普通高等教育“十一五”规划教材

线性代数

杨万才　主编

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育“十一五”规划教材

线性代数

杨万才　主编

张金良　李保安　冯爱芬　编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书内容由行列式、矩阵、线性方程组、特征值与特征向量、二次型、线性空间与线性变换、线性方程组与矩阵特征值的数值解法、Mathematica 软件应用、常见的线性代数模型 9 章构成，随各章内容配有一定数量的习题、书末附有习题答案. 第 1～5 章是线性代数的基本知识，是教育部非数学类本科专业线性代数课程教学基本要求的内容，教学时数约为 36 学时；第 6 章适合对线性代数要求较高或学有余力的学生学习. 第 7～9 章是把线性代数基本知识与计算技术和建模应用结合起来，以期理论联系实际，提高学生的计算和解决实际问题的能力.

本书可作为高等院校理工科、经济学、管理学等各专业线性代数课程的教材，也可作为教师、学生和科技工作者学习的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/杨万才主编. —北京：科学出版社，2008
(普通高等教育"十一五"规划教材)
ISBN 978-7-03-022673-0
Ⅰ. 线… Ⅱ. 杨… Ⅲ. 线性代数 Ⅳ. O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 116848 号

责任编辑：李晓鹏 / 责任校对：李奕萱
责任印制：张克忠 / 封面设计：耕者设计工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 8 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2008 年 8 月第一次印刷 印张：14 1/4
印数：1—5 500 字数：268 000

定价：23.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈文林〉)

前　　言

随着我国科学与经济的迅速发展，高等教育已进入了一个快速发展时期，高等学校的教学改革也在不断深化.在理工科、经济学、管理学等本科专业培养计划中，线性代数课程已成为一门必修的重要基础课.当然，教材建设是提高课程教学质量的重要环节之一，教材体系和教学内容是教师和学生共同关注的问题.本教材基于教育部高等学校非数学类专业线性代数课程教学基本要求，汲取编者以往编写线性代数教材的经验并结合长期从事该课程的教学实践体会而编写，力求对编写内容不断锤炼不断创新，以达到更加满意的效果.

本书的第1～5章是线性代数最基本也是最重要的内容，是培养计划中36学时的必修内容.第6章针对对本章知识有要求的个别专业而编写.第7、8章将线性代数中的计算问题与计算机计算有机地结合起来，提高了学生的计算能力.第9章运用线性代数知识建立数学模型，旨在培养学生解决实际问题的能力.第6～9章内容独立，约需要24学时，可根据培养计划中教学时数适当安排教学或让学生自学.编写中我们力求做到由浅入深、深入浅出、化难为易、循序渐进，既便于读者自学又不失数学的严谨性，既注重理论的完善又加强了实际应用.

本书第3、5章由杨万才编写，第4、7、8章由张金良编写，第1、6章由李保安编写，第2、9章由冯爱芬编写，杨万才教授任主编.在编写过程中，河南科技大学教材工作委员会的领导和理学院的数学老师们给予了大力的支持和关心，科学出版社高等教育出版中心的同志倾注了心血，在此一并表示诚挚的感谢.

因编者水平有限，书中疏漏与不足之处在所难免，敬请读者不吝赐教.

编　者

2008年5月

目　　录

第 1 章　行列式 …… 1
1.1　二阶、三阶行列式 …… 1
1.2　n 阶行列式 …… 4
1.3　行列式的性质 …… 7
1.4　行列式按一行(列)展开 …… 14
1.5　克拉默(Cramer)法则 …… 20
习题 1 …… 23
第 2 章　矩阵 …… 27
2.1　矩阵的定义 …… 27
2.2　矩阵的运算 …… 30
2.3　可逆矩阵 …… 37
2.4　矩阵的分块 …… 42
2.5　矩阵的初等变换与初等矩阵 …… 48
2.6　矩阵的秩 …… 54
习题 2 …… 58
第 3 章　线性方程组 …… 64
3.1　高斯(Gauss)消元法 …… 64
3.2　n 维向量组的线性相关性 …… 75
3.3　极大线性无关组 …… 83
3.4　向量空间 …… 90
3.5　线性方程组解的结构 …… 93
习题 3 …… 103
第 4 章　特征值与特征向量 …… 108
4.1　矩阵的特征值与特征向量 …… 108
4.2　相似矩阵 …… 113
4.3　实对称矩阵的相似矩阵 …… 117
习题 4 …… 122
第 5 章　二次型 …… 125
5.1　二次型与对称矩阵 …… 125
5.2　化二次型为标准形的三种方法 …… 128

5.3　正定二次型 …… 133
习题 5 …… 136
第 6 章　线性空间与线性变换 …… 139
6.1　线性空间的定义与性质 …… 139
6.2　维数、基与坐标 …… 142
6.3　基变换与坐标变换 …… 145
6.4　线性变换 …… 149
6.5　线性变换的矩阵表示 …… 154
习题 6 …… 160
第 7 章　线性方程组与矩阵特征值的数值解法 …… 162
7.1　高斯消去法 …… 162
7.2　高斯主元素消去法 …… 166
7.3　迭代法 …… 168
7.4　幂法与反幂法 …… 174
7.5　QR 方法 …… 177
习题 7 …… 180
第 8 章　Mathematica 软件应用 …… 181
8.1　行列式与矩阵的运算 …… 181
8.2　线性方程组的求解 …… 184
8.3　施密特正交化和二次型的标准化 …… 188
第 9 章　常见的线性代数模型 …… 192
9.1　数学建模初步 …… 192
9.2　常见的线性代数模型 …… 194
习题 9 …… 207
习题答案 …… 208

第 1 章　行　列　式

行列式是研究线性代数的一个工具，由研究线性方程组而产生，现在它在数学和其他学科上都有着广泛的应用. 本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质和计算方法，此外还要介绍用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

1.1　二阶、三阶行列式

1.1.1　二阶行列式

设二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，x_1，x_2 代表未知数，$a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$代表未知数的系数，b_1，b_2 代表常数项，用消元法从(1.1)式中消去未知数 x_2，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2.$$

类似地，从(1.1)式中消去未知数 x_1，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，得

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

从未知数解的(1.2)右端来看，分子、分母均为四个数分两对相乘再相减而得. 为便于记忆和叙述，分母 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 是方程组(1.1)四个系数的运算确定的，将这四个数按它们所在方程组的位置排成两行两列(横排称行，竖排称列)，并定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.3}$$

为**二阶行列式**. 可用字母 D 表示二阶行列式，并记 $D=\det(a_{ij})$，$i,j=1,2$，其中数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$称为行列式(1.3)的元素. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 称为列标，表明该元素位于第 j 列. 可以用对

角线法帮助记忆，见图 1.1. 把 a_{11} 到 a_{22} 的实联线称为**主对角线**，a_{12} 到 a_{21} 的虚联线称为**副对角线**，于是二阶行列式便是主对角线上两个元素之积减去副对角线上两个元素之积.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

图 1.1

利用二阶行列式的概念，(1.2)中的分子可写为二阶行列式：

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2,\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21},$$

这样，$D\neq 0$ 时，

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{a_{22}b_1-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}=\dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\dfrac{D_1}{D}, \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}=\dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\dfrac{D_2}{D}. \end{cases} \tag{1.4}$$

二阶行列式 D 称为线性方程组(1.1)的**系数行列式**. 对比上面可以发现，x_1 的分子 D_1 是 D 的第一列用常数项 b_1,b_2 代替后得到的二阶行列式；x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1,b_2 代替 D 的第二列得到的二阶行列式. 因此，就有了二元线性方程组的行列式解法(1.4).

1.1.2　三阶行列式

设有 9 个数排成 3 行 3 列，记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

它表示代数和 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$，并称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

为三阶行列式.

如图 1.2,图 1.3 三条主对角线上(实线)三个元素乘积减去三条副对角线(虚线)上三个元素乘积.

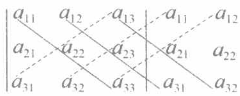

图 1.2

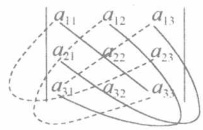

图 1.3

注:图 1.2 右边两列元素为方便看对角线而临时添加的.

类似二元线性方程组的消元法及行列式表示,求解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

若系数行列式 $D \neq 0$,其解表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D},$$

其中,

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

例 1.1 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -1. \end{cases}$$

解 系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 22 \neq 0, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 8 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 66,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -22, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 44,$$

故方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{66}{22}=3,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-22}{22}=-1,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{44}{22}=2.$$

1.2　n 阶行列式

1.1 节介绍了二阶、三阶行列式的简单概念，并有比较直观的对角线计算方法，但对于高于三阶的行列式，就没有直观的对角线计算方法了. 联系线性方程组的行列式解法，必须研究四阶及以上高阶行列式的概念及计算. 为此先引入 n 元排列的逆序与奇偶性的概念.

1.2.1　排列

定义 1.1　自然数 $1,2,\cdots,n$ 按照一定次序排成一个数组，称为一个 n 元**排列**，记为 $i_1i_2\cdots i_n$.

例如，4231 是一个四元排列，自然数 1,2,3,4 的四元排列共有 4! 个. $123\cdots n$ 是一个 n 元排列，也称它为**自然排列**. 同样自然数 $1,2,\cdots,n$ 的 n 元排列共有 $n!$ 个.

定义 1.2　在一个 n 元排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，如果两个数的大小顺序与前后位置相反，即前面的数大于后面的数，则称这两个数构成一个**逆序**，一个排列中逆序个数的总和称为这个排列的**逆序数**，记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**，逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

例 1.2　求下列排列的逆序数，并说明它是奇排列还是偶排列：

(1) 52134；　(2) $n(n-1)\cdots 21$.

解　(1) 在排列 52134 中，数 4 前面有数 5 构成一个逆序；数 3 前面有数 5 构成一个逆序；数 1 前面有数 5、数 2 各构成一个逆序；数 2 前面有数 5 构成一个逆序；数 5 前面没有数构成逆序，因此，$\tau(52134)=1+1+2+1+0=5$. 它是一个奇排列.

(2) 同理，$\tau(n(n-1)\cdots 21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$. 当 $n=4k,n=4k+1$ 时，该排列是偶排列；当 $n=4k+2,n=4k+3$ 时，该排列是奇排列 $(k=0,1,2,\cdots)$.

定义 1.3　把一个排列中任意两个元素的位置对调，其余的元素不动，这样得到一个新排列的实施过程叫**对换**. 而相邻两个元素的对换也叫**邻换**.

对换有下列性质：

定理 1.1　一个排列实施一次对换，改变一次排列的奇偶性.

证　先证邻换的情形. 设 n 元排列为

$$a_1\cdots a_l ijb_1\cdots b_m,$$

将相邻两个元素 i,j 对换得到新排列

$$a_1\cdots a_l j i b_1\cdots b_m.$$

虽然 $a_1,\cdots,a_l;b_1,\cdots,b_m$ 这些元素的逆序数经过对换并不改变,但 i,j 两元素的逆序数改变成:当 $i<j$ 时,经对换后 i 的逆序数增加 1,j 的逆序数不变;当 $i>j$ 时,经对换后的 j 逆序数减少 1,i 的逆序数不变,所以排列 $a_1\cdots a_l i j b_1\cdots b_m$ 与排列 $a_1\cdots a_l j i b_1\cdots b_m$ 的奇偶性不同.

再证一般对换的情形.设 n 元排列为

$$a_1\cdots a_l i b_1\cdots b_m j c_1 c_2\cdots c_s$$

元素 i 和 j 之间相隔 m 个元素.为实现 i 与 j 的对换,可将 i 与 b_1 邻换,再把 i 与 b_2 邻换,依次继续下去经 $m+1$ 次邻换,可把 i 调换到 j 之后,即

$$a_1\cdots a_l b_1\cdots b_m j i c_1 c_2\cdots c_s,$$

再将 j 依次与 $b_m,\cdots,b_1$ 作 m 次邻换,实现 i 与 j 的对换,变成

$$a_1\cdots a_l j b_1\cdots b_m i c_1 c_2\cdots c_s.$$

这样,前后共作了 $2m+1$ 次的邻换,所以这两个排列的奇偶性相反.

推论 1.1 任意一个 n 元排列都可以经过一定次数的对换变成自然排列,且奇排列的对换次数为奇数,偶排列的对换次数为偶数.

证 由定理 1.1 知对换的次数就是排列奇偶性的改变次数,而自然排列是偶排列,从而推论 1.1 成立.

推论 1.2 全体 n 元排列的集合中,奇、偶排列的个数各占一半.

1.2.2 n 阶行列式的定义

下面来看前面讨论过的三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

等式右边的每一项都恰是三个元素的乘积,而这三个元素位于三个不同的行与不同的列.因此,等式右边六项中的任一项除了正负号外都可以写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$.这里第一个下标行标排成了自然排列,第二个下标列标排成了 $j_1j_2j_3$,是自然数 1,2,3 三元排列的某一个排列.可以知道这样的排列共有 6 个,其中 3 个偶排列 123,231,312 对应着三项正号;3 个奇排列 132,213,321 对应着三项负号.所以,可以将三阶行列式写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中$\sum\limits_{j_1j_2j_3}$表示所有三元排列求和.

仿照上述,可以将其推广到一般的情形.

定义 1.4　把 n^2 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$排成 n 行 n 列,且按照下式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.5}$$

计算得到的一个数,称为 **n 阶行列式**,简记为 $\det(a_{ij})$或$|a_{ij}|$,其中$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$表示所有 n 元排列求和. a_{ij}是行列式的元素,i 是行下标,j 是列下标. $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$称为行列式的通项.

(1.5)式的右边共有 $n!$ 个乘积项,每一乘积项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$中的每一个元素取自等式左边行列式中不同的行不同的列. 当行下标按自然顺序排列时,相应的列下标是 $1,2,\cdots,n$ 的一个 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$,且它是偶排列时,项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$前面取正号;是奇排列时项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$前面取负号,因此用$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$表示. 可见二阶、三阶行列式按此定义与 1.1 节中用对角线法则定义是一致的. 当 $n=1$ 时,一阶行列式$|a|=a$,注意不要与绝对值记号相混淆.

例 1.3　证明 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证　按定义并根据已知行列式的特点,所关心的是在 $n!$ 乘积项中那些不为零的项,易见等式右边应该只有一个乘积项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$不为零. 第一行仅有第一列元素 $a_{11}\neq 0$,其余全为零,所以该项中必有元素 $a_{1j_1}=a_{11}$;而第二个元素 a_{2j_2}在第二行中只能选 a_{22}不能选 a_{21},这是因为该项中不能存在两个同列的元素;同理 a_{3j_3}只能取 a_{33};…;第 n 个元素只能取第 n 行的 a_{nn};且$(-1)^{\tau(123\cdots n)}=1$,从而所证结论成立.

例 1.3 所给的行列式主对角线上方元素全为零,称为**下三角行列式**. 类似地,主对角线下方元素全为零的行列式称为**上三角行列式**,同样可以证明上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地，主对角线外的元素全为零的行列式称为**对角行列式**，对角行列式等于它的主对角线上元素的乘积，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

显然，一个行列式中某一行或某一列元素全为零(称出现**零行**或**零列**)，则这个行列式等于零.

注意，为书写简单起见，主对角线上面或下面全为零的元素可以不写，如 m 阶对角行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m.$$

读者会注意到定义 1.4 的通项 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 中，各元素的行下标已构成自然排列，列下标是一个 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$. 那么如果把通项中的列下标先构成自然排列，行下标是一个 n 元排列 $i_1i_2\cdots i_n$，由定理 1.1 及推论可以证明

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} = (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}.$$

这样，n 阶行列式又可以定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}. \tag{1.6}$$

因此，定义 1.4 只是 n 阶行列式若干种定义中的一种，其他的定义不再赘述.

1.3 行列式的性质

行列式定义 1.4 给出了计算行列式的方法，但对于一个阶数较高的行列式来说，计算量也较大. 因为计算一个 n 阶行列式一般要计算 $n!$ 个乘积项，且每一项都是 n 个元素的乘积，总共需要作 $(n-1)n!$ 次乘法运算. 例如，$n=25$，即 25 阶行

列式要作$(n-1)n!=24\times 25!\approx 3.7227\times 10^{26}$次乘法运算，这个计算量可谓之大！为此，还要讨论行列式的简单计算方法. 行列式的性质就可以帮助我们解决这个问题.

设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

把 D 的行与列依次互换得到新的行列式，记作

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

称 D^{T} 为 D 的**转置行列式**. 显然

$$(D^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=D.$$

性质 1.1　行列式与它的转置行列式相等，即 $D^{\mathrm{T}}=D$.

证　设 $D^{\mathrm{T}}=|b_{ij}|$，由转置的定义知 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$. 由(1.6)式有

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{j_11}b_{j_22}\cdots b_{j_nn}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=D.$$

由性质 1.1 可知，行列式的行与列具有同等的地位，因而凡是对行成立的性质，对列也同样成立，反之亦然. 故下面讨论的性质中，只需对行证明即可.

性质 1.2　互换行列式的任意两行(列)，行列式变号.

证　设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

只要证明 $D=-D_1$ 即可. 因为 D 中任一项为

$$(-1)^{\tau(j_1\cdots t\cdots s\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{it}\cdots a_{js}\cdots a_{nj_n},$$

与之相对的 D_1 中任一项为

$$(-1)^{\tau(j_1\cdots s\cdots t\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{js}\cdots a_{it}\cdots a_{nj_n},$$

根据定理 1.1,

$$(-1)^{\tau(j_1\cdots t\cdots s\cdots j_n)}=(-1)(-1)^{\tau(j_1\cdots s\cdots t\cdots j_n)},$$

即 D 与 D_1 对应项的符号相反,从而得证.

以 r_i,c_j 分别表示行列式的第 i 行和第 j 列,记 $r_i\leftrightarrow r_j$ 为交换第 i 行和第 j 行,$c_i\leftrightarrow c_j$ 为交换第 i 列和第 j 列.

推论 1.3 行列式中若有两行(列)元素相同,该行列式的值为零.

证 设 D 中第 i 行和第 j 行的对应元素相同,交换 i 行和 j 行得 $D=-D$,即 $D=0$.

性质 1.3 行列式的某一行(列)诸元素同乘一数 k,等于用数 k 乘此行列式.

证明略.

第 i 行(或列)乘以 k,记作 $r_i\times k$(或 $c_i\times k$). 例如,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

推论 1.4 行列式中某一行(列)诸元素的公因子可以提到行列式符号外面.

第 i 行(或列)提取公因子 k,记作 $r_i\div k$(或 $c_i\div k$).

由推论 1.3 与推论 1.4 不难得下面推论 1.5.

推论 1.5 行列式中若有两行(列)元素成比例,则此行列式等于零.

性质 1.4 若行列式的某一行(列)的每一个元素都是两数之和,则行列式等于两个行列式之和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1.4 也可以解释为，若两个行列式中除了第 i 行外，其余 $n-1$ 行元素对应相同，则这两个行列式相加，只需将第 i 行元素对应相加，其余各行元素保持不变.

证 由定义 1.4 得

$$\begin{aligned}
\text{左} &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(a_{ip}+a'_{ip})\cdots a_{nj_n} \\
&= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{ip}\cdots a_{nj_n} \\
&\quad+\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a'_{ip}\cdots a_{nj_n}=\text{右}.
\end{aligned}$$

性质 1.5 把行列式的某一行(列)诸元素同乘一数 k 后加到另一行(列)对应的元素上去，行列式不变，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

用 D 的第 i 行元素乘数 k 后加到第 j 行的对应元素上得

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 $D=D_1$.

证 由性质 1.4，行列式 D_1 可分为两个行列式之和，一个是原行列式 D，另一

个是第 i 行与第 j 行元素相同其余各行不变的行列式,根据推论 1.3 后者为零,结论得证.

用第 i 行元素乘数 k 后加到第 j 行的对应元素上,记为 r_j+kr_i(第 i 列元素乘数 k 后加到第 j 列的对应元素上记为 c_j+kc_i). 这里要注意 r_i+kr_j 与 kr_j+r_i 一般不同,不能套用加法的交换律. 例如,

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+2r_2} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6,$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{2r_2+r_1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -12.$$

例 1.4 计算

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 $$D \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_2} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-2r_1]{r_2+r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4+2r_2]{r_3-r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4+2r_3} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4.$$

例 1.5 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

解 所给行列式的特点是各行(列)元素之和都是 $x+(n-1)a$,故将第 2 列至第 n 列都加到第 1 列上,并提取公因子,再用行列式的性质和上三角行列式的计算,得