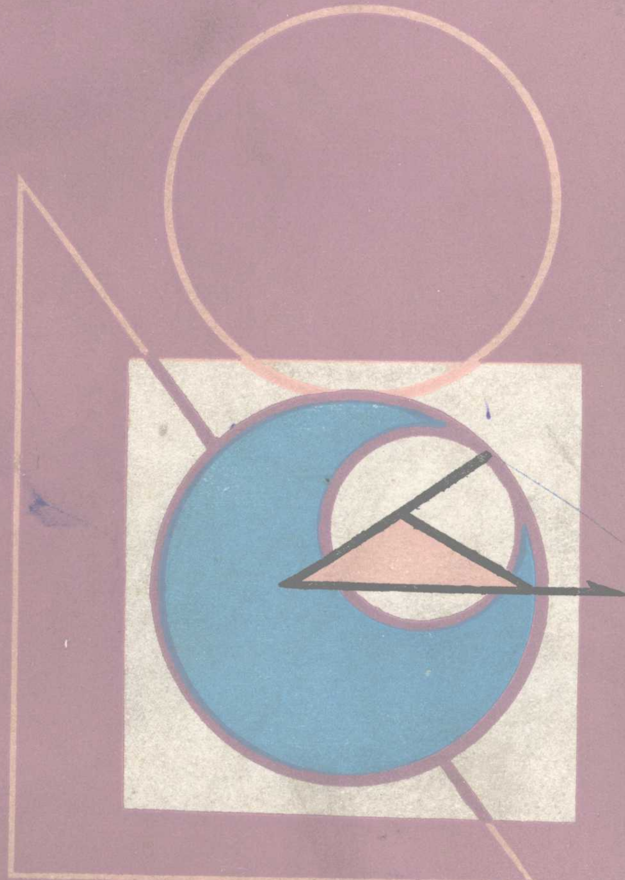
高中数学基础知识和例题



广西人民出版社

高中数学
基础知识和例题

广西教育学院教研部主编

广西人民出版社

高中数学基础知识和例题

广西教育学院教研部主编

☆

广西人民出版社出版

（南宁市河堤路14号）

广西新华书店发行　　广西民族语文印刷厂印刷

＊

开本787×1092　1/32　17.75印张　　393千字

1986年12月第1版　1986年12月第1次印刷

印　数1—15.000册

书号：7113·715　定价：2.70元

说　明

为了帮助高中学生和社会青年系统学习高中数学基础知识，掌握高中数学的思维方法和解题的技能技巧，提高分析问题和解决问题的能力，我部组织一些有经验的中学老师编写了这本书。

本书是根据《高中数学教学纲要》及新的统编教材编写的，全书按知识系统分代数、平面三角、立体几何、解析几何、导数和微分初步五篇，篇下设章，每章包括基础知识提要、典型例题和练习题三部分内容。书末附有较详细的习题参考答案或提示。

本书可作为高中学生和社会青年学习高中数学的参考书，也可作为教师组织高中数学总复习的教学参考书。

参加本书编写的有：第一篇，廖永康、覃寿融、陈钫初；第二篇，涂军训；第三篇，苏锡鸷；第四篇，曹德荣；第五篇，陈钫初、廖永康。全书由我部朱长雄同志统审。

由于水平有限，本书难免有错误与不妥之处，欢迎读者不吝指正。

广西教育学院教研部

1986年4月

目　录

第一篇　代　数

第二篇 平面三角

第三篇　立体几何

第四篇　平面解析几何

第五篇　导数和微分初步

练习和习题的参考答案与提示

第一篇　代　数

第一章　集合与数

一、集　合

1．集合的概念与表示法

（1）集合与元素：把具有某种属性的一些对象看做一个整体便形成一个集合．集合里的各个对象叫做这个集合的元素．

（2）集合元素的构成具有确定性和互异性．

确定性：对于一个给定的集合，集合中的元素是确定的。对任一对象都能确定是否是这个集合的元素．

互异性：对于一个给定的集合，集合中的元素是互相不同的．在同一集合中，不能重复出现同一元素．

（3）集合的表示法：

①列举法：把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内．

②描述法：把集合中的元素的公共属性描述出来，写在大括号内．

③如果a是集合A的元素，记作$a\in A$；如果a不是集合A的元素，记作$a\notin A$．

④常用数集的符号：正整数（自然数）集—N；整数集--Z；有理数集—Q；实数集---R；复数集—C。

2．集合与集合间的关系

（1）子集：①如果集合A的任何一个元素都是集合B的元素，那么集合A叫做集合B的子集，记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$。任一集合是它本身的子集，即 $A\subseteq A$。

②如果A是B的子集，并且B中至少有一个元素不属于A，那么集合A叫做集合B的真子集，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$。

③如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，那么集合A和集合B叫做相等，记作 $A=B$。

④不含任何元素的集合叫做空集，记作 $\varnothing$。空集是任何集合的子集。

（2）交集：由所有属于集合A且属于集合B的元素所组成的集合，叫做A与B的交集，记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x|x\in A\text{且}x\in B\}.$$

（3）并集：由所有属于集合A或属于集合B的元素所组成的集合，叫做A与B的并集，记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x|x\in A\text{或}x\in B\}.$$

（4）全集：在研究集合与集合之间的关系时，如果所有集合都是某个给定集合的子集，那么这个给定的集合叫做全集，记作I。

（5）补集：已知全集I，$A\subseteq I$，由I中所有不属于A的元素组成的集合，叫做集合A的补集，记作 $\overline{A}$，即

$$\overline{A}=\{x|x\in I\text{且}x\notin A\}.$$

（6）对于集合A与B，有

$A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap B=B\cap A$；

$$A\cup A=A,\quad A\cup\varnothing=A,\quad A\cup B=B\cup A;$$
$$A\cup\overline{A}=I,\quad A\cap\overline{A}=\varnothing,\quad \overline{\overline{A}}=A.$$

二、数系表

- 复数（$a+bi$）（a、$b\in R$）
  - 实数（$b=0$）
    - 有理数（分数）
      - 正有理数
      - 零
      - 负有理数
      - （以上为）循环小数（包括整数、有限小数）
    - 无理数
      - 正无理数
      - 负无理数
      - （以上为）无限不循环小数
    - （有理数与无理数合为）小数
  - 虚数（$b\neq0$）
    - 纯虚数（$a=0$）
    - 非纯虚数（$a\neq0$）

三、实数集的重要概念和性质

1．自然数集

（1）质数与合数：在自然数集里除了单位1以外，其它只能被1和本身整除的数叫做质数（或素数）；不但能被1和本身整除，还能被其它的数整除的数叫做合数。

注意：1既不是质数，也不是合数。

（2）互质数：当两个自然数的最大公约数是1时，这两个数叫做互质数。

2．整数集

（1）偶数：能被 2 整除的整数叫做偶数．偶数可表示为$2n$（$n\in Z$）．

（2）奇数：不能被 2 整除的整数叫做奇数．奇数可表示为$2n-1$或$2n+1$（$n\in Z$）．

（3）整数可按被某一整数p除所得的余数来分类：pn，$pn+1$，$pn+2$，……$pn+(p-1)$．例如某整数被 3 除，按余数可把原数分为三类，即$3k$，$3k+1$，$3k+2$或分为$3k-1$，$3k$，$3k+1$（$k\in Z$）．

3．实数集

（1）有理数与无理数：任何有理数都可以表示为$\frac{p}{q}$，其中p、$q\in Z$，且$q\neq 0$．

（2）数轴：规定了原点、正方向和长度单位的直线叫做数轴．

实数与数轴上的点一一对应．实数具有连续性．两个实数可以比较大小．

（3）实数的绝对值：$|a|$的几何意义是数轴上表示实数a的点到原点的距离．$|a|$是非负数．

$$|a|=\begin{cases}a,&（当a\geqslant 0时），\\-a,&（当a<0时）．\end{cases}$$

对于实数a和b，如果$a^2+b^2=0$或$a^2+|b|=0$或$|a|+|b|=0$，那么$a=b=0$．

（4）在实数集中，对于加、减、乘、除（除数不能为零）、乘方五种运算是封闭的．

四、充要条件

设A和B是两个有因果关系的事件，

1．若$A\Rightarrow B$，则A是B成立的充分条件；

2．若$B\Rightarrow A$，则A是B成立的必要条件；

3．若A既是B成立的充分条件，又是B成立的必要条件，则A是B成立的充要条件。

例1．设$I=\{x\mid |x|<6\ (x\in Z)\}$，A＝{小于6的质数}，B＝{不大于4的非负整数}，$C=\{x\mid x^2+3x-4<0\ (x\in Z)\}$．求：（1）$B\cap C$；（2）$\overline{B\cup C}$；（3）$(A\cup C)\cap B$。

解：$I=\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5,\}$，

$A=\{2, 3, 5\}$，

$B=\{0, 1, 2, 3, 4\}$，

$C=\{x\mid -4<x<1, x\in Z\}$

$=\{-3, -2, -1, 0\}$．

（1）$B\cap C=\{0\}$．

（2）$B\cup C=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$，

$\therefore\ \overline{B\cup C}=\{-5, -4, 5\}$．

（3）$A\cup C=\{-3, -2, -1, 0, 2, 3, 5\}$，

$\therefore\ (A\cup C)\cap B=\{0, 2, 3\}$．

说明：①注意1不是质数。②“不大于”等价于“小于

或等于”，同样，“不小于”等价于“大于或等于”。③非负整数集包含零在内。④集合$\{0\}$是以数0为元素的集合，它不同于空集$\varnothing$，后者不含有任何元素。

例2. 已知集合

$A=\{2, 4, a^3-2a^2-a+7\ (a\in R)\}$

$B=\{-4, a+3, a^2-2a+2, a^3+a^2+3a+7\ (a\in R)\}$.

若交集$A\cap B=\{2, 5\}$，试求实数a的值，并求此时的并集$A\cup B$.

解： 由$A\cap B=\{2, 5\}$及集合A的组成知

$$a^3-2a^2-a+7=5,$$

即 $(a+1)(a-1)(a-2)=0$，

$\therefore\ a_1=-1, a_2=1, a_3=2$.

当$a_1=-1$时，$B=\{-4, 2, -5, 4\}$ ①

当$a_2=1$时，$B=\{-4, 4, 1, 12\}$ ②

当$a_3=2$时，$B=\{-4, 5, 2, 25\}$ ③

其中①、②与$A\cap B=\{2, 5\}$矛盾，应舍去。③符合题意。

$\therefore\ a=2$.

此时 $A=\{2, 4, 5\}$，$B=\{-4, 5, 2, 25\}$。

$\therefore\ A\cup B=\{-4, 2, 4, 5, 25\}$.

例3. 已知集合A与B，全集为I。

求证：(1) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$；(2) $\varnothing\cap A=\varnothing$。

证明： (1) 设$x\in\overline{A\cup B}$，则$x\notin A\cup B$.

$\therefore\ x\notin A$且$x\notin B$,

即 $x\in\overline{A}$且$x\in\overline{B}$,

$\therefore\ x\in\overline{A}\cap\overline{B}$,

$\therefore\ \overline{A\cup B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}$.

反之，设 $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$，则 $x\in\overline{A}$ 且 $x\in\overline{B}$。

$\therefore\ x\notin A$ 且 $x\notin B$，

即 $x\notin A\cup B$.

$\therefore\ x\in\overline{A\cup B}$，

$\therefore\ \overline{A}\cap\overline{B}\subseteq\overline{A\cup B}$.

故 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

（2）用反证法．假设有一元素 $a\in\varnothing\cap A$，则必有 $a\in\varnothing$ 且 $a\in A$，这显然与 $\varnothing$ 中不含任何元素矛盾。

$\therefore\ \varnothing\cap A$ 没有任何元素，即 $\varnothing\cap A$ 为空集。

故 $\varnothing\cap A=\varnothing$.

说明：①当 $x\in A$ 且 $x\in B$ 时有 $x\in A\cap B$，但当 $x\notin A$ 且 $x\notin B$ 时则有 $x\notin A\cup B$，而不是 $x\notin A\cap B$，这点必须注意。

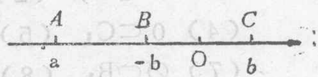
②证两个集合相等，一般根据定义证左边 $\subseteq$ 右边及右边 $\subseteq$ 左边。

③反证法是间接证法的一种，对于一些直接证明有困难的题，往往采用这种证明方法。

例4．如图1—1，实数 a，$-b$，b 分别对应于数轴上A，B，C三点，试化简：

$|a-b|+|a|-|b|+|a+b|$.

解：由数轴上A，B，C三点的位置知：



$a<0$，$b>0$，$|b|=|-b|<|a|$.

图1—1

$\therefore\ a-b<0$，$a+b<0$.

故 $|a-b|+|a|-|b|+|a+b|$

$=(b-a)-a-b-(a+b)=-3a-b$.

例5． 设有条件A、B、C、D，已知A是B的充分条件，B是C的必要条件，C是D的必要条件，D是B的必要条件．此时，（1）A是D的什么条件？（2）B是D的什么条件？

解： ∵ A是B的充分条件，

∴ $A\Rightarrow B$ ①

同理，由题设得

$C\Rightarrow B$ ②

$D\Rightarrow C$ ③

$B\Rightarrow D$ ④

（1）由①④，$A\Rightarrow D$成立，

∴ A是D的充分条件．

（2）由③②，$D\Rightarrow B$成立，

又由④，$B\Longleftrightarrow D$成立．

∴ B是D的充要条件．

练　习　一

1．设 $I=\{0,1,2,3,4,5\}$，$A=\{0,1,2,3\}$，$B=\{1,2,3\}$，$C=\{0\}$．

指出下列式子是否正确，不正确的加以改正．

（1）$0\in A$；（2）$\{0\}\in A$；（3）$\{0\}\subset A$；

（4）$0\subset C$；（5）$B\subset A$；（6）$\varnothing\in A$；

（7）$\varnothing\subset B$；（8）$\varnothing=C$；（9）$A\in B$；

（10）$C\subset\overline{B}$；（11）$A\cup B=A$；（12）$A\cap B=C$．

2．设 $I=$｛绝对值不大于4的整数｝，$A=\{0\}$，$B=\{2,3,4\}$，$C=$｛小于3的非负整数｝，求$A\cap C$，$B\cup C$，$\overline{A\cup B}\cap C$．

3. 已知 $I=R$，$A=\{x|x^2-x-12<0\}$，$B=\{x|x^2-4x-5>0\}$，$C=\{x||x|\leqslant 4\}$。求：

（1）$A\cap B$；（2）$A\cup B$；（3）$A\cap C$；

（4）$\overline{A\cap C}$；（5）$B\cap C$；（6）$(B\cap C)\cup A$。

4. 已知 $I=$｛任意三角形｝，$A=$｛等腰三角形｝，$B=$｛直角三角形｝，$C=$｛等边三角形｝。求：

（1）$A\cap B$；（2）$A\cap C$；（3）$B\cap C$；

（4）$A\cup C$；（5）$\overline{A}$；（6）$\overline{B}\cap C$。

5. 已知：$I=\{(x,y)|x\in R, y\in R\}$，$A=\{(x,y)|x^2+y^2<4\}$，$B=\{(x,y)|x+y>-2\}$。用图象表示集合：（1）$A\cup B$；（2）$A\cap\overline{B}$。

6. 集合A有8个元素，求A的所有子集的个数。

7. 指出下列集合间的包含关系，并作图示：

$A=\{(x,y)||x|+|y|<1\}$，

$B=\{(x,y)||x|\leqslant 1, |y|\leqslant 1\}$，

$C=\{(x,y)|x^2+y^2<1\}$。

8. 证明：如果$A\subseteq B$，则对任意集合C都有$A\cup C\subseteq B\cup C$，$A\cap C\subseteq B\cap C$。

9. 试证：（1）$A\cup B=B\cup A$；（2）$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$。

10. 已知a、b、c都是实数，求满足下式的a、b、c值：

$$a^2+b^2+c^2+26=2a+6b+8c.$$

11. 已知x、y是有理数，且$(x-y\sqrt{2})^2=9-4\sqrt{2}$，试求x和y的值。

12. 证明：若一个自然数m的平方能被3整除，则这个自然数也一定能被3整除。

13. 证明实数$\sqrt{3}$和$\log_2 5$都是无理数。

14. 求证：不论x、y是什么实数，$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x+y}$都不能