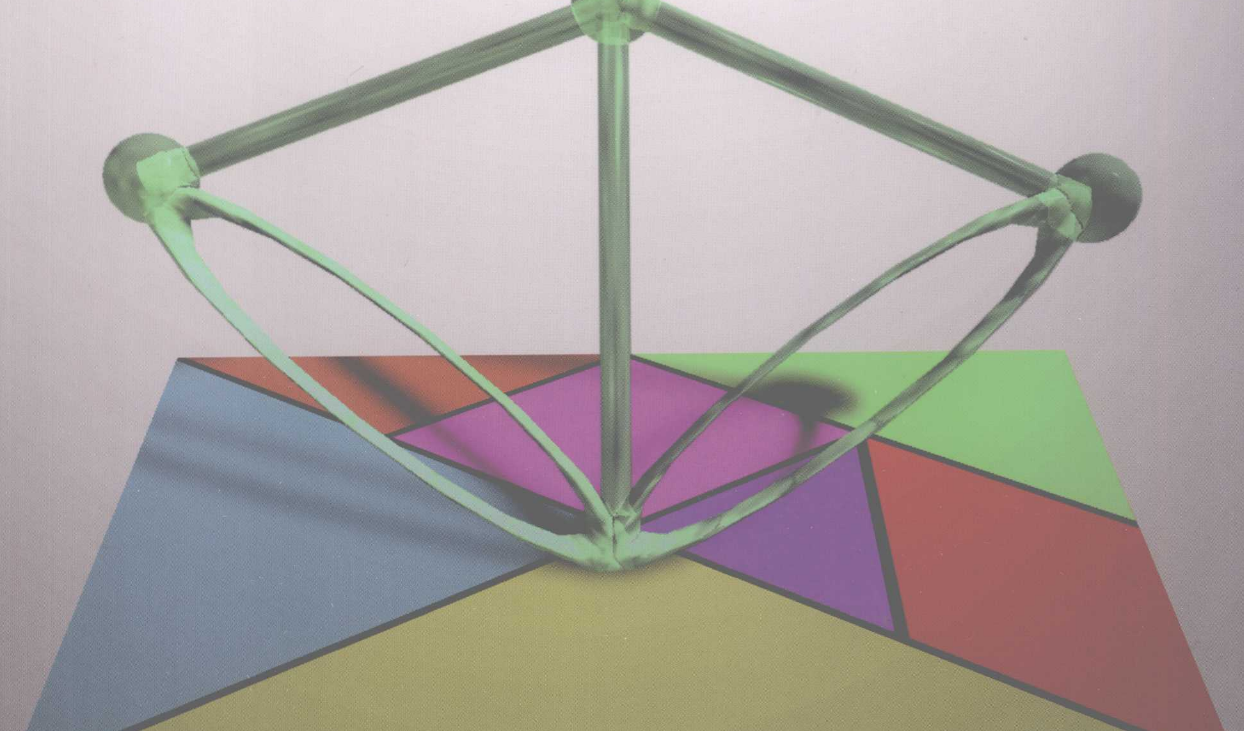
计算机科学组合学丛书

线性规划

卢开澄 卢华明 编著



清华大学出版社

计算机科学组合学丛书

线性规划

卢开澄　卢华明　编著

清华大学出版社

北京

内容简介

全书共9章，分单纯形法和几个专题两部分。

第一部分单纯形法，包括数学模型、单纯形法、改善的单纯形法、单纯形法的补充、对偶原理与对偶单纯形共5章。第二部分几个专题，包括运输问题及其他、内点法简介、目标规划、整数规划共4章。

第一部分是基本内容；第二部分供各取所需选择内容，概括了线性规划的各个方面，算例丰富是其特点。本书可作为计算机系、数学系、经济管理学院本科生及研究生的教材。

图书在版编目（CIP）数据

线性规划/卢开澄，卢华明编著. —北京：清华大学出版社，2009.2
（计算机科学组合学丛书）
ISBN 978-7-302-18220-7

Ⅰ. 线…　Ⅱ. ①卢…　②卢…　Ⅲ. 线性规划　Ⅳ. O221.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第111141号

责任编辑：张　民　李　晔
责任校对：李建庄
责任印制：何　芊

出版发行：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦A座
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084
c-service@tup.tsinghua.edu.cn
社 总 机：010-62770175　　**邮购热线**：010-62786544
投稿咨询：010-62772015　　**客户服务**：010-62776969
印 刷 者：北京市世界知识印刷厂
装 订 者：三河市溧源装订厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185×260　**印　张**：21　**字　数**：494千字
版　　次：2009年2月第1版　**印　次**：2009年2月第1次印刷
印　　数：1～4000
定　　价：29.50元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：010-62770177转3103　　产品编号：028361-01

计算机科学组合学丛书序

电子计算机的出现是20世纪的大事,它改变了我们这个世界的面貌。可以毫不夸张地说,它的影响遍及所有角落,几乎无处不感觉到它的存在。数学更不例外。严格地说,电子计算机本身就是近代数学的辉煌成就。将计算机与数学割裂开来,既不合理也不可能。组合学也就是在计算机科学蓬勃发展的刺激下而崛起的,从而成为近若干年来最活跃的数学分支。它研究的问题有的可追溯到 Euler 和 Hamiltan 等18世纪的数学家,但它成为新的分支还是近若干年的事。它从与计算机科学相结合中获得了广阔的发展空间,从而也为计算机科学奠定了理论基础。

什么是计算机科学呢?有的学者将它定义为研究算法的一门学科。研究算法无疑是计算机科学的重要领域,也是本丛书的核心内容,贯穿始终。组合学家在20世纪70年代初建立的算法复杂性"NP理论",至今仍然令无数计算机科学工作者与数学工作者为之折腰。

计算机科学里的组合学内容十分广泛。本丛书涉及组合分析、图论、组合算法、近代密码学、组合优化、编码理论及算法复杂性等7部分。

组合分析是算法的理论基础。组合分析之与组合算法犹如数学分析之与计算数学,众所周知,前者是后者的理论根基。

图论原本是组合数学这个"家族"的主要成员,只因它已成长壮大,故自立门户独立出去。

算法复杂性的NP理论是近三十年的一大成就。研究表明对于一类叫做NPC类的困难问题,至今都没找到有效算法,但它们难度相当,只要其中任何一个找到多项式解法,则全体都获得解决;或证明它们根本不存在有效办法。不论是前者还是后者都还看不见露到海平面上的桅杆塔,它吸引了众多的有志之士。密码学是其中十分引人入胜的分支。如若设计好的密码,对它的破译等价于某一NPC类困难问题,无疑这样的密码将是牢不可破的。

在计算机网络深入普及的信息时代,信息本身就是时间,就是财富。信息的传输通过的是脆弱的公共信道,信息储存于"不设防"的计算机系统中,如何保护信息的安全使之不被窃取及不至于被篡改或破坏,已成为当今被普遍关注的重大问题。密码是有效而且可行的办法。在计算机网络的刺激下,近代密码学便在算法复杂性理论的基础上建立起来了。密码作为一种技术,自从人类有了战争,不久便有了它。但作为一门学科则是近二十多年的事。甚至于它已成为其他学科的基础。密码也从此走出"军营",进入百姓家。

实际中的"优化"问题是大量的,半个多世纪以来它曾经几度辉煌。近来在计算机科学的影响下,又出现了若干闪光点,十分耀眼,引人注目。

实际上密码也是一种编码。如果说密码学研究的编码是保证通信的保密与安全,则

编码理论研究的是通信中如何纠错与检错。计算机纠错码是既实用、理论上又饶有趣味的分支。

本丛书是作者在清华大学计算机科学与技术系长期工作的总结。它不是一部“长篇”记述，而是互相关联又彼此相对独立，因此难免有少量交叉。它们涉及的面如此之广，囿于作者的水平，缺点和错误在所难免，敬请读者不吝指正。

作　者

前　言

线性规划最初是美国军方为解决其运输等后勤问题而提出来的。自从1947年G.B.Dantzig公开了他的单纯形法以来，其应用范围日益扩大，几乎遍及经济规划、工业生产和商业活动等各个方面。单纯形法始终扮演着光彩夺目的角色。线性规划也作为运筹学的主要内容受到普遍重视，以至于许多高等院校的数学系、经济管理系以及系统工程等专业都把它列为一门必修课。

线性规划在其发展过程中有几件事值得一提，一方面是受到管理思维的影响，经济活动已不是像“经济人”那样一味地追求“利润极大”、“开支极小”，代之以决策时考虑“普遍感到满意”，目标规划就是在这个基础上被提出来的。它还属线性规划的范畴，但比传统的单目标规划灵活，值得大力推动以扩大其应用。

另一方面随着计算机科学的蓬勃发展，计算复杂性理论新军兴起，引人入胜，单纯形法虽然表现甚佳，但它的复杂性究竟如何？这时Minty和Klee举出一个例子证明单纯形法在最坏情况下属于指数型算法。20世纪70年代末，前苏联数学家Хачиян提出线性规划的椭球算法，从理论上证明了线性规划属于多项式型问题，然而椭球算法的实际效果极差，徒有理论价值。不久Bell实验室的Karmarkar又提出一个新的多项式算法理论，并证明其复杂性分析能力比Хачиян的椭球算法要好。但人们相信该算法还有进一步改善的潜力，经20世纪80年代以来多人的努力，似乎由此形成的“内点法”在超大型问题方面解题速度要快于单纯形法。

线性规划中的整数规划，其难度要大得多，其中有不少涉及NP理论的命题，本书将适当介绍。

本书主要由卢华明执笔。囿于作者的水平，缺点和错误在所难免，敬请指正！

编者

2008年7月

目　录

第一部分　单 纯 形 法

第二部分　几 个 专 题

第一部分

单纯形法

第 1 章 数学模型

1.1 引 言

自从 George B. Dantzig 于 1947 年公开发表他的单纯形法以来(实际上他提出单纯形法最早在第二次世界大战期间),有许多作者在线性规划这个领域作出了贡献,包括理论研究、算法及其应用。至今单纯形法依然在线性规划领域中占据了重要的位置,其原因在于,应用它许多复杂的经济问题大都能在合理的时间里获得解决。尽管近年来提出了若干在理论分析方面有突出表现的算法,但单纯形法依然光彩照人。正是由于这个原因,本书将着重讨论它,后面还将对其中若干有希望的算法做简单介绍。

所谓线性规划问题,是指在一组线性不等式约束下求线性目标函数的极大值或极小值问题。例如:

$$\begin{aligned}
\min z = \; & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{s.t.} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geqslant b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geqslant b_2 \\
& \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geqslant b_m \\
& x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0
\end{aligned} \tag{1.1}$$

这里 s. t. 是 subject to 的缩写,即"满足于"的意思。其中,线性函数 $c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$ 称为目标函数;$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 称为判决变量。第 i 个约束条件可以写成:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i, \quad i = 1,2,\cdots,m$$

由系数 a_{ij} 构成的矩阵称为约束矩阵,即

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m\times n}$$

由右端 b_i 构成的向量

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

称为右端项。

一组满足式(1.1)约束条件的变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的值称为一组可行解,可行解的集合称为可行解域或可行解空间。线性规划问题也就是在可行解域上寻找使目标函数取得极

小(或极大)值的可行解。

例 1.1

$$
\begin{aligned}
\min\ z = & 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.t.}\quad & 2x_1 + 3x_2 \geqslant 6 \\
& x_1 + x_2 \leqslant 4 \\
& x_1, x_2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

可行解域是由 4 条边界线包围起来的域,4 条边界线为 $2x_1+3x_2=6$,$x_1+x_2=4$,$x_1=0$,$x_2=0$。由它们包围起来的可行解域如图 1.1 中阴影所示。箭头⇒标出可行解域在该边界线的一侧,例如其中的 $2x_1+3x_2\geqslant 6$,如图 1.2 所示。

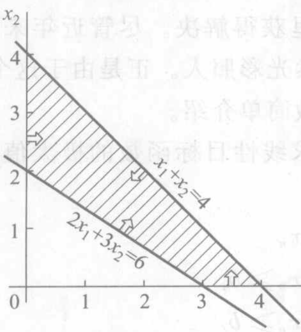


图 1.1

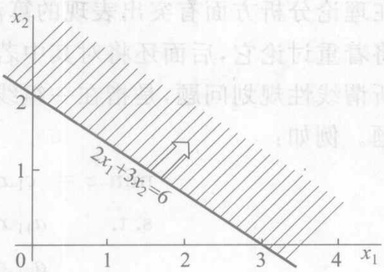


图 1.2

1.2 问题的提出

本节将提出若干典型的线性规划问题。

例 1.2 饲料问题。

饲养场的饲料由各种食物混合而成,要求各种营养素达到各自的一定限量。假定有 n 种食物 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 可供选择,要求每天所供给的 m 种营养素 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ 量分别不少于 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 单位,食物 f_i 的单位重量的价格为 c_i,f_i 含 v_j 的百分比为 a_{ji},其中 $j=1, 2, \cdots, m$;$i=1,2,\cdots,n$。

假定每天每份饲料含食物 f_i 的重量为 x_i,其中 $i=1,2,\cdots,n$,则代价为 $z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$。要求在保证营养素 v_i 不少于 $b_i(i=1,2,\cdots,m)$ 的条件下,使代价最小,则问题导致

$$
\begin{aligned}
\min\ z = & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{s.t.}\quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geqslant b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geqslant b_2 \\
& \quad\vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geqslant b_m \\
& x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0
\end{aligned}
$$

若考虑营养素 v_i 不得少于 b_i，但不得超过 $\bar{b}_i$，$\bar{b}_i \geqslant b_i$，其中 $i=1,2,\cdots,n$，则问题导致

$$
\begin{aligned}
\min z = & \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{s. t.} \quad & \bar{b}_1 \geqslant a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geqslant b_1 \\
& \bar{b}_2 \geqslant a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geqslant b_2 \\
& \qquad \vdots \\
& \bar{b}_m \geqslant a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geqslant b_m \\
& \quad x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0
\end{aligned}
$$

如若进一步考虑饲料中食物 f_i 的含量不得超过 d_i 单位，其中 $i=1,2,\cdots,n$，则问题导致

$$
\begin{aligned}
\min z = & \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{s. t.} \quad & \bar{b}_1 \geqslant a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geqslant b_1 \\
& \bar{b}_2 \geqslant a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geqslant b_2 \\
& \qquad \vdots \\
& \bar{b}_m \geqslant a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geqslant b_m \\
& \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant d_1, 0 \leqslant x_2 \leqslant d_2, \cdots, 0 \leqslant x_n \leqslant d_n
\end{aligned}
$$

例 1.3 生产计划问题。

某工厂生产两种产品 P_1 和 P_2。产品 P_1 的单位售价 29 元，产品 P_2 单位售价 23 元；产品 P_1 每单位原材料费为 12 元，而产品 P_2 每单位原材料费为 11 元；产品 P_1 每单位需要 m_1 机器 2 小时和 m_2 机器 1 小时，产品 P_2 每单位需要机器 m_1 和机器 m_2 各 1 小时。产品 P_1 每单位机器费用 13 元，产品 P_2 每单位机器费用 10 元。该工厂机器 m_1 每天有 100 小时可供使用，机器 m_2 每天有 80 小时可供使用。产品 P_1 销售量不受限制，而产品 P_2 最多只能卖出 40 个单位。问该厂应如何安排生产使利润达到最大。

假定每日生产产品 P_1 为 x_1 单位，生产产品 P_2 为 x_2 单位。产品 P_1 每单位的利润为 $29-12-13=4$ 元，产品 P_2 每单位的利润为 $28-11-10=2$ 元。

总利润

$$z = 4x_1 + 2x_2$$

约束条件

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 &\leqslant 100 \\
x_1 + x_2 &\leqslant 80 \\
x_1 \geqslant 0, 0 &\leqslant x_2 \leqslant 40
\end{aligned}
$$

故生产计划问题导致下面的线性规划问题，即安排生产使总利润达到最大。

$$
\begin{aligned}
\max z = & 4x_1 + 2x_2 \\
\text{s. t.} \quad & 2x_1 + x_2 \leqslant 100 \\
& x_1 + x_2 \leqslant 80 \\
& 0 \leqslant x_1, 0 \leqslant x_2 \leqslant 40
\end{aligned}
$$

例 1.4 下料问题。

现有钢筋长为 l，由它截成长度为 l_i 的钢条 b_i 根，其中 $i=1,2,\cdots,m$。假定现有 n 种切割方案，每种方案用一个列向量表示，即

$$\boldsymbol{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \quad j = 1,2,\cdots,n$$

其中 a_{ij} 为第 j 种方案截取长度为 l_i 的钢条数，即

$$a_{1j}l_1 + a_{2j}l_2 + \cdots + a_{mj}l_m \leqslant l$$

假定用第 j 种方案截断的钢筋数为 $x_j, j=1,2,\cdots,n$。于是有

$$\begin{aligned} \min z = & \ x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ \text{s. t.} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geqslant l_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geqslant l_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geqslant l_m \\ & x_i \geqslant 0 \text{ 且均为整数}, \quad i = 1,2,\cdots,n \end{aligned}$$

例 1.5 运输问题。

设某产品有 m 个产地 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_m$；$n$ 个销地 $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \cdots, \mathrm{B}_n$。每单位产品从产地 A_i 运往销地 B_j 的运费为 $c_{ij}(i=1,2,\cdots,m, j=1,2,\cdots,n)$，如图 1.3 所示。已知产地 A_i 的产量为 $a_i(i=1,2,\cdots,m)$，销地 B_j 的需求量为 $b_j(j=1,2,\cdots,n)$。试问应如何安排运输，使保证供给且运费最省。已知 $\sum_{i=1}^{m} a_i \geqslant \sum_{j=1}^{n} b_i$。

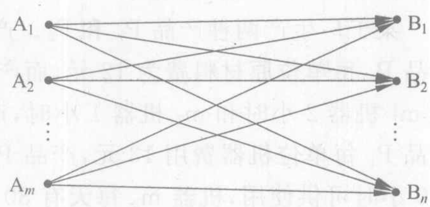


图 1.3

设由 A_i 运往 B_j 的产品为 x_{ij} 单位，则此问题变成

$$\begin{aligned} \min z = & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geqslant b_j \quad j = 1,2,\cdots,n \\ & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i \quad i = 1,2,\cdots,m \\ & x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n \end{aligned}$$

例 1.6 投资问题。

假定某单位拟在以后 4 年内对某项目依次投资 300 万、500 万、900 万和 600 万元，为了筹措这笔资金，该单位打算出售长期债券。长期债券的市场年利率 4 年中依次为 7.5%、6%、7.5%和 6.5%，可连续付 10 年利息后还本。与此同时，有短期存款年利率分别为 6.5%、6.5%和 5.5%。问最佳投资策略是什么？即每年出售多少长期债券和用多少作为短期存款，使最后付出最小？

设第 i 年开始时卖出的长期债券为 x_i 百万元，$i=1,2,3,4$。收到长期债券后立即用