张嗣瀛院士文集

——庆祝张嗣瀛院士八十华诞

NEUPRESS
东北大学出版社

张嗣瀛院士文集

——庆祝张嗣瀛院士八十华诞

东北大学出版社

·沈　阳·

图书在版编目（CIP）数据

张嗣瀛院士文集：庆祝张嗣瀛院士八十华诞 / 张嗣瀛. — 沈阳 ：东北大学出版社，2005.6

ISBN 7-81102-141-2

Ⅰ.张… Ⅱ.张… Ⅲ.①张嗣瀛—文集②自动控制—文集 Ⅳ.TP273—53

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 048556 号

出 版 者：东北大学出版社

地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号

邮编：110004

电话：024—83687331（市场部） 83680267（社务室）

传真：024—83680180（市场部） 83680265（社务室）

E-mail：neuph @ neupress.com

http：//www.neupress.com

印 刷 者：铁岭新华印刷有限公司

发 行 者：东北大学出版社

幅面尺寸：184mm × 260mm

印　　张：27

插　　页：8

字　　数：722 千字

出版时间：2005 年 6 月第 1 版

印刷时间：2005 年 6 月第 1 次印刷

责任编辑：刘乃义 刘淑芳

封面设计：唐敏智

责任校对：齐 心

责任出版：秦 力

定　　价：120.00 元

莫大悦稔早　逆境频相保

功高桃李多　春风岂吹老

敬颂

張嗣瀛院士

八十华诞

宋健

二〇〇五年五月

序

欣逢张嗣瀛院士八十华诞，这本体现张先生学术造诣和研究成果、凝聚众多同事和弟子深深敬意的文集出版了。这是大家对敬爱的张先生寿辰的一份生日贺礼。我来为这本文集作序，深感荣幸。

张嗣瀛院士在中国控制界是人所敬仰的专家之一。张先生早年毕业于武汉大学机械系，1949 年 10 月受聘到东北大学任教，从事教学与科研工作。半个世纪的岁月，孜孜探索，辛勤耕耘，桃李不言，下自成蹊。他的卓越成就和贡献赢得了同行的钦佩并得到国家各级政府的表彰。

张嗣瀛院士的自动控制研究生涯是从莫斯科开始的。1957 年 9 月至 1959 年 7 月，他赴莫斯科大学数学力学系进修自动控制理论，从事运动稳定性及最优控制研究，给出了新型有限时间区间稳定性有关结果。回国以后，他将自己锁定在控制理论基础研究当中，开始了长达数十年的奋斗。将理论研究用于实际问题，张先生也作出了突出的贡献：在国产反坦克导弹的研制过程中，利用数学思想和解耦理论解决了控制系统的关键问题，大大提高了命中率，取得明显效果。在微分对策与主从对策

的研究中，他提出并论证了定性微分对策的极值性质，给出了定性极大值原理，使定量、定性两类问题都统一在极值原理的基础上，形成新体系，并给出一系列应用，同时提出了主从策略惩罚量等新概念及定量计算。此项研究成果获国家自然科学奖及国家教委科技进步奖励。近年来，他又转移到复杂控制系统的结构研究这一新的方向上来，提出了复杂控制系统对称性及相似结构研究的新课题，进而扩展到复杂系统和复杂性科学，并指导青年教师和博士生，在此方向上取得了一批有重要意义的成果。此项研究成果同样获得国家教委科技进步奖励。张嗣瀛院士的研究成果，体现在他的200余篇论文当中。这本文集就是从中精选出来的，反映了张先生各个时代的主要研究方向和研究成果。阅读这些文章，我们可以领会到张先生踏实的敬业精神、严谨的治学态度、朴素的学术思想和博深的学术造诣。“贤者任重而行恭”可以作为张先生治学的写照吧！

张先生为我国控制科学的发展作出了重要贡献，这不但体现在他学术研究成果上，还体现在他的教书育人工作中。他就像育种护花的泥土，将大量心血倾注在对年轻人的培养上。五十多年来，经张先生培育出的桃李英才遍布世界各地。如今有的已经挑起了我国某些科技领域的重任，有的成为科教战线的中坚，成为新一代的教授和博士生导师。张嗣瀛院士在他八十诞辰的时候，看到他的弟子们茁壮成长，一定会感到由衷的高兴。他的“孜孜弗倦，可登堂奥，涓涓不息，而成江河”之训词，成为学生们的座右铭。

我与张先生个人交往甚笃，他“处事如春风、律己以秋风”，他朴素的风格给我以极深刻的印象。他的朴素，有学风之朴素、作风之朴素、为人之朴素和精神之朴素。他常向自己的学生说，人是要有一点精神的。所谓精神，我想应该是一个人所具有的本性品质。要不为利所动，不为权所倾，不为名所累，不为位所争。我想，这也是他的追求，他的学生们也在向先生学习，传承实践之。

期望这本文集的出版，能对从事控制理论及相关领域的研究者、教师和学生有所启迪。

衷心祝愿张嗣瀛院士健康长寿，“明争驰驱”。我们相信张先生为教育和科学事业，为祖国、为后人，一定会继续奉献他的智慧和才能。

中国科学院院士　戴汝为

2005年5月

前　言

张嗣瀛院士是我国控制界里受到大家发自内心敬重的著名学者。张先生在新中国成立初期来东北大学任教，迄今已将近56个春秋。在长达半个多世纪的岁月里，他在教书育人的岗位上辛勤耕耘，在科学研究的领域里不懈探索，取得了令同事和学生尊重、同行钦佩的工作业绩与研究成果，曾多次获得包括全国“五一劳动奖章”、辽宁省“功勋教师”和国家自然科学奖等各种荣誉和奖励。

张嗣瀛院士数十年的不懈努力与奋斗，留下的是一条闪光的足迹：在基础理论研究和科学实践中，他独辟蹊径，潜心钻研，安于清贫，锲而不舍，终成控制领域一代宗师；在教书育人的岗位上，他呕心沥血，身体力行，为人师表，甘为人梯，堪称人民教师之楷模；在做人与做学问方面，他踏实敬业，学风严谨，朴实谦和，博大宽容，深得同事、弟子们发自内心的敬仰与尊重。我们深刻地认识到，在朝着建设“多科性、研究型、国际化”的东北大学和

“国内一流信息学院”的宏伟目标奋斗的进程中，张先生的这些精神与品格将成为教育、影响和激励我们的不竭动力，是一笔宝贵的精神财富！

欣逢张嗣瀛院士八十华诞，为了表达我们发自内心的深深敬意，更为了发扬光大张先生治学之精神、育人之品格和做人之情操，以鞭策和激励我们以张先生为做人做学问之楷模，共同创建学院之和谐氛围，经与张先生多次沟通和协商，终获同意，并在各方的不懈努力和支持下，使得这本反映张先生各个时代主要研究方向和研究成果的文集得以顺利出版发行。为此，我们感到由衷的高兴与欣慰！

这里，我们要衷心感谢宋健先生为祝贺张先生八十寿诞挥毫题字，感谢戴汝为院士为本文集欣然作序，感谢东北大学出版社有关同志的鼎力支持和辛勤工作，感谢井元伟教授等张先生的一班弟子的积极努力。没有他们的支持和帮助，我们长期以来的这一心愿就无法实现。

值此文集出版之际，我们谨代表学院全体教职工、学生衷心祝愿张嗣瀛院士幸福长寿，健康快乐。并预祝他为我国的教育和科技事业发展作出新的、更大的贡献！

东北大学信息科学与工程学院

2005年5月30日

目 录

第一部分 稳定性

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ ······ Чжан Сы-Ин (1)

К УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСКОПА ······ Чжан Сы-Ин (11)

ОБ ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, НАКОПЛЕНИИ ВОЗМУЩЕНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ ······ Чжан Сы-Ин (14)

К ТЕОРИИ КАЧЕСТВА НЕЛИНЕЙНЫХ РЕГУ ЛИРУЕМЫХ СИСТЕМ ······ Чжан Сы-Ин (25)

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕГУЛИРУЕМЫХ СИСТЕМ ······ Чжан Сы-Ин (30)

变系数系统的运动稳定性问题······ 张嗣瀛 (35)

回转仪的运动稳定性问题······ 张嗣瀛 (43)

有限时间区间上的运动稳定性问题······ 张嗣瀛 (47)

运动稳定性理论及其某些发展······ 张嗣瀛 (56)

第二部分 最优控制

轨线末端受限制时的最优控制问题······ 张嗣瀛 (65)

常系数线性系统的快速控制问题······ 张嗣瀛 (75)

轨线两端均受限制时的最优控制问题······ 张嗣瀛 (79)

相空间坐标受限时的最优控制问题······ 张嗣瀛 (89)

SOME APPLICATIONS OF QUALITATIVE MAXIMUM PRINCIPLE ······ Zhang Siying (101)

SOME APPLICATIONS OF THE QUALITATIVE MAXIMUM PRINCIPLE ······ Zhang Siying (108)

一种确定快速最优及能控性问题伴随方程边界条件的方法——集合覆盖法 … 张嗣瀛 (121)

第三部分 微分对策及主从对策

《微分对策》前言、目录…………………………………………………………………… 张嗣瀛 (128)
关于定量与定性微分对策 ……………………………………………………………… 张嗣瀛 (132)
微分对策 ……………………………………………………………………………… 张嗣瀛 (141)
空战格斗中的两个区域 ………………………………………………………………… 张嗣瀛 (153)
A NEW APPROACH OF SOLVING QUALITATIVE DIFFERENTIAL GAMES AND DETERMINING THE BOUNDARY OF CONTROLLABLE REGION
…………………………………………………………………………… Zhang Siying (162)
AN APPROACH TO SOLVE THE ROLE AMBIGUITY PROBLEM IN AERIAL COMBAT
……………………………………… Zhang Siying, Wu Hansheng, Wang Jingcai (173)
微分对策中的有限时间局部捕捉区 ………………………………… 张嗣瀛 吴汉生 (183)
微分对策理论在地对空导弹制导规律中的应用 …………… 张嗣瀛 刘长有 汤善同 (189)
A KIND OF NONLINEAR INCENTIVE STACKELBERG STRATEGY AND THE "QUANTITY OF THREAT" …………………………………………………… Zhang Siying (206)
A NONLINEAR INCENTIVE STRATEGY FOR MULTI-STAGE STACKELBERG GAMES WITH PARTIAL INFORMATION …………………………… Zhang Siying (219)
A NONLINEAR INCENTIVE STACKELBERG STRATEGY FOR MULTI-STAGE DYNAMIC GAMES ………………………………………………………………… Zhang Siying (231)
STACKELBERG SOLUTIONS FOR SINGULAR DYNAMIC INPUT-OUTPUT MODELS
……………………………………… Liu Xiaoping, Wang Jingcai, Zhang Siying (240)
STACKELBERG STRATEGY TO OPTIMAL MATERIAL INVENTORY MANAGEMENT PROBLEMS IN MANUFACTURING SYSTEMS
……………………………………………………… Jing Yuanwei, Zhang Siying (249)

第四部分 复杂系统，复杂性科学，具有对称相似结构的复杂控制系统

复杂控制系统的对称性及相似性结构研究 …………………………………… 张嗣瀛 (256)
一类复杂控制系统的全息控制 ……………………………………… 张嗣瀛 杨光红 (263)
非线性复杂控制系统相似性结构研究的若干结果 ………………… 张嗣瀛 陈 兵 (268)
复杂系统与复杂性科学简介 …………………………………………………… 张嗣瀛 (276)
THE SIMILAR STRUCTURES AND CONTROL PROBLEMS OF COMPLEX SYSTEMS
…………………………………………………………………………… Zhang Siying (281)
控制论、系统工程、复杂系统与复杂性科学 ……………………………… 张嗣瀛 (287)

微分几何方法与非线性控制系统（1）…………………………张嗣瀛　王景才　刘晓平（294）
微分几何方法与非线性控制系统（2）…………………………张嗣瀛　王景才　刘晓平（301）
微分几何方法与非线性控制系统（3）…………………………张嗣瀛　王景才　刘晓平（308）
微分几何方法与非线性控制系统（4）…………………………张嗣瀛　王景才　刘晓平（314）
微分几何方法与非线性控制系统（5）…………………………张嗣瀛　王景才　刘晓平（320）
非线性控制系统的广义对称性与可控性 ………………………………赵　军　张嗣瀛（327）
LARGE-SCALE SYSTEMS CONTAINING MULTIPARTITE SYMMETRICALLY COMPOSITE SUBSYSTEMS: ANALYSIS AND SYNTHESIS OF DECENTRALIZED CONTROLLERS ………………………………………… Yang Guanghong, Zhang Siying（331）
可解的具有广义对称性的非线性系统的同构分解与可控性
………………………………………………………井元伟　胡三清　刘晓平　张嗣瀛（340）
对称非线性控制系统的串级解耦标准形 ………………………赵　军　井元伟　张嗣瀛（345）
一类不确定非线性相似组合系统的结构全息鲁棒控制 ……严星刚　高立群　张嗣瀛（350）
循环组合系统的结构性质 ……………………………………………………黄守东　张嗣瀛（356）
不确定线性组合大系统的二次稳定性、联结稳定性与 H_∞ 小增益定理
……………………………………………………………………王向东　高立群　张嗣瀛（360）
ROBUST OUTPUT TRACKING CONTROL FOR NONLINEAR INTERCONNECTED SYSTEMS WITH SIMILAR STRUCTURE
……………………………………………… Chen Bing, Jing Yuanwei, Zhang Siying（365）
ROBUST CONTROL FOR NONLINEAR SIMILAR COMPOSITE SYSTEMS WITH UNCERTAIN PARAMETERS ……………………………… Y. H. Wang, S. Y. Zhang（377）
具有不确定未知界的相似组合系统的鲁棒分散输出控制 … 刘粉林　王银河　张嗣瀛（390）

第五部分　其　他

一个控制系统的解耦问题 ………………………………………………………………张嗣瀛（397）
脉冲调宽控制系统周期平均控制力的矢量表示法 ……………………………………张嗣瀛（403）
一个洗精煤的使用和库存管理问题 ……………………………张嗣瀛　井元伟　范士保（407）

附　录

张嗣瀛院士发表的部分论文目录…………………………………………………………（412）

第一部分　稳定性

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ

Чжан Сы-Ин

(Москва—Шэньян)

1 Постановка задачи

В практике встречается случай, когда требуется знать свойства рассматриваемых материальных систем на устойуивость не для всего интервала времени $t \geqslant t_0$ (устойчивость в смысле Ляпунова), но для какого-то конечного интервала времени $t_0 \leqslant t \leqslant T$.

Невозмущенное движение будем называть устойчивым относительно заданных ε и C на конечном интервале времени $t_0 \leqslant t \leqslant T$, если при $t = t_0$ выполняется

$$\sum_s x_{s0}^2 \leqslant \varepsilon \tag{1.1}$$

а при всех t на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$ будет выполняться

$$\sum_s x_s^2 \leqslant C \tag{1.2}$$

Здесь T, ε, C——заданные величины.

Найдем в некоторых случах условия устойчивости (в указанном выше смысле) невозмущенного движения системы.

2 Линейные системы с переменными коэффициентами

В этом случае уравнения возмущенного движения системы имеют вид:

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}(t)x_1 + \cdots + p_{sn}(t)x_n \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{2.1}$$

где $p_{sr}(t)$——вещественные ограниченные непрерывные функции времени t, могущие зависеть от некоторых параметров.

Чтобы разрешить наму задачу, рассмотрим функцию

$$2V = e^{-\alpha t}(x_1^2 + \cdots + x_n^2) \tag{2.2}$$

где α——положительное число, пока ещё не определённое. Эта функция впервые была использована Ляпуновым в его доказательстве теоремы о конечности характеристичных чисел.

В силу (2.1) имеем

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_s \frac{\partial V}{\partial x_s}\frac{dx}{dt} = -\frac{\alpha}{2}e^{-\alpha t}(x_1^2 + \cdots + x_n^2) + e^{-\alpha t}\sum_s x_s \frac{dx_s}{dt} = e^{-\alpha t}W \tag{2.3}$$

Здесь

$$W = \sum_{s,r}\left(\frac{p_{sr} + p_{rs}}{2} - \delta_{sr}\frac{\alpha}{2}\right)x_s x_r, \quad \delta_{sr} = \begin{cases}1 & \text{при} \quad s = r\\ 0 & \text{при} \quad s \neq r\end{cases}$$

Выберем α и параметры в коэффициентах p_{sr} так, чтобы квадратичная форма W была отрицательно-определённой. Согласно теорем Сильвестра для этого необходимо и достаточно иметь неравенства

$$D_r = \begin{vmatrix} -p_{11} + \frac{\alpha}{2} & -\frac{p_{12} + p_{21}}{2} & \cdots & -\frac{p_{1r} + p_{r1}}{2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{p_{r1} + p_{1r}}{2} & -\frac{p_{r2} + p_{2r}}{2} & \cdots & -p_{rr} + \frac{\alpha}{2} \end{vmatrix} > 0 \quad (r = 1, \cdots, n) \tag{2.4}$$

При этих условиях—W будет положительно-определённой квадратичной формой, поэтому всегда можно найти такую положительную величину μ, чтобы имело место

$$-W = -\sum_{s,r}\left(\frac{p_{sr} + p_{rs}}{2} - \delta_{sr}\frac{\alpha}{2}\right)x_s x_r > \frac{\mu}{2}(x_1^2 + \cdots + x_n^2) \tag{2.5}$$

Подставив неравенство (2.5) в (2.3), в силу (2.2) получим

$$\frac{dV}{dt} < -\mu\frac{1}{2}e^{-\alpha t}(x_1^2 + \cdots + x_n^2) = -\mu V \tag{2.6}$$

Предположим, что при $t = t_0$ точка $(x_{10}, \cdots, x_{n0})$ находится на сфере (ε), т. е. $x_{10}^2 + \cdots + x_{n0}^2 = \varepsilon$, и в некоторый момент времени t точка достигает сферы (C), т. е. $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = C$.

Найдем этот момент. Допустим, что $t_0 = 0$. Проинтегрировав в этом предположении неравенство (2.6), получим

$$V < V_0 e^{-\mu t}$$

Но согласно (2.2)

$$V_0 = \frac{1}{2}\varepsilon, \qquad V = \frac{1}{2}e^{-\alpha t}C.$$

Поэтому

$$\frac{C}{\varepsilon} < e^{(\alpha-\mu)t} \quad \text{или} \quad t > \frac{1}{\alpha - \mu}\ln\frac{C}{\varepsilon} \tag{2.7}$$

Отсюда видно, что при обратном знаке последнего неравенства точка $(x_1, \cdots, x_n)$ не может достичь сферы (C). Поэтому, если

$$T = \frac{1}{\alpha - \mu} \ln \frac{C}{\varepsilon} \tag{2.8}$$

то при всех $t \leqslant T$ ни одна из траекторий не выходит за сферу (C), Из (2.7), кроме того, видно, что чем меньше сфера (ε), тем больше момент t. Поэтому при выполнении условия (2.8) неравенства (1.1) и (1.2) будут также выполняться.

В (2.8) содержатся α и μ, которые следует выбрать так, чтобы выполнялось (2.5). Напишем (2.5) в виде

$$W_1 = \sum_{s,r} \left[-\frac{p_{sr} + p_{rs}}{2} + \delta_{sr} \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\mu}{2} \right) \right] x_s x_r > 0 \tag{2.9}$$

Значит, W_1 является положительной квадратичной формой.

Пусть

$$\lambda = \alpha - \mu \tag{2.10}$$

Достаточные н необходимые условия, для того чтобы квадратичная форма (2.9) была положительной, имеют вид:

$$D_r = \begin{vmatrix} -p_{11} + \frac{\lambda}{2} & -\frac{p_{12} + p_{21}}{2} & \cdots & -\frac{p_{1r} + p_{r1}}{2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{p_{r1} + p_{1r}}{2} & -\frac{p_{r2} + p_{2r}}{2} & \cdots & -p_{rr} + \frac{\lambda}{2} \end{vmatrix} > 0 \quad (r = 1, \cdots, n) \tag{2.11}$$

Из предыдущих рассуждений вытекает следующее заключение для системы (2.1).

Теорема 1. Для того чтобы невозмущенное движение было устойчивым относительно заданных ε и C на конечном интервале времени $t_0 \leqslant t \leqslant T$, достаточно, чтобы удовлетворялись условия (2.11).

3 Один частный случай линейной системы и линейная система с постоянными коэффициентами

Рассмотрим частный случай, когда для системы (2.1) на интервале времени $t_0 \leqslant t \leqslant T$ имеют место равенства

$$p_{sr}(t) = c_{sr} + \delta f_{sr}(t) \tag{3.1}$$

где c_{sr}— постоянные, δ — достаточно малое число, $f_{sr}(t)$— ограниченные функции. В этом случае система (2.1) имеет вид:

$$\frac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}_t} = c_{s1}x_1 + \cdots + c_{sn}x_n + \delta f_{s1}x_1 + \cdots + \delta f_{sn}x_n \quad (s = 1, \cdots, n)$$

Полная производная функции V (2.2) в силу этой системы имеет вид:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{-\alpha t} \left[\sum_{s,r} \left(\frac{c_{sr} + c_{rs}}{2} - \delta_{sr} \frac{\alpha}{2} \right) x_s x_r + \sum_{s,r} \delta \frac{f_{sr} + f_{rs}}{2} x_s x_r \right]$$

Коэффициенты второй квадратичной формы в скобках правой части этого равенства достаточно малы, поэтому знак функции в скобках вполне определён знаком первой квадратичной формы.

Проводя вычисление аналогично тому, как в предыдущем параграфе, получим условия устойчивости вида (2.11), в которых все p_{sr} (t) подставлены постоянными c_{sr}.

Теперь рассмотрим линейную систему с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}t} = c_{s1}x_1 + \cdots + c_{sn}x_n \quad (s = 1,\cdots,n) \tag{3.2}$$

Полная производная функция V (2.2) в силу (3.2) имеет вид:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = W\mathrm{e}^{-\alpha t}, W = \sum_{s,r}\left(\frac{c_{sr}+c_{rs}}{2} - \delta_{sr}\frac{\alpha}{2}\right)x_s x_r$$

Чтобы сделать $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t<0$, нужно выполнить условия

$$D_r = \begin{vmatrix} -c_{11}+\frac{\alpha}{2} & -\frac{c_{12}+c_{21}}{2} & \cdots & -\frac{c_{1r}+c_{r1}}{2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{c_{r1}+c_{1r}}{2} & -\frac{c_{r2}+c_{2r}}{2} & \cdots & -c_{rr}+\frac{\alpha}{2} \end{vmatrix} > 0 \quad (r = 1,\cdots,n) \tag{3.3}$$

При этих условиях—W будет положительно-определённой симметрической квадратичной формой. Её экстремум на сфере $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = A$ определяется выражением

$$-W = -\sum_{s,r}\left(\frac{c_{sr}+c_{rs}}{2} - \delta_{sr}\frac{\alpha}{2}\right)x_s x_r = \frac{x}{2}\sum_s x_s^2 \tag{3.4}$$

где $\frac{1}{2}x$—корни векового уравнения

$$X(x) = \left|-\frac{c_{sr}+c_{rs}}{2} + \delta_{sr}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{x}{2}\right)\right| = 0 \tag{3.5}$$

По теореме Сильвестра все эти корни будут вещественными, и они будут положительными, так как квадратичная форма положительно-определённая.

Согласно (3.4), имеем

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -x\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\alpha t}(x_1^2 + \cdots + x_n^2) = -xV$$

Сделав вычисление, аналогичное сделанному в предыдущем параграфе, получим для момента t прихода точки на сферу (C) равенство

$$t = \frac{1}{\alpha - x}\ln\frac{C}{\varepsilon}$$

Пусть $\alpha - x = \lambda$. Видно, что λ будут корнями уравнения

$$\Delta(\lambda) = \left|-\frac{c_{sr}+c_{rs}}{2} + \delta_{sr}\frac{\lambda}{2}\right| = 0 \tag{3.6}$$

Все корни этого векового уравнения тоже будут вещественными.

Рассмотрим только положительные корни уравнения (3.6). Пусть это будут корни λ_1, $\cdots$, λ_k и пусть $0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_k$.

Тогда на основании равенства $t = \lambda^{-1}\ln(C/\varepsilon)$ наибольшее возможное время перехода точки от сферы (ε) до (C) равно $\lambda_1^{-1}\ln(C/\varepsilon)$, наименьшее возможное время для этого перехода равно $\lambda_k^{-1}\ln(C/\varepsilon)$. Если принять

$$T \leqslant \frac{1}{\lambda_k}\ln\frac{C}{\varepsilon} \tag{3.7}$$

то будут выполняться условия (1.1) и (1.2). Поэтому имеем следующую теорему.

Теорема 2. Для того чтобы невозмущенное движение системы (3.2) было устойчивым относительно заданных ε и C на конечном интервале времени $t_0 \leqslant t \leqslant T$, достаточно, чтобы удовлетворялись условия (3.7).

4 Нелинейная система

Рассмотрим более общий случай. Пусть

$$\frac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}t} = p_{s1}(t)x_1 + \cdots + p_{sn}(t)x_n + X_s \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{4.1}$$

где $X_s = X_s(t, x_1, \cdots, x_n)$ — голоморфные функции переменных $x_1, \cdots, x_n$, начинающиеся в своих разложениях с членов не ниже второго порядка. Коэффициенты этих функций представляют собой вещественные непрерывные ограниченные функции t.

4.1 ε и C достаточно малы. Полная производная функция (2.2) в силу (4.1) имеет вид:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{-\alpha t}\left[W + \sum_s x_s X_s\right] \quad \left(W = \sum_{s,r}\left(\frac{p_{sr} + p_{rs}}{2} - \delta_{sr}\frac{\alpha}{2}\right)x_s x_r\right) \tag{4.2}$$

В этом случае знак $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$ вполне определяется знаком формы W, поэтому неравенство $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t < 0$ будет выполняться при условиях (2.4).

При выполнении (2.4) имеем

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} < -\mu\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\alpha t}(x_1^2 + \cdots + x_n^2)$$

Как и в 2, получаем

$$t > \frac{1}{\alpha - \mu}\ln\frac{C}{\varepsilon}$$

Пусть

$$T = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{C}{\varepsilon} \quad (\lambda = \alpha - \mu)$$

Тогда (1.1) и (1.2) будут выполняться. Или поступим так, пусть

$$\sum_{s,r}\left(\frac{p_{sr} + p_{rs}}{2} - \delta_{sr}\frac{\alpha}{2}\right)x_s x_r + \sum_s x_s X_s < -\frac{\mu}{2}(x_1^2 + \cdots + x_n^2) \tag{4.3}$$

Вводя[3] обозначение $S = \sum_s x_s X_s$, будем иметь

$$|S| \leqslant R(t)(x_1^2 + \cdots + x_n^2)$$

где $R(t)$ —положительная функцня и является верхним точным пределом функции

$$\frac{1}{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\left|\sum_s x_s X_s\right| \text{ при } t_0 \leqslant t \leqslant T$$

Пусть

$$\sum_{s,r}\left(\frac{p_{sr} + p_{rs}}{2} - \delta_{sr}\frac{\alpha}{2}\right)x_s x_r + R(t)(x_1^2 + \cdots + x_n^2) < -\frac{\mu}{2}(x_1^2 + \cdots + x_n^2) \tag{4.4}$$

Очевидно, при выполнении этого условия имеет место условие (4.3). Напишем (4.4) в другом виде:

$$W_1 = \sum_{s,r}\left[-\frac{p_{sr}+p_{rs}}{2} + \delta_{sr}\left(\frac{\lambda}{2} - R(t)\right)\right]x_s x_r > 0$$

Чтобы W_1 была положительной формой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$D_r = \begin{vmatrix} -p_{11}+\frac{\lambda}{2}-R(t) & -\frac{p_{12}+p_{21}}{2} & \cdots & -\frac{p_{1r}+p_{r1}}{2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{p_{r1}+p_{1r}}{2} & -\frac{p_{r2}+p_{2r}}{2} & \cdots & -p_{rr}+\frac{\lambda}{2}-R(t) \end{vmatrix} > 0 \quad (r = 1,\cdots,n) \tag{4.5}$$

Поэтому имеем следующую теорему для (4.1).

Теорема 3. Для того чтобы невозмущенное движение системы (4.1) было устойчиво относительно заданных ε и C на конечном интервале времени $t_0 \leqslant t \leqslant T$, достаточно, чтобы удовлетворялись условия (4.5).

Условия (4.5) содержат $R(t)$. Можно получить другие достаточны но более простые условия, в которых не содержится $R(t)$.

В самом деле, из неравенства (4.3) видно, что в случае 1 знак функции в левой части этого неравенства вполне определяется квадратичной формой. Поэтому, чтобы имело место (4.3), достаточно, чтобы выполнялись неравенства (2.11).

4.2 Случай, когда ε, C—конечные величины. В этом случае

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{-\alpha t}\left[W + \sum_s x_s X_s\right] \quad \left(W = \sum_{s,r}\left(\frac{p_{sr}+p_{rs}}{2} - \delta_{sr}\frac{\alpha}{2}\right)x_s x_r\right) \tag{4.6}$$

но ε, C—конечные величины, поэтому знак $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$ больше не может определяться знаком квадратичной формы W. Пусть

$$S = \sum_s x_s X_s$$

Сделав вычисление, аналогичное сделанному в случае 1, получим условия, имеющие вид (4.5), и теорему, аналогичную теореме 3.

Следует отметить, что в этом случае надо проверить ε и C условиями (4.5), которые содержат $R(t)$ и допускают только определённую область изменений для переменных x_s.

Кроме того, в этом случае в силу конечности ε и C условия (2.11) места не имеют.

4.3 Случай, когда $p_{sr}(t) = c_{sr} + \delta f_{sr}(t)$, т. е. (3.1). В этом случае согласно (4.1) имеем

$$\frac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}t} = c_{s1}x_1 + \cdots + c_{sn}x_n + \delta(f_{s1}x_1 + \cdots + f_{sn}x_n) + X_s \quad (s = 1,\cdots,n) \tag{4.7}$$

Полная производная функции V (2.2) в силу (4.7) имеет вид:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{-\alpha t}\left[\sum_{s,r}\left(\frac{c_{sr}+c_{rs}}{2} - \delta_{sr}\frac{\alpha}{2}\right)x_s x_r + \sum_{s,r} x_s X_s + \sum_{s,r}\delta\frac{f_{sr}+f_{rs}}{2}x_s x_r\right] \tag{4.8}$$

В случае, когда ε, C достаточно малы, знак функции в скобках правой части уравнения (4.8) вполне определён знаком первой квадратичной формы. В этом случае получим условия устойчивости вида (2.11), в которых все $p_{sr}(t)$ подставлены постоянными