

● 中学数理化发展智能丛书 ●

456958

# 怎样学好 **高三** **代数**

周长生 刘 坤  
常相舜 谢长青 编著

中学数理化发展智能丛书

# 怎样学好高三代数

周长生 刘坤 常相舜 编著

河南科学技术出版社

## 内 容 提 要

依据国家教委颁布的《中学数学教学大纲》的精神，对高三代数（排列、组合、二项式定理、数列极限、函数极限）进行了系统的详细的阐述，并精选了适量的例、习题，书末附有全书习题的答案或提示。

本书重理论，重体系，重方法，特别在挖掘数学理论和例题隐含的智能价值（在学习数学知识的过程中，促进学生智力的发展和能力的提高）上，做了深入的探索。

中学数理化发展智能丛书

### 怎样学好高三代数

周长生 刘坤 常相舜 编著

责任编辑 孙澈

河南科学技术出版社出版

河南 遂平县 印刷厂印刷

河南省新华书店发行

787×1092毫米 32开本 8.375印张 167千字

1990年2月第1版 1990年2月第1次印刷

印数：1—9,100册

ISBN7-5349-0545-1/G·545

定价 3.20元

# 目 录

<b>第八章 排列与组合、二项式定理</b> .....	( 1 )
一 排列与组合 .....	( 1 )
8.1 预备知识(1)——分类 .....	( 1 )
8.2 预备知识(2)——方法和步骤 .....	( 6 )
8.3 排列与组合概述 .....	( 17 )
8.4 排列 .....	( 21 )
8.5 组合 .....	( 40 )
8.6 排列组合综合问题 .....	( 54 )
8.7 可重复排列 .....	( 62 )
二 二项式定理 .....	( 65 )
8.8 二项式定理 .....	( 65 )
复习题八 .....	( 74 )
<b>第九章 极限论</b> .....	( 79 )
一 数列的极限 .....	( 79 )
9.1 变量的变化趋势 .....	( 79 )
9.2 数列极限的初步概念 .....	( 85 )
9.3 数列极限概念的精确化 .....	( 88 )
9.4 数列极限的证明方法(一) .....	( 94 )

9.5	数列极限的证明方法(二)	(100)
9.6	收敛数列的性质	(106)
9.7	发散数列的一些类型	(114)
9.8	收敛数列的判别方法	(119)
9.9	无穷小与无穷大的运算和性质	(133)
9.10	收敛数列的四则运算	(140)
9.11	级数	(154)
9.12	单元小结	(161)
二	函数的极限和连续	(164)
9.13	当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限	(165)
9.14	当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限	(170)
9.15	函数极限的证明方法	(178)
9.16	函数极限的性质和四则运算	(185)
9.17	函数的连续性	(203)
9.18	连续函数的运算性质	(208)
9.19	初等函数的连续性和极限的计算法	(210)
9.20	函数极限的判别法和两个重要极限	(218)
9.21	连续函数在闭区间上的性质	(229)
9.22	单元小结	(232)
9.23	本章学习指导	(234)
	复习题九	(242)
	附录: 参考答案	(246)

## 第八章 排列与组合、二项式定理

### 一 排列与组合

#### 8.1 预备知识(1)——分类

##### 8.1.1 分类的要求——不漏不重

分类是非常重要的，也是最常见的。例如，各种不同的商店——百货店、服装店、文具店、水果店等就是一个分类的实例。大家知道这些不同的商店是按照商品的不同特性来区分的。走进商店再看看，就会看到每一家商店又都按照货物的不同品种分门别类地放在不同的货架上，就以服装商店来说吧，通常先把服装分为两大类——男装和女装，其次再把男装（或女装）分为上衣、裤子、大衣等若干种，最后还要按照不同质料、不同花色、不同的尺寸放在不同的货架上，越分越细，这样才能便于出售。

在数学里，分类也是很重要的。例如，分数可分为真分数和假分数，又如三角形分成锐角三角形、直角三角形、钝角三角形。这样才利于我们研究和学习。

通过以上事例可以看出，所谓分类，就是把一个一般概

念分成为它的特殊概念。例如，把服装分成为男装和女装，服装就是一般概念，男装和女装都是它的特殊概念；把三角形分成为钝角三角形、直角三角形、锐角三角形，三角形就是一般概念，锐角三角形、直角三角形和钝角三角形就是它的特殊概念。

### 练习 8.1

1. 下面的分类都对吗？你考虑过这个问题吗？

- (1) 人可以分成男人和女人两类；
- (2) 人可以分成老年、中年、青年、少年、儿童五类；
- (3) 猫可以分成大猫、小猫、白猫、黑猫、花猫五类；
- (4) 三角形可以分成等边三角形、等腰三角形、直角三

角形、锐角三角形四类。

2. 试根据你自己的意愿把下列概念进行分类。

- (1) 你们班上的全体同学；
- (2) 学生；
- (3) 笔；
- (4) 三角形；

3. 你能把地球上的所有动物没有遗漏地分成两类吗？

从以上练习可以知道，有正确的分类，也有错误的分类。要想使分类不出差错，就得研究分类的规则。这里我们只指出一个最为重要的规则：

依据需要（即实践目的）在每一次分类时，应当选取一个分类标准，使分类不遗漏不重复。

为了说明这个规则的重要性，现在举一些大家都熟悉的

事例。比方在某班50个学生中，要想了解其基本情况就需要进行一些分类。

如果以政治面目（把政治面目做为分类的标准）来分有：

{ 群众：10人；  
团员：40人。

注意：团员和群众加在一起总共50人，一个人也没有漏掉，也不存在某一个学生既是团员又是群众的重叠现象。可见满足了不漏不重的要求。

如果以年龄（把年龄做为分类的标准）来分有：

{ 18岁：5人；  
17岁：40人，  
16岁：5人。

注意：三种年龄的总人数仍为50人，不漏不重。

如果以学习成绩（把学习成绩当做分类标准）来分有：

{ 优：40人；  
良：5人；  
中：3人；  
差：2人。

注意：四种成绩的总人数仍是50人，不漏不重。

由以上事例可以知道，所谓分类的标准就是每一个对象所共有的某一属性。例如，上面所依据的政治面目、年龄、学习成绩都是每一个学生都具有的属性。分类的标准通常也叫分类的依据或分类的根据。



违反分类规则会出现什么情况呢？如果选取两个或两个以上的标准分类，就要发生混乱，例如，如果有人把某班学生进行如下的分类：

团 员：40人；

优 等 生：40人；

17 岁：40人；

家住北京：30人；

有慢性病：2人。

注意：根据这个分类人们不知道这个班到底有多少人，而且既有遗漏又有重复。这样的分类对解决问题就没有多大用处。

上面练习第1题，其中错误的分类都是违反了分类的规则。如(4)中把三角形分成等边三角形、等腰三角形、锐角三角形、直角三角形就是使用了两个标准：角的大小和边的长短；又如在(2)里把人分成老年、中年、青年、少年、儿童，虽然使用了一个标准（年龄）没有重复，但是却发生了遗漏，即漏掉了成年、幼儿、婴儿这三类。

用集合的观点说明分类更为清晰。把被分的一般概念看做全集  $I$ ，把分成的各个特殊概念看做真子集  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、……，则

$$I = A \cup B \cup C \cup \dots$$

这个等式，既可以表明分类没有遗漏（因为各个真子集的并集是全集  $I$ ），又可以表明分类没有重复（因为任意两个真子集的交集是空集  $\phi$ ）。

## 练习 8.1

4. 选取一个适当标准对下列概念进行分类：

(1) 整数；                      (2) 三角形；

(3) 中学生；                    (4) 老年人。

5. 试找出几个生活中分类的实例。

### 8.1.2 二分法

二分法是一种特殊的分类方法，简便而且科学。例如，把几何图形分成平面图形和空间图形两类，把同一平面上的两条直线的位置关系分成相交和平行两类，把整式分成单项式和多项式两类等都是应用二分法分类的。

所谓二分法，就是按照对象具有或者不具有某种属性而把它们分成相互矛盾的两类，可以表示为“ $A$ 和非 $A$ ”。例如，我们可以把地球上所有的动物应用二分法分成这样的两类：狗和非狗。不难看出，这种分法既没有遗漏，也没有重复；因为你随便指出一种动物，像马、牛、羊……，不是属于第一类“狗”，就是属于第二类“非狗”，这表明没有遗漏；又因不存在这样的动物，它既是狗又不是狗，这说明也没有重复。

应用二分法时，第一类( $A$ )通常指某一特定的对象，第二类(非 $A$ )则除 $A$ 以外的其他对象。显然第二类的范围却远远超过第一类。上面谈到的“狗”和“非狗”的分类，第一类“狗”指的就是一种特定的动物，第二类“非狗”指的是

除狗以外的千千万万的动物。对于第二类动物虽然任何人不可能都了解它们，但是任举出一种动物，我们却能马上说出它属于两类中的哪一类。为什么能做到这一点呢？这是因为我们清楚地了解第一类“狗”的特征。事实上，在了解了狗的特性的同时也就必然了解什么是非狗了。

采用二分法时，对第一类（ $A$ ）的了解极为重要。当弄清什么是 $A$ 的同时也就必然弄清什么是非 $A$ ，为了进一步说明这个问题，我们还可以指出这样一个事例，在行人千万的大街上，一个被丢失的小孩子之所以能认出哪一个人是或者不是他的妈妈，正是因为他能清楚地认识他的妈妈，从而他也能同样清楚地认出哪一个人不是他的妈妈，这说明一个小孩子就能使用二分法处理问题。

由于二分法既简便又科学，在数学里常应用它进行分类来研究问题。这样的例子很多。例如，零和非零的数、负数和非负数、凸多边形和非凸多边形、大于和不大于、单值对应和多值对应等等都是二分法的例子。

二分法也可用集合的观点来说明。被分的一般概念——全集 $I$ ，总可以分成任一个集合 $A$ 与 $\bar{A}$ ，而 $A \cap \bar{A} = \phi$ ， $A \cup \bar{A} = I$ 。

## 8.2 预备知识(2)——方法和步骤

解数学题，常涉及到方法和步骤。但是，什么是方法，什么是步骤，又没有一个明确的定义。下面通过例子说明一下。

做一件事情，往往需要若干个步骤。

当然，简单的事情，有时一步就可完成，例如，解方程

$$2x=6, \quad (1)$$

只要两边都除以 2，就可得出

$$x=3.$$

而解方程

$$2x-3=-3x+7, \quad (2)$$

就需要三个步骤：

第一步，移项，得

$$2x+3x=3+7;$$

第二步，合并同类项，得

$$5x=10;$$

第三步，两边都除以 5，得

$$x=2.$$

很明显，这三个步骤合在一起，构成一种解法。解法就是方法，可见，方法和步骤是不同的。解方程 (2) 的方法就包括三个步骤。

再看一个例子。

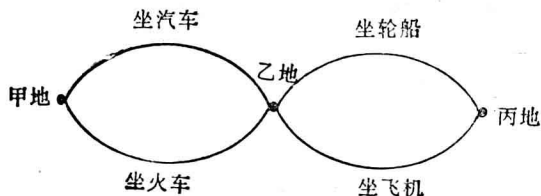


图 8.1

从甲地到乙地有两种交通工具，汽车或火车；从乙地到丙地也有两种交通工具，轮船或飞机；利用这些交通工具从甲地经乙地到丙地有几种方法？

容易看出，有四种不同方法（图 8.1）：

- (1) 从甲地到乙地坐汽车，从乙地到丙地坐轮船；
- (2) 从甲地到乙地坐汽车，从乙地到丙地坐飞机；
- (3) 从甲地到乙地坐火车，从乙地到丙地坐轮船；
- (4) 从甲地到乙地坐火车，从乙地到丙地坐飞机。

上面的每一种方法，都包括两个步骤：

第一步，先从甲地走到乙地；

第二步，再从乙地走到丙地。

这样说来，是不是方法都包括着步骤呢？

如果我们这样提出问题：从甲地到丙地，每一个步骤各有几种走法。那么，很明显，完成第一个步骤，有两种方法，即坐汽车或坐火车；完成第二个步骤，也有两种方法，即坐轮船或坐飞机。这里，步骤就包括着方法。

可见，关于方法和步骤的关系问题，既有可能是一种方法包括若干个步骤，也有可能是一个步骤包括着若干个方法。因此，要注意：如果解决某一个具体问题而涉及到方法和步骤的关系时，一定要分清方法和步骤，不可混为一谈。方法有简繁的区别，步骤有先后顺序的不同。

### 8.2.1 加法原理

**问题 1** 从甲地到乙地，可以乘火车，可以乘汽车，也

可以乘轮船。一天中，火车有5班，汽车有10班，轮船有7班，问有几种不同的走法？

我们要完成的事情是从甲地到达乙地。乘坐同一类交通工具时，不同的班次应看做是不同的走法。这里一共有三类交通工具。

因为乘火车有5种走法，乘汽车有10种走法，乘轮船有7种走法，每一种走法都可以从甲地到达乙地，因此，从甲地到乙地共有

$$5+10+7=22$$

种不同的走法。

**问题 2** 用1、2、3三个数字，可以组成几个没有重复数字的自然数？

题中所指“没有重复数字”，就是所组成的每一个自然数里，不能有两个数字是同一数字。例如，223就是有重复数字的自然数，而123就是没有重复数字的自然数。

根据现在我们掌握的知识，解决这个问题，还没有一个现成的计算方法。但是，我们可以把满足条件的自然数一一列举出来。容易看出，采用这种方法解这个题目，即使一个小学低年级学生也是可以办得到的。不过，要使列举出来的自然数不漏不重，最好还是先进行分类。

很明显，用1、2、3三个数字组成的没有重复数字的自然数，可以是三位数，可以是两位数，也可以是一位数。因此，我们就以“位数”作为分类的标准，于是有下面的解法（图8.2）：

### 解法 1:

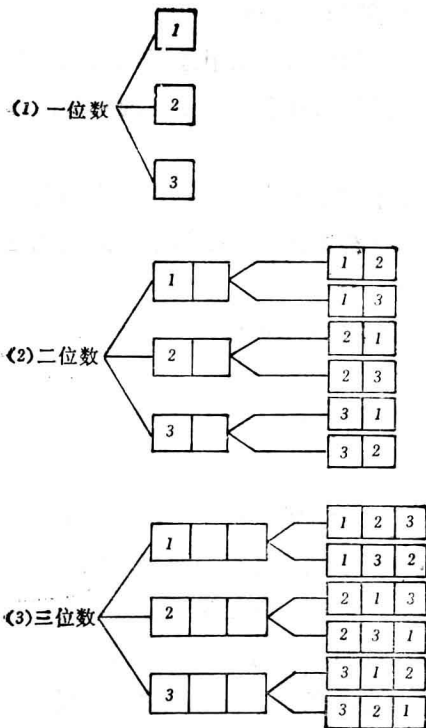


图 8.2

可见，组成的一位数自然数是：

第一类，组成的一位数有 3 个。

第二类，组成的两位数有 6 个。

第三类，组成的三位数有 6 个。

这就是说，组成第一类自然数有 3 种方法，组成第二类

自然数有 6 种方法，组成第三类自然数有 6 种方法。于是，  
 总共有

$$3 + 6 + 6 = 15$$

个没有重复数字的自然数。

解这个题，也可以用另外的标准进行分类。如果以个位数字做为分类标准，也分做三类：

第一类，个位数字是 1。

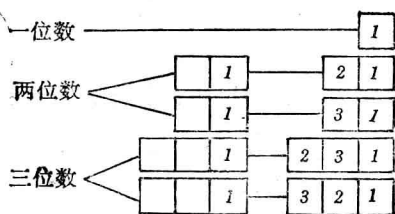
第二类，个位数字是 2。

第三类，个位数字是 3。

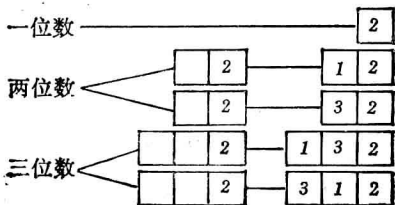
这样，我们又可得一解法如下。

解法 2：如图 8.3。

(1) 个位数字是 1:



(2) 个位数字 2:





(3) 个位数是 3:

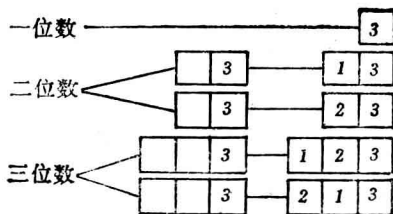


图 8.3

个位数字是 1 的自然数有 5 个，个位数字是 2 的自然数有 5 个，个位数字是 3 的自然数有 5 个，总共有

$$5+5+5=15$$

个没有重复数字的自然数。

如果以第一位数字为标准进行分类，就可得到第三种解法。这种解法由读者自己完成。

由问题 1 和问题 2 可以得出如下的原理：

**加法原理** 完成一件事，有几类办法，在第一类办法中有  $m$  种方法，在第二类办法中有  $n$  种办法，在第三类办法中，有  $p$  种方法，……。不论通过哪种方法，都可以完成这件事，那么完成这件事总共有  $m+n+p+\dots$  种方法。

### 8.2.2 乘法原理

**问题 3** 从甲城到丙城必须经过乙城，从甲城到乙城有  $a_1$ 、 $a_2$ 、 $a_3$ 、 $a_4$  四条道路，由乙城到丙城有  $b_1$ 、 $b_2$ 、 $b_3$  三条道路，问从甲城到丙城有几种走法？