JS

文心英才教育研究所 组编

“希望”数学竞赛教程

八年级

邓 凯 曹正法 朱铭华 主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

"希望"

★"希望"数学竞赛教程 七年级
★"希望"数学竞赛教程 八年级
★"希望"数学竞赛教程 高一分册
★"希望"数学竞赛教程 高二分册

ISBN 978-7-308-06710-2
9 787308 067102 >
定价：18.00元

“希望”

数学竞赛教程

八年级

文心英才教育研究所 组编

本册主编 邓 凯 曹正法 朱铭华

本册副主编 熊玲玲

本册编委 谢贵清 崔燕艳 苗 鑫

唐作明 义远忠 唐建文

王卫华 谢松茂

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS

浙江大学出版社

前　　言

中学生学科竞赛的开展，在我国已有多年的历史，其中数学竞赛是开展最早、覆盖面最广的一项竞赛，数学竞赛活动由于其对少年儿童智力开发的重大促进作用而备受广大青少年的喜爱。

随着数学竞赛活动的蓬勃发展，各级各类数学竞赛活动也相继开展。其中比较大型的竞赛活动主要有：中国数学会主办的全国高中数学联赛，全国初中数学联赛；中国科协普及部、《数理天地》杂志等主办的“希望杯”全国数学邀请赛；中国奥数教学联盟、《数学竞赛之窗》杂志主办的“联盟杯”数学竞赛；华杯赛组委会主办“华罗庚金杯”少年数学邀请赛；《中学数学研究》杂志主办的“五羊杯”数学邀请赛；小学生数学报主办的“小数报邀请赛”等等。

这些竞赛活动对广大青少年数学素养的培养、思维方法的开拓起了很好的促进作用，很多这些竞赛的优胜者在后来的人生路上都取得了辉煌的成就。

如何才能在这些竞赛中取得好成绩，并提升自己的数学素养，促进自己的数学思维就成了广大家长和学生关注的问题。为解决这个问题，我们特组织了一批竞赛教学一线的专家老师编写了本套丛书，以期给广大读者一个良好的开端。

本丛书分为七年级、八年级和高一、高二分册。

丛书的内容涵盖初中和高中的各部分内容，在课本的基础之上，加以提升，整个难度控制在中考之上，全国联赛之下，服务于中考和竞赛，又不拘泥于中考和竞赛，对各校中档以上学生，参加中考和竞赛，最有帮助。

本书整体难度大致和“希望杯”全国数学邀请赛相当，作为“希望杯”全国数学邀请赛的培训教程最为合适。

使用建议：

1. 参加“希望杯”全国数学邀请赛的同学做赛前冲刺，请将本书所有内容均做完。

2. 希望中、高考提高的同学，请将每章中的例题全部过关，练习题部分中的前8题全部过关。

3. 参加全国初中数学联赛和全国高中数学联赛的同学，请在本书的基础上，再做一些更难的问题，以提高自己的数学素养。

限于作者水平，书中不妥之处请广大读者批评指正。联系电话是：0512－68184173，也可通过电子邮件联系我们，信箱是：wenxinjiaoyu@163.com。

文心英才教育研究所

2009年3月

目　录
Contents

第一章　数与整式

考题再现

1. (2008 年第 2 试) 化简：$\left(\frac{7}{3}\right)^{1004}\sqrt{\frac{3^{2008}+15^{2008}}{7^{2008}+35^{2008}}}=$ ________.

【分析】　由积的乘方以及提取公因式的方法，可以先将根号里的分数化简，再开方即得.

【解】　原式 $=(\frac{7}{3})^{1004}\sqrt{\frac{3^{2008}(1+5^{2008})}{7^{2008}(1+5^{2008})}}=(\frac{7}{3})^{1004}\cdot(\frac{3}{7})^{1004}=1$，故答案填 1.

【说明】　这道题主要考查的知识点有积的乘方和提取公因式法，以及 $\sqrt{a^2}=a(a>0)$ 的应用，只需耐心计算，不会出错.

2. (2008 年第 1 试) 若 a,b 和 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 都是有理数，则　　(　　)

A. $\sqrt{a},\sqrt{b}$ 都是有理数　　B. $\sqrt{a},\sqrt{b}$ 都是无理数

C. $\sqrt{a},\sqrt{b}$ 都是有理数或都是无理数　　D. $\sqrt{a},\sqrt{b}$ 中有理数和无理数各一个

【分析】　关键要抓住 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 是有理数，再结合赋值法或排除法可得答案.

【解】　$\because$ $\sqrt{a},\sqrt{b}$ 有意义，$\therefore$ $a\geqslant 0,b\geqslant 0$，$\therefore$ $a=b=0$ 时，符合选项有(A) 或(C). 当 $a>0,b>0$ 时，a,b 需是完全平方数，且 a,b 都是有理数，赋值法验证，只能选(A).

【说明】　对于本题，要进行严密的推理并进行验证，避免出现漏掉的情况.

3. (2008 年第 1 试) 若单项式 $-2a^{|x|}b^{|5x|}$ 和 $3^2a^2b^{3-x}$ 的次数相同，则 x 的整数值等于　　(　　)

A. 1　　B. -1　　C. ± 1　　D. ± 1 以外的数

【分析】　由两个单项式的次数相同，可得一个方程，解方程可得答案.

【解】　由题意得 $|x|+|5x|=5-x$，

当 $x>0$ 时，$x=\frac{5}{7}$.

当 $x<0$ 时，$x=-1$.

所以选(B).

【说明】　解这道题的关键是把握“单项式的次数相同”，另外，就是要具备解含绝对值的

方程的方法.

4. (2007 年第 2 试) 自从扫描隧道显微镜发明后,世界上便诞生了一门新科学,这就是“纳米技术”. 已知 1 毫米 = 1000 微米,1 微米 = 1000 纳米,那么 2007 纳米的长度用科学记数法表示为________米.

【分析】 根据已知求出 1 米与 1 纳米的关系,进而可求.

【解】 由题意,得 1 纳米 $= 10^{-9}$ 米,

2007 纳米 $= 2007 \times 10^{-9} = 2.007 \times 10^{-6}$ 米.

答案填 2.007×10^{-6}.

【说明】 本题考查的知识点有科学记数法与单位进制. 属简单题.

5. (2007 年第 2 试) 设 a, b, c 是不为零的实数,那么 $x = \frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} - \frac{c}{|c|}$ 的值有 ( )

A. 3 种　　B. 4 种　　C. 5 种　　D. 6 种

【分析】 $\frac{a}{|a|} = \frac{|a|}{a} = \pm 1$,由此可求出 x.

【解】 a, b, c 可以为正数,也可以为负数.

a	b	c	x
+	+	+	1
+	+	−	3
+	−	+	−1
−	−	+	−3

还有其他情况,所得结果只可能是 ± 1 或 ± 3. 故选(B).

【说明】 这道题仅仅考查了 $\frac{a}{|a|} = \pm 1$ 这一个知识点,列举出各种情况即可求解.

6. (2007 年第 1 试) 已知 $x = \sqrt[a+b]{M}$ 是 M 的立方根,$y = \sqrt[3]{b-6}$ 是 x 的相反数,且 $M = 3a - 7$,那么 x 的平方根是________.

【分析】 题中有三个条件,由此可以通过列方程组求解.

【解】 由题意,得

$$\begin{cases} a + b = 3, \\ 3a - 7 + b - 6 = 0, \end{cases}$$ 解得 $a = 5, b = -2$,

$\therefore M = 8$,求得 $x = 2$,$\therefore x$ 的平方根是 $\pm\sqrt{2}$. 答案填 $\pm\sqrt{2}$.

【说明】 这道题考查了多个知识点: 立方根,相反数,解方程和方程组,平方根等. 计算难度不大,但要细心.

7. (2006 年第 2 试) 若 $m = 2006^2 + 2006^2 \times 2007^2 + 2007^2$,则 m ( )

A. 是完全平方数且是奇数　　B. 是完全平方数且是偶数

C. 不是完全平方数但是奇数　　D. 不是完全平方数但是偶数

【分析】 $2007 = 2006 + 1$，将式中的 2007 换成 2006，然后变形并求解.

【解】 $m = 2006^2 + 2006^2(2006+1)^2 + (2006+1)^2$

$= (2006^2 + 2006 + 1)^2$

$\therefore m$ 是奇数且是完全平方数. 答案选(A).

【说明】 将 2007 换成 2006 + 1 是解题的突破口，变形中计算较繁杂，需要耐心细致.

8. (2006 年第 1 试)已知 m,n 是实数，且满足 $m^2 + 2n^2 + m - \frac{4}{3}n + \frac{17}{36} = 0$，则 $-mn^2$ 的平方根是　　(　　)

A. $\frac{\sqrt{2}}{6}$　　B. $\pm\frac{\sqrt{2}}{6}$　　C. $\frac{1}{6}$　　D. $\pm\frac{1}{6}$

【分析】 将等式左边变形，然后求出 m,n 的值，进而求解.

【解】 原等式变形，整理，得 $(m^2 + m + \frac{1}{4}) + 2(n^2 - \frac{2}{3}n + \frac{1}{9}) = 0$，

即 $(m + \frac{1}{2})^2 + 2(n - \frac{1}{3})^2 = 0$，

$\because m = -\frac{1}{2}, n = \frac{1}{3}$，$\therefore -mn^2 = \frac{1}{18}$，$\pm\sqrt{\frac{1}{18}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{6}$. 故答案选(B).

【说明】 非负数之和等于 0 的问题是竞赛题的热点之一，通常遇到类似的问题都要用类似于本题的解法求解.

9. (2008 年第 1 试)设 a,b,c,d,e 只能从 $-3,-2,-1$ 中取值，又 $x = a - b + c - d + e$，$y = a^2 - b^2 + c^2 - d^2 + e^2$，则　　(　　)

A. x 的最大值比 y 的最大值小　　B. x 的最小值比 y 的最小值小

C. x 的最大值比 y 的最小值小　　D. x 的最小值比 y 的最大值大

【分析】 因为 a,b,c,d,e 可以任意取 $-3,-2,-1$ 中的值，于是可求 x,y 的最值，然后比较大小.

【解】 令 $a = c = e = -1, b = d = -3$，$x_{max} = 3$，$y_{min} = -15$.

令 $a = c = e = -3, b = d = -1$，$x_{min} = -7$，$y_{max} = 25$.

显然只有(A)成立，答案选(A).

【说明】 这道题考查的知识就是有理数的计算与比较.

10. (2006 年第 1 试)设 a,b,c 为实数，且满足 $5(4a^2 + b^2) + 2c^2 = 4(ab + bc + 2ac)$，则 $\frac{bc}{a^2} =$ ________.

【分析】 将已知等式变形并整理，寻求 a,b,c 之间的关系.

【解】 原等式变形为 $20a^2 + 5b^2 + 2c^2 - 4ab - 4bc - 8ac = 0$，

整理，得 $(4a^2 - 4ab + b^2) + (4b^2 - 4bc + c^2) + (16a^2 - 8ac - c^2) = 0$，

即 $(2a - b)^2 + (2b - c)^2 + (4a - c)^2 = 0$，

$\therefore b=2a, c=2b, c=4a$,

$\therefore \frac{bc}{a^2}=\frac{2a\cdot 4a}{a^2}=8$.

答案填8.

【说明】 对已知等式变形是解这类题的基本思维方式,这道题考查了代数式计算,整式的乘法公式等多个知识点.

11. (2005年第1试) $\frac{1-2+3-4+\cdots-14+15}{-2+4-6+8-\cdots+28-30}$ 等于 ( )

A. $\frac{1}{4}$ B. $-\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

【分析】 分子、分母分别“两项相加”,即可求得答案.

【解】 原式 $=\frac{(-1)\times 7+15}{2\times 7-30}=\frac{8}{-16}=-\frac{1}{2}$.

答案选(C).

【说明】 当所给数据呈现明显的规律,要注意其规律,并利用规律求解.

12. (2006年第2试)甲、乙两人做游戏,规定从2006开始,第一次减去它的$\frac{1}{2}$,第二次减去余下的$\frac{1}{3}$,第三次再减去余下的$\frac{1}{4}$,…,一直这样减下去,现在甲减了5次,乙减了8次,那么两个人得到的两个数的比是________.

【分析】 减去它的$\frac{1}{2}$,得 $2006\left(1-\frac{1}{2}\right)$;减去余下的$\frac{1}{3}$,得 $2006\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)$,…,依此可求答案.

【解】 依题意可得:

甲减了5次,得到的数是 $2006\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)=2006\times\frac{1}{6}$,

乙减去了8次,得到的数就是 $2006\times\frac{1}{9}$.

两数之比等于$\frac{1}{6}:\frac{1}{9}=\frac{3}{2}$.答案填$\frac{3}{2}$.

【说明】 解这道题,理解题意并准确表示出剩余的部分是关键,计算量不大.

13. (2005年第2试)如果 $|a|=3$, $|b|=5$,那么 $|a+b|-|a-b|$ 的绝对值等于________.

【分析】 $|a|=3$,则 $a=\pm 3$,同理 $b=\pm 5$,然后分四种情况计算.

【解】 由已知,得 $a=\pm 3, b=\pm 5$.

当 $a=3, b=5$ 时, $|a+b|-|a-b|=6$;

当 $a=-3, b=5$ 时, $|a+b|-|a-b|=-6$;

当 $a=3, b=-5$ 时, $|a+b|-|a-b|=-6$;

当 $a=-3, b=-5$ 时，$|a+b|-|a-b|=6$. 故答案填 ± 6.

【说明】 本题考查的知识主要是绝对值的定义，以及有理数的加减.

14.（2005年第2试）如果正整数 n 有以下性质：n 的八分之一是平方数，n 的九分之一是立方数，n 的二十五分之一是五次方数，那么 n 就称为"希望数". 则最小的希望数是________.

【分析】 根据题意，这个数除以 2^3 后是完全平方数；除以 3^2 后是完全立方数；除以 5^2 后是完全五次方数.

【解】 设这个最小的希望数为 $2^{3x}\cdot 3^{2y}\cdot 5^{2z}$.

由题意得：$2^{x}\cdot 3^{2y}\cdot 5^{2z}$ 是完全平方数，

$2^{3x}\cdot 3^{y}\cdot 5^{2z}$ 是完全立方数，

$2^{3x}\cdot 3^{2y}\cdot 5^{z}$ 是完全五次方数，

显然 $x=5, y=10, z=6$，

故答案填 $2^{15}\cdot 3^{20}\cdot 5^{12}$.

【说明】 理解题意，尤其是理解八分之一、九分之一，二十五分之一是解本题的关键.

15.（2005年第1试）计算：$\left(\frac{7}{3}\right)^{1998}\times\frac{3^{2000}+15^{2000}}{7^{2000}+35^{2000}}=$________.

【分析】 将后一个式子的分子、分母分别提取公因式，然后约分即可.

【解】
$$\text{原式}=\left(\frac{7}{3}\right)^{1998}\times\frac{3^{2000}(1+5^{2000})}{7^{2000}(1+5^{2000})}$$
$$=\left(\frac{7}{3}\right)^{1998}\times\left(\frac{3}{7}\right)^{2000}=\frac{9}{49}.$$

答案填 $\frac{9}{49}$.

【说明】 这道题改编之后，成了2008年的试题，解题思维如出一辙.

趋势预测

近八年的希望杯竞赛中本讲知识始终是一个必考内容，原因很简单，因为数与式不仅是初中数学的基础，还是初中数学的重点. 一般情况下，每年考查一至两个客观题，考查知识点不拘泥于单纯计算或者求值，往往和其他章节的知识相结合来考查，试题难度一般在中档. 这些试题虽然难度不是太大，但是往往容易出错，特别是在计算时需要细心一些，耐心一些. 请同学们在考前训练中一定要注意严格训练.

根据历年考查的情况分析，预计今后关于数的考查将有这样一些趋势：着重考查绝对值等数的性质问题；着重考查计算能力；着重考查含年代等技巧性比较强的计算能力；关于式的考查将有这样一些趋势：着重考查代数式变形；着重考查分类讨论的思想方法；着重考查整式与其他知识综合的能力等.

针对模拟

一、选择题

1. 已知 $a-b=3$,那么 a^3-b^3-9ab 的值是 ( )

A. 3　　B. 9　　C. 27　　D. 81

2. 有理数 a,b,c 满足下列条件：$a+b+c=0$ 且 $abc<0$,那么 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ 的值 ( )

A. 是正数　　B. 是0

C. 是负数　　D. 不能确定是正数、负数或0

3. 已知 a 为正数,且 $a[a(a+b)+b]+b=1$,则 $a+b$ 的值是 ( )

A. $\frac{3}{4}$　　B. 2　　C. 1　　D. $\frac{1}{2}$

4. 如果实数 x,y 满足等式 $2x+x^2+x^2y^2+2=-2xy$,那么 $x+y$ 的值是 ( )

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

5. 当 $x=6,y=8$ 时,$x^6+y^6+2x^4y^2+2x^2y^4$ 的值是 ( )

A. $1200000-254000$　　B. $1020000-250400$

C. $1200000-250400$　　D. $1020000-254000$

6. 已知 m,n 是整数,$3m+2=5n+3$,且 $3m+2>30$,$5n+3<40$,则 mn 的值是 ( )

A. 70　　B. 72　　C. 77　　D. 84

7. 已知实数 a,b 满足条件：$a^2+4b^2-a+4b+\frac{5}{4}=0$,那么 $-ab$ 的平方根是 ( )

A. ± 2　　B. 2　　C. $\pm\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

8. 已知整数 x,y,z 满足 $x\leqslant y<z$,且 $\begin{cases}|x+y|+|y+z|+|z+x|=4,\\|x-y|+|y-z|+|z-x|=2,\end{cases}$ 那么 $x^2+y^2+z^2$ 的值等于 ( )

A. 2　　B. 14　　C. 2 或 14　　D. 14 或 17

二、填空题

9. 已知实数 a,b,c 满足条件 $a+b=8$,$c^2-ab+16=0$,那么 abc 的值是________.

10. 已知 x 是实数,并且 $x^3+2x^2+2x+1=0$,则 $x^{1994}+x^{1997}+x^{2000}$ 的值是________.

11. 当 $x=x_0,y=y_0$ 时,代数式 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}-6x+8y+71$ 取得最小值 m,那么 $x_0+y_0+m=$ ________.

12. 已知 $a\neq 0$,$14(a^2+b^2+c^2)=(a+2b+3c)^2$,那么 $a:b:c=$ ________.

13. 已知 $x+y=4$,$xy=-4$,那么 $\frac{x^3+y^3}{x^3-y^3}=$ ________.

14. 若 $x+\frac{1}{x}=3$，则 $\dfrac{x^3+\frac{1}{x^3}+7}{x^4+\frac{1}{x^4}+3}=$ ________.

15. 已知 $a^5+a^4b+a^4+a+b+1=0$，且 $3a+2b=1$，则 a^2+b^2 的值等于________.

16. 已知非负实数 a,b,c 满足条件：$3a+2b+c=4$，$2a+b+3c=5$，设 $S=5a+4b+7c$ 的最大值为 m，最小值为 n，则 $n-m=$ ________.

三、解答题

17. 已知多项式 x^3+ax^2+bx+c 中，a,b,c 为常数，当 $x=1$ 时，多项式的值是 1；当 $x=2$ 时，多项式的值是 2；若当 x 是 8 和 -5 时，多项式的值分别为 M 与 N，求 $M-N$ 的值.

18. 若代数式 $\frac{2}{3}x^2+\frac{3}{2}y^2+4x-3y+17$ 的最小值为 m，另一代数式 $-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}y^2+x-2y+2$ 的最大值为 M，求 $|M-m|$ 的值.

第二章　因式分解

考题再现

1.（2008 年第 1 试）若代数式 $x^3+y^3+3x^2y+axy^2$ 含有因式 $x-y$，则 $a=$ ________，在实数范围内将这个代数式分解因式，得 $x^3+y^3+3x^2y+axy^2=$ ________________.

【分析】 可用待定系数法，设 $x^3+y^3+3x^2y+axy^2$ 分解因式后等于 $(x-y)(x^2+mxy-y^2)$，然后列方程可以解得.

【解】 设 $x^3+y^3+3x^2y+axy^2=(x-y)(x^2+mxy-y^2)$，

整理，得 $x^3+y^3+3x^2y+axy^2=x^3+y^3+(m-1)x^2y-(m+1)xy^2$，

因为 $m-1=3$，即 $m=4$，

所以 $a=-(m+1)=-5$.

答案填 -5；$(x-y)(x+2y+\sqrt{5}y)(x+2y-\sqrt{5}y)$.

【说明】 类似的问题往往都可用类似的方法解决，待定系数法解这类题比较有效.

2.（2006 年第 2 试）计算 $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2+\sqrt{6}+\sqrt{8}+\sqrt{12}}-\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2-\sqrt{6}-\sqrt{8}+\sqrt{12}}$ 的结果是 ________.

【分析】 对分母可用“因式分解”的方法将其分解成因式，然后再计算.

【解】 原式 $=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}+2)}-\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}-2)}$

$$=\frac{1}{2+\sqrt{2}}-\frac{1}{2-\sqrt{2}}$$

$$=\frac{2-\sqrt{2}-2-\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}.$$

【说明】 “因式分解”的方法对解决本题帮助很大.

3.（2006 年第 1 试）已知实数 $m=2005^3-2005$，那么 m 不能被下列哪个数整除？（　　）

A. 2006　　B. 2005　　C. 2004　　D. 2003

【分析】 首先需将 2005^3-2005 运用“提公因式法”变形.

【解】 $m=2005^3-2005=2005(2005^2-1)=2004\times2005\times2006$，

由此可知答案选(D).

【说明】 这道题主要考查因式分解中的提取公因式法这一知识点，同时，考查了运用平方差公式因式分解.

4. (2006年第1试)已知A,n均为自然数,且$A=n^2+15n+26$,若A是一个完全平方数,那么自然数n等于________.

【分析】 将$n^2+15n+26$分解因式,得$(n+2)(n+13)$,然后可以求解.

【解】 $A=n^2+15n+26=(n+2)(n+13)$,

当$n=23$时,$(n+2)(n+13)=25\times 36$,符合题意.

答案填23.

【说明】 解这道题的关键是将$n^2+15n+26$分解因式.

5. (2005年第2试)在有理数范围内分解因式:$(x+1)(x+2)(x+3)(x+6)+x^2=$ ________.

【分析】 这是"$abcd+e$"型因式分解题.先要分组展开,再变形.

【解】 原式$=(x+1)(x+6)(x+2)(x+3)+x^2$

$$=(x^2+6+7x)(x^2+6+5x)+x^2$$
$$=(x^2+6+6x)^2-x^2+x^2$$
$$=(x^2+6x+6)^2.$$

答案填$(x^2+6x+6)^2$.

【说明】 这是一道常规题,也是用常规方法解的,要注意这种题型和方法.

6. (2005年第1试)分解因式:$ab(a+b)^2-(a+b)^2+1=$ ________.

【分析】 先展开,再分解,则无法继续分解,因此需先提前两项的公因式,再展开,再分解.

【解】 原式$=(ab-1)(a+b)^2$

$$=(ab-1)a^2+(ab-1)b^2+2ab(ab-1)+1$$
$$=(ab-1)a^2+(ab-1)b^2+(ab)^2+(ab-1)^2$$
$$=[(ab-1)a^2+(ab)^2]+[(ab-1)b^2+(ab-1)^2]$$
$$=[a^2+(ab-1)][b^2+(ab-1)].$$

答案填$(a^2+ab-1)(b^2+ab-1)$.

【说明】 这道题比较复杂,需要较强的观察力和耐力.

7. (2005年第1试)已知$x=\dfrac{a+b}{a-b}$,$y=\dfrac{a-b}{a+b}$,$a\neq\pm b$,且$19x^2+143xy+19y^2=2005$,则$x+y=$ ________ 或________.

【分析】 由已知得$xy=1$,且原等式可整理成$19(x+y)^2+10xy=2005$,由此可解.

【解】 由分析可得$19(x+y)^2=1995$,即$(x+y)^2=105$,$x+y=\pm\sqrt{105}$. 答案填$\sqrt{105}$;$-\sqrt{105}$.

【说明】 这道题考查的知识点有因式分解，数的开方等. 将已知条件变形是解题关键.

8. (2004 年第 2 试) 分解因式：$a^4+2a^3b+3a^2b^2+2ab^3+b^4=$ ________.

【分析】 因为 $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$，于是可猜测原式分解为 $(a^2+b^2+ab)^2$.

【解】 由上述分析，将 $(a^2+b^2+ab)^2$ 展开，恰好等于题中的多项式. 所以答案填 $(a^2+b^2+ab)^2$.

【说明】 也可以这样分解：原式 $=\frac{1}{2}[(a+b)^4+(a^4+b^4)]=\frac{1}{2}[(a^2+b^2+2ab)^2+(a^2+b^2)^2-2ab]=(a^2+b^2)^2+2ab(a^2+b^2)+(ab)^2=(a^2+b^2+ab)^2$.

9. (2004 年第 1 试) 已知 x 是实数，且 $(x^2-9x+20)\sqrt{3-x}=0$，那么 $x^2+x+1=$ ( )

A. 31　　B. 21　　C. 13　　D. 13 或 21 或 31

【分析】 积等于 0，则因式等于 0，再运用因式分解可求得 x，进而得解.

【解】 由题意，得 $x^2-9x+20=0$，$\sqrt{3-x}=0$.

$\therefore (x-4)(x-5)=0, 3-x=0$.

$\therefore x=4$ 或 $x=5$ 或 $x=3$，又 $x\leqslant 3$，故 $x=3$，

$\therefore x^2+x+1=x(x+1)+1=13$，答案选(C).

【说明】 这道题主要考查了因式分解的方法. 由积等于 0 得各因式等于 0 是解题的突破口.

10. (2003 年第 2 试) $y-2x+1$ 是 $4xy-4x^2-y^2-k$ 的一个因式，则 k 的值是 ( )

A. 0　　B. -1　　C. 1　　D. 4

【分析】 $4xy-4x^2-y^2-k=-k-(4x^2-4xy+y^2)=-k-(2x-y)^2$，

而 $y-2x+1=1-(2x-y)$，显然 $-k=1$，即 $k=-1$.

【解】 同上述分析过程，答案选(B).

【说明】 这道题考查的知识点是因式分解，但还可以用其他解法如验证法、待定系数法等.

趋势预测

前些年的希望杯竞赛中本讲知识始终是考查的一个热点内容. 但近两年来，随着课程标准对因式分解要求的降低，关于因式分解的考题少一些了，而且往往是用因式分解的思想解决一些二次根式等知识的计算问题. 考查知识点不拘泥于单纯的因式分解，往往和其他章节的知识相结合来考查，试题难度一般在中档，往往不能直接得出结论.

根据历年考查的情况分析，预计今后的考查仍将延续以往的形式：着重考查高次代数式的因式分解；着重考查需要先展开的代数式的因式分解；着重考查用因式分解与其他知识

整合的问题.考查的重点仍在因式分解的技巧.在冲刺复习中必须注意相关问题往往会和数的计算、整式的变形、变换相结合.

针对模拟

一、选择题

1. 7328^2-7325^2 等于 (　　)

A. 47249　　B. 45829　　C. 43959　　D. 44969

2. 若 $a+b+c=0$,则 $a^3+a^2c-abc+b^2c+b^3$ 的值是 (　　)

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

3. 下列四个从左到右的变形中,是因式分解的是 (　　)

A. $(x+1)(x-1)=x^2-1$　　B. $(a-b)(m-n)=(b-a)(n-m)$

C. $ab-a-b+1=(a-1)(b-1)$　　D. $m^2-2m-3=m\left(m-2-\dfrac{3}{m}\right)$

4. 将多项式 $x^2-4y^2-9z^2-12yz$ 分解成因式的积,结果是 (　　)

A. $(x+2y-3z)(x-2y-3z)$　　B. $(x-2y-3z)(x-2y+3z)$

C. $(x+2y+3z)(x+2y-3z)$　　D. $(x+2y+3z)(x-2y-3z)$

5. 已知四个代数式:① $m+n$;② $m-n$;③ $2m+n$;④ $2m-n$.当用 $2m^2n$ 乘以上述四个式中的两个时,便得到多项式 $4m^4n-2m^3n^2-2m^2n^3$,那么这两个式子的编号是 (　　)

A. ①与②　　B. ①与③　　C. ②与③　　D. ③与④

6. 下列五个多项式:

① $a^2b^2-a^2-b^2-1$;② $x^3-9ax^2+27a^2x-27a^3$;③ $x(b+c-d)-y(d-b-c)-2c+2d-2b$;④ $3m(m-n)+6n(n-m)$;⑤ $(x-2)^2+4x$.

其中在有理数范围内可以进行因式分解的有 (　　)

A. ①,②,③　　B. ②,③,④

C. ③,④,⑤　　D. ①,②,④

7. 下列各式分解因式后,可表示为一次因式乘积的是 (　　)

A. $x^3-9x^2+27x-27$　　B. $x^3-x^2+27x-27$

C. $x^4-x^3+27x-27$　　D. $x^3-3x^2+9x-27$

8. 将 $6a^2-13ab+6b^2$ 分解因式,所得的结果是 (　　)

A. $(2a-3b)(2b-3a)$　　B. $(3a+2b)(2b-3a)$

C. $(2a-3b)(3a-2b)$　　D. $(3a-2b)(2b+2a)$

9. 把多项式 $x^2-y^2-2x-4y-3$ 因式分解之后,正确的结果是 (　　)

A. $(x+y+3)(x-y-1)$　　B. $(x+y-1)(x-y+3)$

C. $(x+y-3)(x-y+1)$　　D. $(x+y+1)(x-y-3)$