同济大学出版社，2008.8
面向21世纪高职高专规划教材教辅
ISBN 978-7-5608-3906-6

Ⅰ.大… Ⅱ.①秦…②南…③郑… Ⅲ.应用数学—高等学校：技术学校—教学参考资料 Ⅳ.O29

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第112876号

面向21世纪高职高专规划教材教辅
大学应用数学典型题解及常见考题
主　编　秦少武　南文胜　郑清平
责任编辑　张　莉　　责任校对　徐春莲　　封面设计　潘向蓁

出版发行　同济大学出版社　www.tongjipress.com.cn
（地址：上海市四平路1239号　邮编：200092　电话：021-65985622）
经　销　全国各地新华书店
印　刷　同济大学印刷厂
开　本　787 mm×960 mm　1/16
印　张　12.5
印　数　1—6500
字　数　250000
版　次　2008年8月第1版　2008年8月第1次印刷
书　号　ISBN 978-7-5608-3906-6/O·325

定　价　22.00元

面向21世纪高职高专规划教材教辅

《大学应用数学典型题解及常见考题》

编 委 会

前　　言

根据教育部制订的“高职高专数学教学的基本要求”，突现实用性与实效性，体现基础课为专业课服务的思想，结合编者多年的教学实践，我们将高等数学、线性代数、概率论与数理统计等大学数学科目整合为《大学应用数学》.并特别地编写了这本与之相配套的实训辅导教材，目的在于帮助学生既能在有限的时间内快速领悟应用数学的知识基础，为相关专业的学习作好铺垫；又能给学生提供更实用、更新颖的题目，帮助同学们拓宽视野；同时还能为教师在布置作业、批改习题方面带来方便.

本书共分为9章，每章都包括以下5个部分：

(1) 基本知识点.帮助学生理清每章知识的脉络，把握全局.

(2) 本章重点.使学生能在理解基本知识点的基础上，把握各知识点之间的层次关系，领悟其中要点，以期达到融会贯通之效.

(3) 典型题解.按照教材的编排顺序，合理地配置了各知识点中常见的、能充分体现各种基本技能和基本方法的一些较为典型的习题及题解.题解不仅给出了求解的详细过程，还注重解题思路和方法指导，并抓住各类题目的要点，针对学生容易产生疑惑的问题加以分析说明，以此帮助学生理解知识要点，把握基本的解题方法.

(4) 常见考题.独立设置这一部分是为了让同学们在课后能够进行自我测试，从而领会典型题解中学习到的各种技巧与方法，同时通过独立完成这些题目，达到举一反三、巩固提高的效果.

(5) 常见考题解答.这个部分首先是帮助学生验证自己做题的正确与否，其次是让学生进一步明白其解题思路，掌握解题技巧，加大对各知识点的认知力度.

参加本书编写的有秦少武、郑清平、卢社军、严中枝、易江平、张绪林、何丙年等老师，全书由秦少武、南文胜统稿.在教材的编写过程中，仙桃职业学院、黄冈职业技术学院等兄弟院校都给予了极大的帮助，特别是得到了仙桃职院机械电子工程学院徐国洪院长和吕刚书记的大力支持，在此一并表示感谢.

由于编者水平有限，加之编写时间紧迫，书中错误在所难免，敬请读者批评指正.

编　者

2008年7月

目　录

1 极限与连续

1.1 基本知识点

1.1.1 复合函数与初等函数

1. 基本初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称基本初等函数.

2. 复合函数

函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=g(x)$ 复合而成 $y=f[g(x)]$ 的条件是:$g(x)$ 的值域包含在 $f(u)$ 的定义域中.复合运算就是代入运算.

3. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合所构成并可用一个式子表示的函数称为初等函数.

1.1.2 函数极限

1. $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限定义

如果当 x 的绝对值无限增大(即 $x\to\infty$)时,函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A,那么,A 称为 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限,记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$(或 $x\to\infty$ 时,$f(x)\to A$).

2. $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限定义

如果当 x 无限接近 x_0 时,函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A,那么,A 称为当 $x\to x_0$ 时的极限,记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$(或 $x\to x_0$ 时,$f(x)\to A$).

3. 左极限与右极限的定义

左极限.如果当 $x\to x_0^-$ 时,函数 $f(x)$ 的值无限接近于一个确定常数 A,那么,A 称为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限.

右极限.如果当 $x\to x_0^+$ 时,函数 $f(x)$ 的值无限接近于一个确定常数 A,那么,A 就称为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限.

4. 函数极限存在的充分必要条件

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A;$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=A.$$

1.1.3 极限的运算法则

设 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$（x 在同一变化过程中，所以下标省略），则有

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$;

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$;

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}\quad(\lim g(x)\neq 0)$.

推论 $\lim[Cf(x)]=C\lim f(x)=CA$ （C 为常数）;

$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n=A^n$.

1.1.4 无穷小与无穷大

1. 无穷小与无穷大

	定　义	性　质
无穷小	极限为零的变量称为无穷小量，简称无穷小	有限个无穷小的代数和仍是无穷小 有限个无穷小的乘积仍是无穷小
	定　义	无穷大与无穷小的关系
无穷大	绝对值无限增大的变量称为无穷大量，简称无穷大	若 $f(x)$ 是无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷小 若 $f(x)$ 是非零无穷小，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷大

2. 无穷小的比较

设 $\alpha(\neq 0)$，β 是同一变化过程中的无穷小量，

$$\text{若 }\lim\frac{\beta}{\alpha}=\begin{cases}0, & \text{则称 }\beta\text{ 是比 }\alpha\text{ 高阶无穷小},\\ \infty, & \text{则称 }\beta\text{ 是比 }\alpha\text{ 低阶无穷小},\\ C(\neq 0), & \text{则称 }\beta\text{ 与 }\alpha\text{ 是同阶无穷小},\\ 1, & \text{则称 }\beta\text{ 与 }\alpha\text{ 是等阶无穷小}.\end{cases}$$

3. 常用的等价无穷小代换

当 $x\to 0$ 时，有 $x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim e^x-1\sim\ln(1+x)$，

$$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2,\quad \sqrt{1+x}-1 \sim \frac{1}{2}x,\quad (1+x)^{\alpha}-1 \sim \alpha x\ (\alpha \text{ 是常数}).$$

1.1.5　两个重要极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

该公式的推广形式为　$\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1.$

其特征:① 为$\dfrac{0}{0}$ 型;② $\dfrac{\sin[\quad]}{[\quad]}$,方括号中的变量形式相同.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}\quad \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}.$

该公式推广形式为

$$\lim_{\varphi(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)}=\mathrm{e},\ \lim_{\varphi(x)\to 0}(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\mathrm{e}.$$

其特征如下:①$1^{\infty}$ 型;②$(1+[\quad])^{\frac{1}{[\quad]}}$,底数位置的方框与指数位置的方框的变量形式相同且都是无穷小量.

1.1.6　函数的连续性

1. 函数 $f(x)$在点 x_0 处连续

定义 1　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及其附近有定义,如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

定义 2　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及其附近有定义,如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

2. 函数 $f(x)$在区间(开区间或闭区间)上连续

在区间上每一点都连续的函数叫做在该区间上的连续函数,或者说函数在该区间上连续.

3. 函数在点 x_0 处连续的条件

$f(x)$在点 x_0 处连续,应同时满足以下三个条件:

(1) 在点 x_0 处 $f(x)$有定义;

(2) 极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在;

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

4. 函数的间断点及其分类

当 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ 不成立时，则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处间断. 间断点可分为以下几种类型：

	名称	特征	
第一类	可去间断点	左、右极限都存在	左、右极限相等但与 $f(x_0)$ 不等
	跳跃间断点		左、右极限不相等
第二类		左极限与右极限至少有一个不存在	

5. 连续函数的运算及初等函数的连续性

连续函数的四则运算性质. 设函数 $f(x)$, $g(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续，则 $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0)$ 在点 x_0 处也连续.

复合函数的连续性法则. 若 $u = g(x)$ 在点 x_0 处连续，$y = f(u)$ 在 $u_0 = g(x_0)$ 处连续，则复合函数 $y = f[g(x)]$ 在点 $x = x_0$ 处连续.

求复合函数的极限时，如果 $u = g(x)$ 当 $x \to x_0$ 时极限存在，而 $y = f(u)$ 在 $u = u_0 = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ 处连续，则极限符号与函数符号可以变换次序.

1.1.7 闭区间上连续函数的性质

1. 有界性定理. 在闭区间上连续的函数在该区间上一定有界.

2. 最大值和最小值定理. 在闭区间上连续的函数一定有最大值和最小值.

3. 介值定理(中间值定理). 如果函数 $f(x)$ 在闭区间上 $[a, b]$ 上连续，m 和 M 分别为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值、最大值，则对于 m 和 M 之间的任一实数 C (即 $m < C < M$)，至少存在一点 ξ, $\xi \in (a, b)$，使 $f(\xi) = C$.

4. 零点定量(根的存在定理). 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a) \cdot f(b) < 0$，则在 (a, b) 之间至少存在一点 x_0，使 $f(x_0) = 0$.

1.2 本章重点

1. 理解极限的概念，熟练运用极限的运算法则.
2. 熟练掌握极限的两个重要极限.
3. 理解函数的连续性.

1.3 典型题解

例 1 将下列函数分成若干简单函数,并求出定义域.

(1) $y=\arctan\ln(1+x^2)$; (2) $y=\sqrt{\tan\dfrac{x}{2}}$;

(3) $y=[1-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}]^4$.

解 (1) 令 $v=1+x^2$, $u=\ln v$. 故所给函数的复合关系为 $y=\arctan u$, $u=\ln v$, $v=1+x^2$.

定义域为$(-\infty, +\infty)$.

(2) $y=\sqrt{u}$, $u=\tan v$, $v=\dfrac{x}{2}$.

定义域为 $(2n\pi, (2n+1)\pi)$ $(n\in\mathbf{Z})$.

(3) $y=u^4$, $u=1-v^{\frac{1}{2}}$, $v=1-x^2$.

定义域是$[-1, 1]$.

例 2 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}[x^2+\sin^2 x-(\cos x)^{2\tan x}]$.

解 由于函数 $f(x)=x^2+\sin^2 x-(\cos x)^{2\tan x}$ 为初等函数,又因为 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 为其定义区间内一点,所以在 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 处连续.

因此有

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}[x^2+\sin^2 x-(\cos x)^{2\tan x}]\\&=\left(\frac{\pi}{4}\right)^2+\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^2-\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^{2\tan\frac{\pi}{4}}\\&=\frac{\pi^2}{16}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{16}.\end{aligned}$$

(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1+x}{1-x}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x}{1+x}=\dfrac{0}{2}=0$,

所以 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1+x}{1-x}=\infty$.

考查知识点 复合函数.

解题方法 只要熟悉基本初等函数的形式,便可依顺序分解.

函数分解原则 由内到外逐层分解或由外向内逐层分解.

注 在分析一个复合函数的复合过程时,必须保证每一个分解过程中的函数为一个基本初等函数,或是基本初等函数的四则运算.

考查知识点 当 $x\to x_0$ 时,求极限.

解题方法

(1) 直接代入法. 若对所求极限用 $x=x_0$ 代入后,不会出现所求极限的变量无意义的情况,则可采用直接代入法最为简便.

(2) 将 $x=x_0$ 代入后,出现分母为零而分子不为零,其求解方法为:先对函数的倒数求极限,再利用无穷大与无穷小的关系定理.

(3) 若出现$\dfrac{0}{0}$型,利用因式分解法、分式有理化法,找出并消去公共的"零因子".

(3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

解 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x+1)}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{2}{3}.$$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2-x}}$.

解 此题为$\dfrac{0}{0}$型极限,可通过分母有理化约去零因子再求极限.

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2-x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x})}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{2-x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x})}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x}}{2}=\sqrt{2}.$$

考查知识点 当 $x\to\infty$ 时,求极限.

解题方法 这一类题型的方法是固定的,即用分子分母中 x 的最高次幂除以分子与分母.其目的是使多项式中的每一项不是常数就是无穷小量,从而可使用极限运算法则.

(1) $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型可提取无穷大因子或分子分母同除以适当无穷大.特别地

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2n^2-3n}}{\sqrt{n}-n}$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2n^2-3n}}{\sqrt{n}-n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt{2-\dfrac{3}{n}}}{n\left(\sqrt{\dfrac{1}{n}}-1\right)}=-\sqrt{2}$.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-3)^n+7^n}{(-3)^{n+1}+7^{n+1}}$.

解 分子分母除以 7^n 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-3)^n+7^n}{(-3)^{n+1}+7^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\dfrac{3}{7}\right)^n+1}{(-3)\left(-\dfrac{3}{7}\right)^n+7}=\frac{1}{7}.$$

注 指数形式(关于 n)的商的极限与分类,其依据是 $\lim\limits_{x\to\infty}a^n=0\ (|a|<1)$;其方法是分子、分母同除以底的绝对值的最大幂.

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+2x^2-1}{3x^4+1}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+2x^2-1}{3x^4+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^4}}{3+\dfrac{1}{x^4}}$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^4}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3+\dfrac{1}{x^4}\right)}$$

$$=\frac{0}{3}=0.$$

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1+3+\cdots+(2n-1)}{n+3}\right]$ （n 为自然数）.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1+3+\cdots+(2n-1)}{n+3}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\dfrac{n(1+2n-1)}{2}}{n+3}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n+3}.$$

值为无穷大，极限不存在.

注 对无穷多项之和，求极限应先求 n 项和的通项公式，然后求极限.

(9) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

解 因为 $x\to1$ 时，$1-x$ 及 $1-x^3$ 皆为无穷小，即 $f(x)$ 为 $\infty-\infty$ 型，所以先通分，再通过因式分解约分后求极限.

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)}{(1-x)(1+x+x^2)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-(x+2)}{1+x+x^2}=-\frac{3}{3}=-1.$$

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n-1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

解 此数列极限为“$\infty-\infty$”型，将其有理化后，求极限得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n-1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\begin{cases}0, & m>n,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & m=0,\\ \infty, & m<n.\end{cases}$$

(2) 对“$\infty-\infty$”型，可通分或有理化转变为 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型.

(3) 有的需结合 $f(x)$ 图形特点来计算 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$.

如

$$\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty}e^x=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}.$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1}} = \frac{1}{2}.$$

例 3 (1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(1-x)}{x^2-4x+3} = ($ $)$.

A. $\dfrac{1}{2}$ B. 1 C. 0 D. ∞

解 选 A.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(1-x)}{(x-1)(x-3)} = -\lim_{x\to 1} \frac{\sin(1-x)}{1-x} \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-3}$$

$$= (-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{kx} = 5$,则 $k =$ ________.

解 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{kx} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{3x} \cdot \dfrac{3}{k} = \dfrac{3}{k}$,

所以 $\dfrac{3}{k} = 5$,解得 $k = \dfrac{3}{5}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \sin\dfrac{\pi}{n}$.

解 当 $n\to\infty$ 时,$\dfrac{\pi}{n}\to 0$,

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\sin\frac{\pi}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \cdot \pi = \pi.$$

(4) $\lim\limits_{x\to 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} (1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot 2}$

$$= \lim_{x\to 0} [(1+2x)^{\frac{1}{2x}}]^2 = e^2.$$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{kx}$ $(k\in\mathbf{Z})$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{kx} = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-k} = e^{-k}$.

考查知识点 利用两个重要极限求极限.

1. 用公式 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ 求极限.

当函数中出现三角函数且又是 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式时,可考虑用此公式,其推广形式为

$$\lim_{\varphi(x)\to 0} \frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)} = 1.$$

解题思路 当函数式为 $\dfrac{\sin\varphi(x)}{f(x)}$ 且为 $\dfrac{0}{0}$ 型时,若 $f(x)\neq\varphi(x)$,则设法将 $f(x)$ 恒等变形使之出现 $\varphi(x)$.

注 对于重要极限注重理解,不能只记表达式,而忽略变化过程,应注意了解重要极限的各种表达式.要区别下面几个极限:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0} x\sin^2 x = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

2. 用公式

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+\frac{3}{2}}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+\frac{3}{2}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{x+\frac{3}{2}}=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right]^{x+\frac{3}{2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right]^{x+\frac{1}{2}+1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right]^{x+\frac{1}{2}}\cdot\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right]^{1}=\mathrm{e}\cdot 1=\mathrm{e}.$$

(7) $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{x-1}}$.

解 $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to1}[1+(x-1)]^{\frac{1}{x-1}}=\mathrm{e}$.

(8) $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\frac{\sin x}{x}}$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}}=\mathrm{e}^{1}=\mathrm{e}.$$

例 4 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\sin x}$.

解 因为 $x\to0$ 时,

$$\sin x\sim x,\ \ln(1+2x)\sim 2x,$$

所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{x}=2$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$.

解 利用等价无穷小代换简化计算.

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(4x)^2}{x^2}=8.$$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{\sin x}}{x-\sin x}$.

或 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$ 求极限.

这是 1^{∞} 型未定式的极限,对幂指函数 $f(x)^{g(x)}$ 的极限,当自变量 x 在某一变化过程中 $f(x)\to1$ 而 $g(x)\to\infty$ 时,可考虑用此公式.可将其扩充理解为

$$\lim_{\varphi(x)\to0}(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\mathrm{e},$$

$$\lim_{\varphi(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)}=\mathrm{e}.$$

解题思路 函数式为 $[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{f(x)}}$ 且为 1^{∞} 型时,若 $\varphi(x)\neq f(x)$,设法将 $f(x)$ 恒等变形使之出现 $\dfrac{1}{\varphi(x)}$.

考查知识点 利用等价无穷小代换求极限.

当 $x\to0$ 时,

$\sin x\sim x$

$\sin(\sin x)\sim x$

$\tan x\sim x$

$\arcsin x\sim x$

$\ln(1+x)\sim x$

$\mathrm{e}^x-1\sim x$

$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$.

这些等价式的意义是在求极限过程中可将较复杂的函数化为 x，x^2 等幂函数，可以互相代换.

注 用等价无穷小代换时，只有分子、分母的乘积因子才可代换，否则可能会出错.

如

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0,$$

显然是错误的.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}(e^{x-\sin x}-1)}{x-\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}(x-\sin x)}{x-\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}e^{\sin x}=1.$$

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$.

解 $$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x}{2^x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^x=0.$$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x^3}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos x-1)}{x^3\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{x^3\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{2\cos x}=-\frac{1}{2}.$$

考查知识点

1. 利用“无穷小与有界函数之积仍为无穷小”求极限.
2. 利用“连续函数的函数符号与极限符号可交换次序”的特性求极限.

例 5 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}\sin x\right)$.

解 因为

$$\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 1,\ \lim_{x\to 0}x=0,$$

所以 $$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

故 $$\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sin x\right)=0+1=1.$$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\cos x}{\sqrt{1+x^3}}$.

解 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^3}}\cos x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+x}}\cos x$$

$$=0\quad\left(\text{因为}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+x}}=0\right).$$