

2010年

全国硕士研究生入学考试辅导用书

2010年全国硕士研究生 入学考试历年真题精解 数 学 一

清华大学 黄艳萍
北京大学 孙 璇 主 编
首都师范大学 童 武



 复旦大学出版社
www.fudanpress.com.cn

名校 · 名师 · 经典 · 精辟

2010 年全国硕士研究生入学考试辅导用书

2010 年全国硕士研究生 入学考试历年真题精解

数 学 一

清华大学	黄艳萍	
北京大学	孙璇	主编
首都师范大学	童武	

复旦大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

2010年全国硕士研究生入学考试历年真题精解 数学一/黄艳萍、孙璇、童武
主编. —上海:复旦大学出版社,2009.5
全国硕士研究生入学考试辅导用书
ISBN 978-7-309-06587-9

I. 2… II. ①黄…②孙…③童… III. 高等数学-研究生-入学考试-解题
IV. G643.44

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第047878号

2010年全国硕士研究生入学考试历年真题精解 数学一

黄艳萍 孙璇 童武 主编

出版发行 复旦大学出版社 上海市国权路579号 邮编 200433
86-21-65642857(门市零售)
86-21-65100562(团体订购) 86-21-65109143(外埠邮购)
fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com

责任编辑 范仁梅

出品人 贺圣遂

印刷 上海华文印刷厂

开本 787×1092 1/16

印张 15.75

字数 413千

版次 2009年5月第一版第一次印刷

印数 1—5 100

书号 ISBN 978-7-309-06587-9/G·821

定价 25.00元

如有印装质量问题,请向复旦大学出版社发行部调换。

版权所有 侵权必究

内 容 提 要

本书囊括了 1990—2009 年全国硕士研究生入学考试数学一试题,并对其进行了详尽的分析。剖析其命题思路,指出其题型特点,综合分析其命题规律,使考生在复习大纲规定的重点、疑点和难点的基础上,把握历年命题脉络和出题动态,做到举一反三、融会贯通,从而取得良好的复习效果。

为了指导参加 2010 年全国硕士研究生入学考试的广大考生数学考试的复习,根据最新考试大纲的要求,我们组织多年来参加考试大纲制定和修订工作及参加考前辅导的部分教授、专家编写了这本《2010 年全国硕士研究生入学考试历年真题精解 数学一》,供广大考生复习使用。

研究生入学考试是选拔性考试,当然重在考查考生的能力高低。能力是建立在基础之上的,基本功不扎实,一切无从谈起。从考试大纲来看,要求考生对基本知识、基本概念的掌握理解要深、要透、要准,尽管大学期间的期中、期末考试基本反映了这一要求,但从程度上讲,远没有考研的要求高。相信大家都有同感,通过大学的期末考试其实不难,甚至基本概念不甚清晰、知识点掌握不够通透,也有可能取得较不错的成绩。这是由于大学考试有其固定套路,即便考查相同的知识点,其题目的迷惑性、技巧性都远逊于研究生入学考试的题目。因此,狠抓基础是一项必要的工作。虽然很多考生可能会认为,基础的东西学起来有点费力不讨好,短期收效不明显。但笔者再三强调,不可轻视基础,必须夯实到理解得入木三分的程度。

德国大数学家高斯曾说过:“数学是科学的皇后。”毫无疑问,数学是对人类思维能力要求最高的学科,它不仅范围广、内容多,而且深刻体现了人类的聪明才智所能达到的最

高境界.全国硕士研究生入学考试数学科目是考查考生的数学功底、思维能力,并不是要求考生进行高深的数学基础理论研究,但却是对考生在一定层次上进行各种思维能力,包括抽象思维能力、逻辑推理能力等的综合性检验.既然如此,要考好数学,思维能力必须有质的飞跃.数学科目的考试范围基本上是高等数学(微积分)、线性代数、概率论与数理统计这三大块,经济类考生的数学试卷还涉及一些经济数学的知识.无论如何,考生首先要全面细致地研究全国硕士研究生入学考试的数学大纲.自从考研招生实行全国统考以来,数学考试命题是严格按照国家考试中心制定的“数学考试大纲”所规定的考试内容和考试要求来进行的.大纲对考试性质、要求、方法、内容、试题类别、适用专业等进行了详细阐述,是广大考生备考的指导性文件和根本依据.考生必须从中全面领会考试精神,尤其是明确考试范围,以便在复习时有的放矢.大纲所要求的知识点或考点,考生一定要熟记在心,不要求的内容,应该跳过,不要浪费精力.同时要注意,不光应分析研究本年最新的大纲,还要研究去年乃至上一年的大纲,从比较中发现其变化.

历史是一面镜子,了解昨天才能明白今天,掌握了历史和现在才能把握未来.研习历年的试题是研究生入学考试复习备考中必不可少的关键环节,也是考生掌握考试动态、赢得高分的最佳捷径.历年的考题是标准的复习题.自从实

行研究生入学考试以来,也时有真题重现的现象发生,如2003年数学一的第一大题第(3)小题与1993年数学一的第一大题第(3)小题、2003年数学一的第一大题第(5)小题与1996年数学三的第一大题第(5)小题、2003年数学一的第三大题与2001年数学三的第六大题等等,都是相同或非常相似的.所以,对往年真题的研究对考生而言是最有帮助的.循着命题人的思路,我们就可以把握考试的脉搏,明确考试的重点和难点所在.

本书是广大数学教师及原考研命题组的专家、教授智慧和劳动的结晶,是一份宝贵的资料.其中的每一道试题,既反映了考研数学考试大纲对考生数学知识、能力和水平的要求,又蕴含着命题的指导思想、基本原则和趋势.因此,对照考试大纲分析、研究这些试题,考生不仅可以了解考研以来数学考试的全貌,而且可以方便地了解有关试题和信息,从中发现规律,归纳出各部分内容的重点、难点,以及常考的题型,进一步把握考试的特点及命题的思路和规律,从而从容应考,轻取高分.

编者 于北大燕园

CONTENTS | 目 录

历年真题部分

2009 年全国硕士研究生入学考试	数学一试题	003
2008 年全国硕士研究生入学考试	数学一试题	007
2007 年全国硕士研究生入学考试	数学一试题	010
2006 年全国硕士研究生入学考试	数学一试题	013
2005 年全国硕士研究生入学考试	数学一试题	016
2004 年全国硕士研究生入学考试	数学一试题	019
2003 年全国硕士研究生入学考试	数学一试题	022
2002 年全国硕士研究生入学考试	数学一试题	025
2001 年全国硕士研究生入学考试	数学一试题	028
2000 年全国硕士研究生入学考试	数学一试题	031
1999 年全国硕士研究生入学考试	数学一试题	034
1998 年全国硕士研究生入学考试	数学一试题	037
1997 年全国硕士研究生入学考试	数学一试题	040
1996 年全国硕士研究生入学考试	数学一试题	043
1995 年全国硕士研究生入学考试	数学一试题	046
1994 年全国硕士研究生入学考试	数学一试题	049



1993 年全国硕士研究生入学考试	数学一试题	052
1992 年全国硕士研究生入学考试	数学一试题	055
1991 年全国硕士研究生入学考试	数学一试题	058
1990 年全国硕士研究生入学考试	数学一试题	061

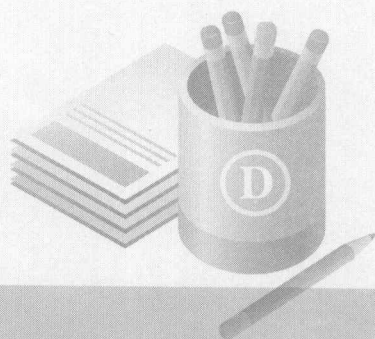
试题精解部分

2009 年全国硕士研究生入学考试	数学一试题精解	067
2008 年全国硕士研究生入学考试	数学一试题精解	076
2007 年全国硕士研究生入学考试	数学一试题精解	085
2006 年全国硕士研究生入学考试	数学一试题精解	093
2005 年全国硕士研究生入学考试	数学一试题精解	101
2004 年全国硕士研究生入学考试	数学一试题精解	112
2003 年全国硕士研究生入学考试	数学一试题精解	123
2002 年全国硕士研究生入学考试	数学一试题精解	133
2001 年全国硕士研究生入学考试	数学一试题精解	142
2000 年全国硕士研究生入学考试	数学一试题精解	151
1999 年全国硕士研究生入学考试	数学一试题精解	161
1998 年全国硕士研究生入学考试	数学一试题精解	170
1997 年全国硕士研究生入学考试	数学一试题精解	182
1996 年全国硕士研究生入学考试	数学一试题精解	191
1995 年全国硕士研究生入学考试	数学一试题精解	199
1994 年全国硕士研究生入学考试	数学一试题精解	205
1993 年全国硕士研究生入学考试	数学一试题精解	213
1992 年全国硕士研究生入学考试	数学一试题精解	221
1991 年全国硕士研究生入学考试	数学一试题精解	228
1990 年全国硕士研究生入学考试	数学一试题精解	237

2010年全国硕士研究生入学考试历年真题精解

历年真题部分

数学一



百年其題解

2009 年全国硕士研究生入学考试 数学一试题

一、选择题(1—8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每小题给出的 4 个选项中,只有一项符合题目要求,把所选选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$ 等价无穷小,则().

(A) $a = 1, b = -\frac{1}{6}$

(B) $a = 1, b = \frac{1}{6}$

(C) $a = -1, b = -\frac{1}{6}$

(D) $a = -1, b = \frac{1}{6}$

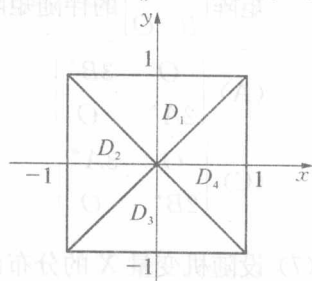
(2) 如右图,正方形 $\{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ 被其对角线划分为 4 个区域 $D_k (k = 1, 2, 3, 4)$, $I_k = \iint_{D_k} y \cos x dx dy$, 则 $\max_{1 \leq k \leq 4} \{I_k\} = ()$.

(A) I_1

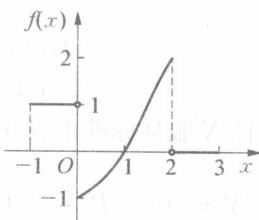
(B) I_2

(C) I_3

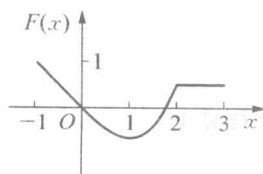
(D) I_4



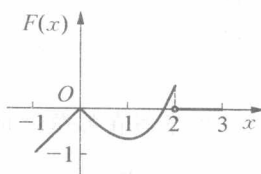
(3) 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-1, 3]$ 上的图形为



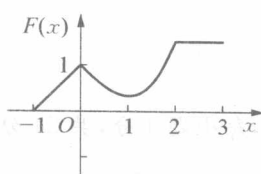
则函数 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 的图形为().



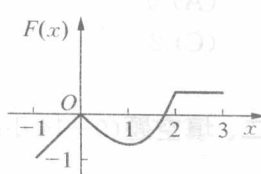
(A)



(B)



(C)



(D)

(4) 设有两个数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则().

(A) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛

(B) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散

- (C) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛 (D) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 发散
- (5) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是三维向量空间 $\mathbf{R}^3$ 的一组基, 则由基 $\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3$ 到基 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 的过渡矩阵为 ().

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

- (6) 设 A, B 均为二阶矩阵, A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵, 若 $|A| = 2, |B| = 3$, 则分块矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为 ().

(A) $\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$

- (7) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = 0.3\Phi(x) + 0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则 $E(X) = ()$.

(A) 0

(B) 0.3

(C) 0.7

(D) 1

- (8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 X 服从标准正态分布 $N(0, 1)$, Y 的概率分布为

$$P\{Y = 0\} = P\{Y = 1\} = \frac{1}{2},$$

记 $F_z(z)$ 为随机变量 $Z = XY$ 的分布函数, 则函数 $F_z(z)$ 的间断点个数为 ().

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

二、填空题 (9—14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上)

- (9) 设函数 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, $z = f(x, xy)$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (10) 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^x$, 则非齐次方程 $y'' + ay' + by = x$ 满足条件 $y(0) = 2, y'(0) = 0$ 的解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- (11) 已知曲线 $L: y = x^2 (0 \leq x \leq \sqrt{2})$, 则 $\int_L x \, ds = \underline{\hspace{2cm}}$.

- (12) 设 $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, 则 $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz =$ _____.
- (13) 若三维列向量 α, β 满足 $\alpha^T \beta = 2$, 其中 α^T 为 α 的转置, 则矩阵 $\beta \alpha^T$ 的非零特征值为 _____.
- (14) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自二项分布总体 $B(n, p)$ 的简单随机样本, $\bar{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差. 若 $\bar{X} + kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量, 则 $k =$ _____.

三、解答题(15—23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

- (15) (本题满分 9 分) 求二元函数 $f(x, y) = x^2(2 + y^2) + y \ln y$ 的极值.
- (16) (本题满分 9 分) 设 a_n 为曲线 $y = x^n$ 与 $y = x^{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$) 所围成区域的面积, 记

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}, \text{求 } S_1 \text{ 与 } S_2 \text{ 的值.}$$

- (17) (本题满分 11 分) 椭球面 S_1 是椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 绕 x 轴旋转而成, 圆锥面 S_2 是过点 $(4, 0)$, 且与椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 相切的直线绕轴旋转而成.

- (I) 求 S_1 及 S_2 的方程;
(II) 求 S_1 与 S_2 之间的立体体积.

- (18) (本题满分 11 分)

(I) 证明拉格朗日中值定理: 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 可导, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$;

(II) 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 在 $(0, \delta)$ ($\delta > 0$) 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = A$, 则 $f'_+(0)$ 存在, 且 $f'_+(0) = A$.

- (19) (本题满分 10 分) 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 其中 Σ 是曲面 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$ 的外侧.

- (20) (本题满分 11 分) 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}, \xi_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

- (I) 求满足 $A\xi_2 = \xi_1$ 的 ξ_2 , $A^2\xi_3 = \xi_1$ 的所有向量 ξ_2, ξ_3 ;
(II) 对(I)中的任意向量 ξ_2, ξ_3 , 证明: ξ_1, ξ_2, ξ_3 无关.

- (21) (本题满分 11 分) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

- (I) 求二次型 f 的矩阵的所有特征值;
(II) 若二次型 f 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$, 求 a 的值.

- (22) (本题满分 11 分) 袋中有 1 只红球, 2 只黑球与 3 只白球, 现有回放地从袋中取两次, 每次取一球, 以 X, Y, Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球和白球的只数.

- (I) 求 $p\{X = 1 \mid Z = 0\}$;
(II) 求二维随机变量 (X, Y) 的概率分布.



(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 其中参数 λ ($\lambda > 0$) 未知,

$X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(I) 求参数 λ 的矩估计量;

(II) 求参数 λ 的最大似然估计量.

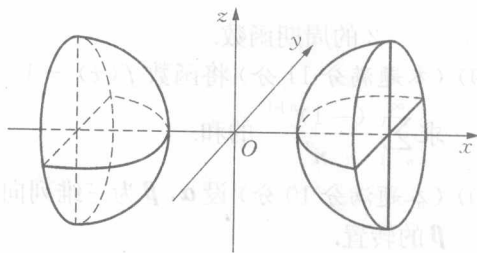
2008 年全国硕士研究生入学考试 数学一试题

一、选择题(1—8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每小题给出的 4 个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

- (1) 设函数 $f(x) = \int_0^x \ln(2+t) dt$, 则 $f'(x)$ 的零点个数是().
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
- (2) 函数 $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$ 在点 $(0, 1)$ 处的梯度等于().
 (A) $(1, 0)$ (B) $(-1, 0)$ (C) $(0, 1)$ (D) $(0, -1)$
- (3) 在下列微分方程中,以 $y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$ (其中 C_1, C_2, C_3 为任意常数)为通解的是().
 (A) $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$ (B) $y''' + y'' + 4y' + 4y = 0$
 (C) $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$ (D) $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$
- (4) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调有界, $\{x_n\}$ 为数列,下列命题正确的是().
 (A) 若 $\{x_n\}$ 收敛,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛 (B) 若 $\{x_n\}$ 单调,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛
 (C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛,则 $\{x_n\}$ 收敛 (D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调,则 $\{x_n\}$ 收敛
- (5) 设 A 为 n 阶非零矩阵, E 为 n 阶单位矩阵. 若 $A^3 = O$, 则().
 (A) $E-A$ 不可逆, $E+A$ 不可逆 (B) $E-A$ 不可逆, $E+A$ 可逆
 (C) $E-A$ 可逆, $E+A$ 可逆 (D) $E-A$ 可逆, $E+A$ 不可逆
- (6) 设 A 为三阶非零矩阵, 如果二次曲面方程

$$(x, y, z)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1$$

在正交变换下的标准方程的图形如右图, 则 A 的正特征值个数为().



- (7) 随机变量 X, Y 独立同分布函数 $f(x)$, 则 $Z = \max\{X, Y\}$ 的分布函数为().
 (A) $F^2(x)$ (B) $F(x)F(y)$
 (C) $1 - [1 - F(x)]^2$ (D) $[1 - F(x)][1 - F(y)]$
- (8) 随机变量 $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim N(1, 4)$, 且相关系数 $\rho_{XY} = 1$, 则().
 (A) $P\{Y = -2X - 1\} = 1$ (B) $P\{Y = 2X - 1\} = 1$
 (C) $P\{Y = -2X + 1\} = 1$ (D) $P\{Y = 2X + 1\} = 1$

二、填空题(9—14 小题,每小题 4 分,共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上)

- (9) 微分方程 $xy' + y = 0$ 满足条件 $y(1) = 1$ 的特解是 $y =$ _____.
- (10) 曲线 $\sin(xy) + \ln(y-x) = x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 _____.
- (11) 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+2)^n$ 在 $x=0$ 收敛, 在 $x=-4$ 发散, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-3)^n$ 的收敛域为 _____.
- (12) 设曲面 Σ 是上半球面 $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧, 则 $\iint_{\Sigma} xy \, dy \, dz + x \, dz \, dx + x^2 \, dx \, dy =$ _____.
- (13) 设 A 为二阶矩阵, α_1, α_2 为线性无关的二维列向量, $A\alpha_1 = 0, A\alpha_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2$, 则 A 的非零特征值为 _____.
- (14) 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布, 则 $P\{X = E(X^2)\} =$ _____.

三、解答题(15—23 小题,共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

- (15) (本题满分 9 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4}$.
- (16) (本题满分 9 分) 计算曲线积分 $\int_L \sin 2x \, dx + 2(x^2 - 1)y \, dy$, 其中 L 是曲线 $y = \sin x$ 上从点 $(0, 0)$ 到点 $(\pi, 0)$ 的一段.
- (17) (本题满分 11 分) 已知曲线
- $$C: \begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 0, \\ x + y + 3z = 5, \end{cases}$$
- 求曲线 C 上与 Oxy 面的距离最远点和最近点.
- (18) (本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 连续.
- (I) 令 $F(x) = \int_0^x f(t) \, dt$, 用定义证明: $F(x)$ 可导, 且 $F'(x) = f(x)$;
- (II) 设 $f(x)$ 是周期为 2 的连续函数, 证明: $g(x) = \int_0^x 2f(t) \, dt - x \int_0^2 f(t) \, dt$ 也是周期为 2 的周期函数.
- (19) (本题满分 11 分) 将函数 $f(x) = 1 - x^2 (0 \leq x \leq \pi)$ 展开成余弦形式的傅里叶级数, 并求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ 的和.
- (20) (本题满分 10 分) 设 α, β 为三维列向量, 矩阵 $A = \alpha\alpha^T + \beta\beta^T$, 其中 α^T 为 α 和转置, β^T 为 β 的转置.
- (I) 证明: $r(A) \leq 2$;
- (II) 若 α, β 线性相关, 则 $r(A) < 2$.
- (21) (本题满分 12 分) 设 n 元线性方程组 $Ax = b$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & & 0 \\ a^2 & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & a^2 & 2a \end{pmatrix}_{n \times n}, \quad x = (x_1, \dots, x_n)^T, \quad b = (1, 0, \dots, 0)^T.$$