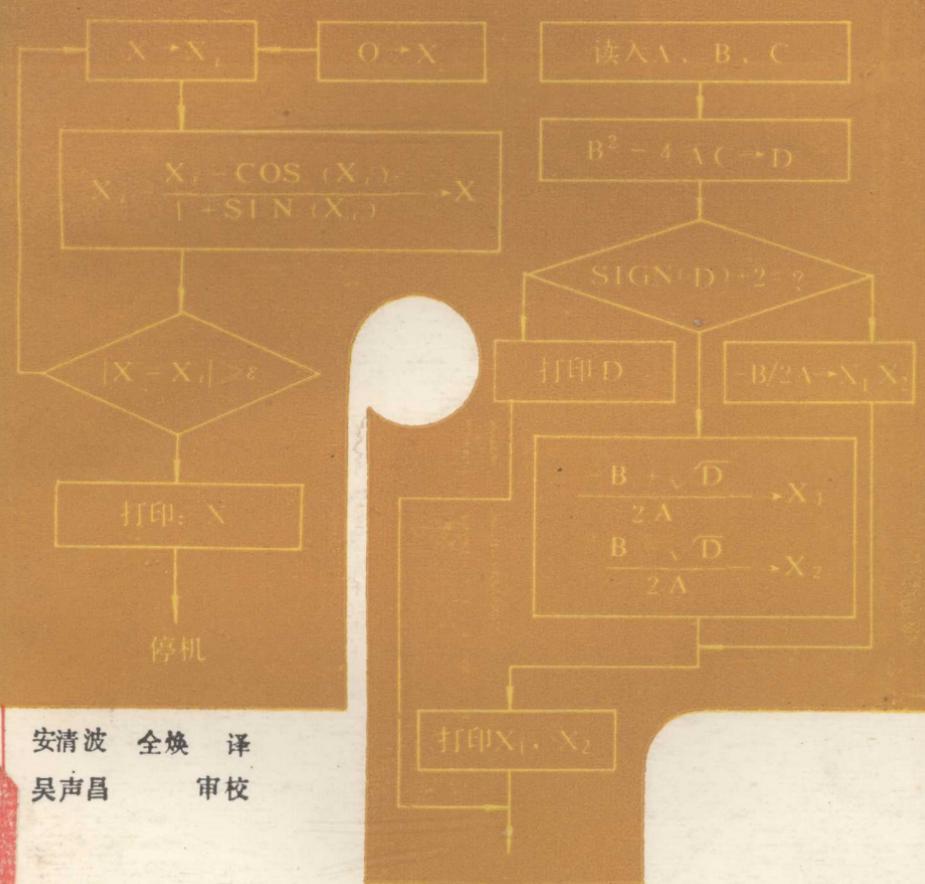


1940

程序正确性的证明

CHENGXUZHENGQUEXINGDEZHENGMING

[美] ROBERT
B·ANDERSON 著



安清波 全焕 译
吴声昌 审校

河南科学技术出版社

程序正确性的证明

〔美〕ROBERT B. ANDERSON 著

美国《程序正确性的证明》，是一本关于程序正确性的专业书。安清波 全 奕 译。吴声昌 审校。计算机的普及应用使得越来越多的人接触程序编制工作。然而，什么样的程序才算正确的呢？这确实是所有程序员共同关心的一个重大问题。这本书通俗简明地介绍了一套易学实用的验证程序是否正确的方法。每个程序员花费不长一段时间就可以学会这种方法。掌握这种方法不仅可以证明自己的或别人的程序是否正确，更重要的是程序员在这种思想方法的影响下，编程工作中可以不犯或少犯错误。很多人的实践证实了这一点。最后，对所有计算机工作者尤其是程序员来说，掌握这一方法是具有重要意义的。

本书的序言及第一、二、四章由安清波同志翻译，第三、五章由全奕同志翻译，整个译本由中国科学院应用数学研究所研究员吴声昌老师审稿。在译本的整理过程中，孙建英老师、张发成同志曾给我们很大帮助。张清海同志承担了全部绘画工作。我们在此表示衷心的感谢。

河南科学技术出版社

程序正确性的证明

〔美〕ROBERT B.ANDERSON著

安清波 全 焕 译

吴声昌 审校

责任编辑 范云操

河南科学技术出版社出版

河南确山县印刷厂印刷

河南省新华书店发行

850×1163毫米 32开本 5.375印张 124千字

1987年8月第1版 1987年8月第1次印刷

印数1—5,000册

统一书号15245·83 定价1.35元

译 者 的 话

美国豪斯顿大学 ROBERT B. ANDERSON著的《程序正确性的证明》，是一本专门介绍如何验证程序正确性的专业书。计算机的普及应用使得越来越多的人从事或接触程序编制工作。然而，什么样的程序才算正确的呢？这确实是所有程序员共同关心的一个重大问题。这本书通俗简明地介绍了一套易学实用的验证程序是否正确的方法。每个程序员花费不长一段时间就可以学会这种方法。掌握这种方法不仅可以证明自己的或别人的程序是否正确，更重要的是程序员在这种思想方法的影响下，编程工作中可以不犯或少犯错误。很多人的实践证实了这一点。显然，对所有计算机工作者尤其是程序员来说，掌握这一方法是很有意义的。

本书的序言及第一、二、四章由安清波同志翻译，第三、五章由全焕同志翻译，整个译本请中国科学院应用数学研究所研究员吴声昌老师审稿。在译本出版过程中，孙建英老师、张发成同志曾给我们很大帮助。张清海同志承担了全部绘图工作。我们在此表示衷心的感谢。

第二章主要讨论了归纳断言法，它是适用于迭代程序正确性证明的最通用的方法；这一章包含着最基础的材料。第三章进一步阐述适用于 FORTRAN 和 PL/I 程序的归纳断言法，利用归纳断言法简要地介绍了证明的控制思想及其等价形式。第四章论述了结构归纳法，它是证明递归程序正确性的最通用的方法，这种方法在证明递归程序的正确性方面是非常有

是第五章。该章将讨论如何从基本的数学原理推导出正确的程序。该章还涵盖了：形式语言学、自动机理论、图灵机、可计算性理论以及非确定性自动机等主题。

序言

本书旨在解释和阐明一些证明计算机程序正确性的基本方法。近几年来，这个课题已经有了大量的研究成果。这方面研究的最终目的是使这样的证明格式化和机械化。然而，我们的重点在于研究有点非正式的正确性证明，使用这种方法，程序员可以确信他们的程序的正确性。当然，我们十分清楚，非正式的正确性证明容易包含错误，而且没有防止和发现程序错误的灵丹妙药。然而，我们坚信这种非正式的正确性证明将给程序员提供一个系统而又基本的检查程序的方法。同时，我们认为这种应用于程序正确性证明中的基本方法，将能够增加我们对于最基本的程序结构、循环以及递归的洞察力。由于这些原因，我们认为所有的程序员都应该掌握好这种证明程序正确性的基本方法。

读懂本书的唯一要求是具有应用高级程序设计语言编制程序的经验和一些数学证明的知识，而几乎无须专门的数学知识。第一章详尽地介绍了数学归纳法，它是奠定正确性证明基础的一个主要的数学方法。第二章主要讨论了归纳断言法，它是适用于迭代程序正确性证明的最通用的方法；这一章包含着最基础的材料。第三章进一步阐述适用于 FORTRAN 和 PL/1 程序的归纳断言法，利用归纳断言法简要地介绍了证明的控制思想及其等价形式。第四章论述了结构归纳法，它是证明递归程序正确性的最通用的方法，这种方法在证明迭代程序的正确性方面是非常有

用的。所谓迭代程序，基本上是用于完成递归过程的。第五章是一个非常简短的与当前程序正确性证明有关的研究介绍。最后还为有志于这个专题研究的读者提供了一个范围相当广泛的文献目录（此部分略去未译——译者注）。

这本书可以作为大学生和一年级研究生的关于计算理论课程的辅助教材，还可以用作程序设计第二课程的辅助教材，以强调这种程序设计的风格和程序的正确性。显而易见，它还适用于具有一定数学证明知识和编程序经验的人们自学。
ROBERT B. ANDERSON

书名：《计算理论基础》
作者：罗伯特·B·安德森
出版社：人民邮电出版社
出版时间：1983年1月
页数：350页
定价：1.50元
本书是关于计算理论的一本入门教材，主要介绍了计算理论的基本概念、模型和方法。全书共分九章，第一章介绍了计算理论的基本概念，包括算法、计算模型、可计算性等；第二章介绍了图灵机模型，包括图灵机的定义、图灵机的等价性和图灵机的完备性；第三章介绍了判定问题，包括判定问题的定义、判定问题的解法、判定问题的可解性和判定问题的不可解性；第四章介绍了递归函数，包括递归函数的定义、递归函数的性质、递归函数的构造方法；第五章介绍了递归过程，包括递归过程的定义、递归过程的性质、递归过程的构造方法；第六章介绍了图灵机的等价性和图灵机的完备性；第七章介绍了判定问题的解法；第八章介绍了递归函数的性质；第九章介绍了递归过程的性质。本书适合于计算机科学专业的学生和教师使用，同时也可供相关领域的研究人员参考。

(113)	言語證據的真偽判斷方法一	3.3
(125)	歸納法論述	3.3
(133)	標準邏輯證明技術	4.1
(146)	去重項證明與非遞歸數	4.1
(152)	本質突顯證明與五率歸一章正義	
(152)	言語	2.1
第一章 數學歸納法	1.1	
1.1 引言	(1)	
1.2 簡單歸納法	(1)	
1.3 一個加強型的數學歸納法	(10)	
1.4 廣義歸納法	(14)	
第二章 程序流程圖正確性的證明	(20)	
2.1 引言	(20)	
2.2 證明程序流程圖正確的基本原理	(21)	
2.3 流程圖正確性證明的附例	(39)	
2.4 彙納斷言法	(51)	
2.5 縮寫的正確性證明	(74)	
2.6 彙納斷言法證明的格式化	(75)	
第三章 標準程序語言程序正確性的證明	(84)	
3.1 引言	(84)	
3.2 FORTRAN 程序正確性證明舉例	(84)	
3.3 PL/1 程序正確性證明舉例	(94)	
3.4 部分正確性的公理化論述	(99)	
3.5 程序正確性證明是程序編制過程的一部份	(107)	
第四章 递归程序的正确性证明	(112)	
4.1 引言	(112)	

4.2	一个简化的阐述递归的编程语言	(113)
4.3	结构归纳法	(122)
4.4	结构归纳法难题举例	(133)
4.5	非递归程序的结构归纳法	(146)
第五章	程序正确性证明的研究现状	(157)
5.1	引言	(157)
5.2	证明方法	(157)
5.3	程序设计——语言设计	(159)
5.4	正确性证明的机械化	(160)
(01)	序	§ 1.1
(01)	第一章	§ 1.1
(05)	第二章	§ 1.2
(05)	第三章	§ 1.2
(12)	第四章	§ 1.2
(03)	第五章	§ 1.2
(11)	第六章	§ 1.2
(11)	第七章	§ 1.2
(07)	第八章	§ 1.2
(07)	第九章	§ 1.2
(07)	第十章	§ 1.2
(03)	第十一章	§ 1.2
(08)	第十二章	§ 1.2
(08)	第十三章	§ 1.2
(06)	第十四章	§ 1.2
(06)	第十五章	§ 1.2
(06)	第十六章	§ 1.2
(06)	第十七章	§ 1.2
(06)	第十八章	§ 1.2
(06)	第十九章	§ 1.2
(06)	第二十章	§ 1.2
(06)	第二十一章	§ 1.2
(06)	第二十二章	§ 1.2
(06)	第二十三章	§ 1.2
(06)	第二十四章	§ 1.2

第一章 数学归纳法

1.1 引言

数学归纳法是数学证明的一般方法。虽然这种方法并不总是给出代数表达式，但它却是计算机程序正确性证明的基本方法。在这一章里，我们准备使读者充分地熟悉这个基本的证明方法。

数学归纳法通常被认为是一种关于正整数的证明方法，在下一节中，我们将对这一方法的最基本形式进行描述。在1.3节中，我们将给出这一方法的较强的形式。1.4节，我们将给出适用于一些良序集的、而不仅仅是正整数的方法的一般形式。在本章里，仅仅1.2节对于本书大部分章节来说是必要的内容。所以，读者可以跳过1.3节和1.4节而仅当以后需要时再回头读这两部分。

1.4节比1.2节和1.3节更加抽象，对于缺乏数学系统训练的读者，可以略去这一部分。

1.2 简单归纳法

简单归纳法原理

假定 $S(n)$ 是关于正整数 n 的某个命题，我们希望证明 $S(n)$ 对于一切正整数 n 为真。简单归纳法可表达为：为了证明这个问题，我们只需要证明

(i) $S(1)$ 为真。

(ii) 对于一切正整数 n ，如果 $S(n)$ 为真，则 $S(n+1)$ 也真。

事实上，这两个语句已经表明 $S(n)$ 对于一切正整数 n 为真。这是很直观的（虽然在正整数的公理化处理中，这个原理的某些形式必须假定为公理），如果我们证明了 (i) 和 (ii) 都正确，由 (i) 我们知道 $S(1)$ 为真，由 (ii) 我们知道当 $S(1)$ 为真时 $S(2)$ 也为真。因 $S(1)$ 为真，所以 $S(2)$ 也必然为真。由 (ii) 我们又可以知道如果 $S(2)$ 为真，则 $S(3)$ 也为真。于是我们从 $S(2)$ 为真可以推出 $S(3)$ 也为真，…等等。于是直观地据 (i) 和 (ii) 可知， $S(1)$, $S(2)$, $S(3)$, …, $S(n)$ 都为真。

现在，我们给出一些应用简单归纳法的例子。

例 1.2.1 我们来证明对于一切正整数 n ，从 1 起的前 n 个正整数的和是 $n \cdot (n+1)/2$ 。换句话说，对于一切正整数 n ，有 $1+2+3+\cdots+n = n \cdot (n+1)/2$ 。如果使用简单归纳法证之，则只要证明：

(i) 从 1 起的 1 个正整数的和是 $1 \cdot (1+1)/2$ ，即 $1=1 \cdot (1+1)/2$ 。
(ii) 如果从 1 起的前 n 个正整数的和是 $n \cdot (n+1)/2$ ，那么，从 1 起的前 $n+1$ 个正整数的和是 $(n+1) \cdot [(n+1)+1]/2$ 。于是，我们假定 $1+2+3+\cdots+n=n(n+1)/2$ 为真，这就是所谓的归纳假设。下面我们必须由此设法证明 $1+2+3+\cdots+n+(n+1)=(n+1) \cdot [(n+1)+1]/2$ 也为真。

注意到：

$$\begin{aligned} 1+2+\cdots+n+(n+1) &= (1+2+\cdots+n)+(n+1) \\ &= [n \cdot (n+1)/2]+(n+1) \\ &= [(n^2+n)/2]+(n+1) \end{aligned}$$

$$= [(n^2 + n)/2] + [(2n + 2)/2]$$

$$= (n^2 + 3n + 2)/2$$

$$= (n+1) \cdot (n+2)/2$$

$$= (n+1) \cdot [(n+1)+1]/2$$

由此，我们得到了(ii)的证明。由于(i)和(ii)都已被证明，由简单归纳法可知，对于一切正整数n，有：

$$1 + 2 + \cdots + n = n \cdot (n+1)/2$$

改进的简单归纳法

有时我们希望证明命题 $S(n)$ 对于一切整数 $n \geq n_0$ 时为真。

简单归纳法可以稍微作如下的改进。为了证明 $S(n)$ 对于一切整数 $n \geq n_0$ 时为真，我们只需证明

(i) $S(n_0)$ 为真。

(ii) 对于一切整数 $n \geq n_0$ ，如果 $S(n)$ 为真，则 $S(n+1)$ 也为真。

特别地，如果我们要证明某个命题 $S(n)$ 对于一切非负整数（即 $n \geq 0$ ）为真，我们只需证明

(i) $S(0)$ 为真。

(ii) 对于一切整数 $n \geq 0$ ，如果 $S(n)$ 为真，那么 $S(n+1)$ 也为真。

例 1.2.2

对于一切非负整数n，我们来证明

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1 \quad (i)$$

为了用简单归纳法证明这个等式，我们证明

(i) $2^0 = 2^{0+1} - 1$ 。这是很显然的，因为

$$2^0 = 1 = 2^{0+1} - 1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$$

(ii) 对于一切非负整数n，如果

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

为真，那么

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{(n+1)+1} - 1$$

也为真。

$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ 称为归纳假设。

为了证明 (ii)，我们注意到

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n + 2^{n+1} = 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n + (2^{n+1} - 1) + 1$$

$$= (2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n) + 2^{n+1}$$

$$\stackrel{\text{由归纳假设}}{=} (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1} - 1$$

$$= (2^{n+1} + 2^{n+1}) - 1$$

$$= 2 \cdot 2^{n+1} - 1$$

$$= 2^{n+2} - 1$$

$$= 2^{(n+1)+1} - 1$$

$$\stackrel{\text{由归纳假设}}{=} 2^{(n+1)+1} - 1$$

有时我们希望证明命题 $S(n)$ 对于一切整数 $n_0 \leq n \leq m_0$ 为真。

由于 n_0 到 m_0 之间的整数是有限的，我们仅用检验所有不同情况的方法就可以来证明 $S(n)$ 对于这一切不同的情况为真。然而，用简单归纳法来证明 $S(n)$ 仍然常常是一种比较容易的、有时也是必要的方法（例如，当我们不知道 n_0 或 m_0 的特定值时）。在这种情况下，两种形式的简单归纳法都可以用来证明 $S(n)$ 对于一切 $n_0 \leq n \leq m_0$ 均为真。

向上的简单归纳法

- 证明 $S(n_0)$ 为真。
- 证明（对于一切整数 $n_0 \leq n \leq m_0 - 1$ ）如果 $S(n)$ 为真，那么 $S(n+1)$ 也为真。

向下的简单归纳法

- 证明 $S(m_0)$ 为真。

简单 (ii) 证明 (对于一切整数 $n_0 + 1 \leq n \leq m_0$) 如果 $S(n)$ 为真，则 $S(n+1)$ 也为真。

读者可以明显看出，这两种方法中的任一种对于证明 $S(n)$ (对于一切 $n_0 \leq n \leq m_0$) 为真来说都是充分的。

证明计算机程序的命题

证明 $S(n)$ 对于一切 n 为真，因而使得 $S(n)$ 对于 $n_0 \leq n \leq m_0$ 为真，或是对于 $n_0 \leq n$ 为真，有时并无明确区别。在这种情况下，我们常常可以证明这一结果而勿须知道涉及到哪一种情况。例如，在证明程序的正确性时，有时我们想证明命题 S 对于每次操作到达程序中的某一点时都为真。这时我们便可以利用关于操作到达该点次数 n 的归纳法来证明它。但我们不能精确地知道操作到达该点有多少次——这可以由运行的程序所使用的数据来确定。或者操作到达该点的次数是有限数字 m ，或者如果程序不停止的话操作到达该点的次数会达到无限次。这样，我们可以证明 $S(n)$ 对于一切的 n 为真，从而使得 $S(n)$ 对于 $1 \leq n \leq m_0$ 或者 $1 \leq n$ 都为真。然而，我们可以证明这一结果而不必考虑实际上是什么情况。如果能够作出如下证明，那么我们就证明了每次操作到达该点时论断 $S(n)$ 都为真：

(i) $S(1)$ 为真 (即操作第一次到达该点时 S 为真)。

(ii) 如果 $S(n)$ 为真 (即当操作第 n 次到达该点时 S 为真)，那么当操作第 $n+1$ 次到达该点时， $S(n+1)$ 也为真 (即操作第 $n+1$ 次到达该点时 S 也为真)。

如果操作仅仅到达该点 m_0 次，那么只有使归纳前提 (ii) 可能为真的 n 的值才是满足 $1 \leq n \leq m_0 - 1$ 的所有的 n 的值，而操作再次达到该点就是第 $n+1$ 次。另一方面，如果操作达到该点无限次，则使归纳前提 (ii) 为真的 n 的值都是 $1 \leq n$ 的。于是，如果我们能够证

明(i)和(ii),那么我们就通过向上的简单归纳法,或者简单归纳法证明了 $S(n)$ 对于所有 n 的有关的值为真,而不必考虑是这两种情况中的哪一种情况。中等数学研究会出题组编著

练习

1. 证明对于所有的正整数 n , 有 $\frac{1}{(1 \cdot 2)} + \frac{1}{(2 \cdot 3)} + \cdots + \frac{1}{(n \cdot (n+1))} = \frac{n}{n+1}$

2. 证明对于所有的非负整数 n , 有 $3^0 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$

3. 证明对于所有的正整数 n , 有 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$

(注意: 上述等式和例 1·2·1 一起可以证明下述显著的事实

$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1+2+\cdots+n)^2$

4. 为方法(例如, 当我们不知道或不能确定定理 $S(n)$ 为真得

下, 则以 $S(n)$ 为真为前提, 用数学归纳法证明 $S(n+1)$ 为真。(i)

(ii)

上图是 0, 1, 2 以及 3 级的完全二元树的例子, n 级的完全二

元树是一个象上面那样的图, 树的所有节点除 n 级上的以外

都有两个分支。树的 n 级节点没有任何分支, 因而被称为树的

(i) 证明 $S(n)$ 为真。

图 1



上图是 0, 1, 2 以及 3 级的完全二元树的例子, n 级的完全二

元树是一个象上面那样的图, 树的所有节点除 n 级上的以外

都有两个分支。树的 n 级节点没有任何分支, 因而被称为树的

末端节点或叶节点。通过关于级n的归纳法，证明n级的完全二元树的末端节点数是 2^n 。找出这种树的节点（末端节点和非末端节点）总数公式，并用归纳法证明之。

5.

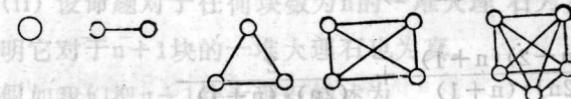


图 2

上图是一个包含 1, 2, 3, 4 和 5 个节点的完全图的例子。

n个节点的完全图是一个象上面那样的图，它包含n个节点而且具有连接每一对节点的支路（或者说是链节）。找出n个节点的完全图中的支路或者说是链节的个数的公式，并用关于n的归纳法证明之。

6. 找出下述证明中的错误，并希望证明

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \frac{3n-2}{2n}$$

对于一切正整数n成立。关于n的归纳法证明如下：

(i) 对于n=1, 公式为真。因为

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{3 \cdot 1 - 2}{2 \cdot 1} = \frac{3 - 2}{2} = \frac{1}{2}$$

(ii) 设公式对于n为真，即

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \frac{3n-2}{2n}$$

同时由于

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

$$= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

$$= \frac{3n-2}{2n} + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \quad (\text{归纳假设})$$

$$= \frac{(3n-2)(n+1)}{(2n) \cdot (n+1)} + \frac{2}{(2n) \cdot (n+1)}$$

1. 证明对于所有的正整数 n ，有 $\frac{3n^2+n-2+2}{(2n) \cdot (n+1)}$ 是一个整数。

$$\frac{3n^2+n-2+2}{(2n) \cdot (n+1)} = \frac{3n^2+n}{(2n) \cdot (n+1)}$$

$$= \frac{3n+1}{2(n+1)} + \frac{2^2+3^2+\cdots+n^2}{2(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3(n+1)-2}{2(n+1)}$$

于是公式关于 $n+1$ 也为真。真式发公， $i=n$ 于以 (i)

虽然这个证明似乎是有根据的，但是由于 $n=4$ 时我们有

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{6}{12} + \frac{2}{12} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \quad (\text{ii})$$

而 $\frac{3-n\epsilon}{2n} = \frac{1}{2 \cdot (1-\epsilon)} + \cdots + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 1}$
 $\frac{3n-2}{2n} = \frac{3 \cdot 4 - 2}{2 \cdot 4} = \frac{10}{8} \neq \frac{3}{4}$ ，所以证明是不正确的。

7. 找出下面证明中的错误。我们希望证明的命题是任一堆大理石仅包含同一种颜色。下面给出大理石块数为 n 的归纳法证

明。

(i) 当 $n=1$ 时, 是很明显的, 因为任何仅有一块的一堆大理石石明显地仅包含有同一种颜色的大理石。

(ii) 设命题对于任何块数为 n 的一堆大理石石为真, 让我们证明它对于 $n+1$ 块的一堆大理石石也为真。

假如我们把 $n+1$ 块大理石石描述为

$$\begin{array}{ccccccc} \circ & \circ & \cdots & \circ & \circ \\ 1 & 2 & \cdots & n & n+1 \end{array}$$

如果我们从中移走第 $n+1$ 块, 那么剩下的是 n 块大理石石:

$$\begin{array}{ccccccc} \circ & \circ & \cdots & \circ \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{array}$$

根据归纳假设, 这 n 块大理石石一定都是同一种颜色的。现在我们假定从中移走的不是第 $n+1$ 块, 而是第 1 块, 那么剩下的大理石石是

$$\begin{array}{ccccccc} \circ & \circ & \cdots & \circ & \circ \\ 2 & 3 & \cdots & n & n+1 \end{array}$$

但这也是块数为 n 的一堆大理石石, 由此可根据归纳假设, 这 n 块大理石石也是同一种颜色。这就是说 $n+1$ 块大理石石全都是同一种颜色的, 因为我们知道大理石石

$$\begin{array}{ccccccc} \circ & \circ & \cdots & \circ \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{array}$$

全都是同一种颜色的, 而且第 $n+1$ 块大理石石也是和第 n 块大理石石同一种颜色(事实上, 它不仅和第 n 块大理石石是同一种颜色, 而且它和第 2, 3, ..., n 块大理石石都是同一种颜色)。

于是, 所有 $n+1$ 块大理石石都是同一种颜色的。