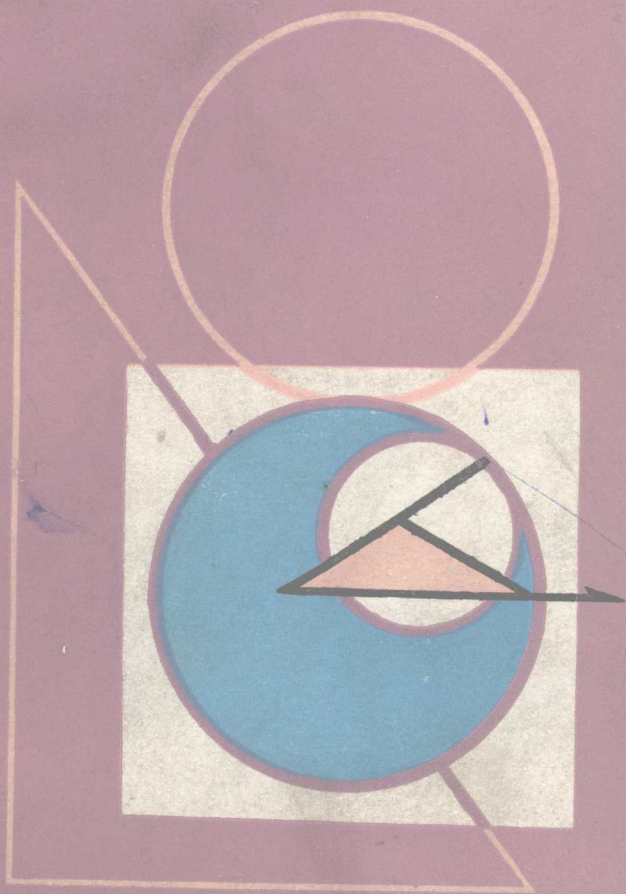


高中数学基础知识和例题



广西人民出版社

高中数学 基础知识和例题

广西教育学院教研部主编

广西人民出版社

高中数学基础 知识例题与习题

广西教育学院数学教研室编

高中数学基础知识和例题

广西教育学院教研部主编

☆

广西人民出版社出版

(南宁市河堤路14号)

广西新华书店发行 广西民族语文印刷厂印刷

*

开本787×1092 1/32 17.75印张 393千字

1986年12月第1版 1986年12月第1次印刷

印数1—15,000册

书号: 7113·715 定价: 2.70元

说 明

为了帮助高中学生和社会青年系统学习高中数学基础知识，掌握高中数学的思维方法和解题的技能技巧，提高分析问题和解决问题的能力，我部组织一些有经验的中学老师编写了这本书。

本书是根据《高中数学教学纲要》及新的统编教材编写的，全书按知识系统分代数、平面三角、立体几何、解析几何、导数和微分初步五篇，篇下设章，每章包括基础知识提要、典型例题和练习题三部分内容。书末附有较详细的习题参考答案或提示。

本书可作为高中学生和社会青年学习高中数学的参考书，也可作为教师组织高中数学总复习的教学参考书。

参加本书编写的有：第一篇，廖永康、覃寿融、陈矿初；第二篇，涂军训；第三篇，苏锡鸢；第四篇，曹德荣；第五篇，陈矿初、廖永康。全书由我部朱长雄同志统审。

由于水平有限，本书难免有错误与不妥之处，欢迎读者不吝指正。

广西教育学院教研部

1986年4月

目 录

第一篇 代 数

第一章 集合与数	(1)
一、集合	(1)
二、数系表	(3)
三、实数集的重要概念和性质	(3)
四、充要条件	(5)
第二章 式	(29)
一、代数式	(29)
二、指数与对数	(32)
第三章 方程与方程组	(51)
一、方程的分类	(51)
二、一元方程	(51)
三、分式方程	(62)
四、无理方程	(64)
五、指数方程和对数方程	(68)
六、行列式和线性方程组	(76)
七、二元二次方程组	(82)
八、列方程解应用题	(87)
第四章 不等式	(98)
一、不等式的概念	(98)
二、不等式的性质	(99)

三、不等式(组)的解法	(100)
四、不等式的证明	(112)
第五章 函数	(129)
一、函数的概念	(129)
二、函数的主要性质	(130)
三、函数的图象	(131)
四、正比例函数、反比例函数和一次函数	(132)
五、二次函数	(132)
六、幂函数	(134)
七、指数函数和对数函数	(134)
第六章 排列与组合、数学归纳法与二项式定理	(162)
一、排列与组合	(162)
二、数学归纳法	(164)
三、二项式定理	(164)
第七章 数列	(188)
一、数列的概念	(188)
二、等比数列与等差数列	(189)
三、一般数列通项公式的求法	(203)
四、一般数列前 n 项和的求法	(209)

第二篇 平面三角

第一章 三角函数	(220)
一、角的概念	(220)
二、三角函数	(224)
第二章 三角函数的恒等变形	(241)
第三章 反三角函数和三角方程	(257)

一、反三角函数的定义	(257)
二、三角方程	(260)
第四章 解三角形	(278)
一、解直角三角形的主要依据	(278)
二、解斜三角形的主要依据	(278)

第三篇 立体几何

第一章 直线和平面	(287)
一、平面	(287)
二、直线、平面的位置关系	(287)
三、直线、平面位置关系的判定	(288)
四、其他定理	(290)
五、关于角的概念	(291)
六、关于距离的概念	(292)
第二章 多面体和旋转体	(306)
一、棱柱有关概念	(306)
二、柱、锥、台、球的性质及面积、体积计算 公式	(306)

第四篇 平面解析几何

第一章 直线	(328)
一、平面直角坐标系	(328)
二、基本公式	(328)
三、曲线与方程	(329)
四、直线	(331)

第二章 二次曲线..... (343)

一、圆..... (343)

二、椭圆..... (351)

三、双曲线..... (356)

四、抛物线..... (363)

五、圆锥曲线的切线和法线..... (370)

六、坐标轴的平移..... (375)

第三章 标坐标和参数方程..... (390)

一、极坐标..... (390)

二、参数方程..... (400)

(478).....

(888).....

(008).....

第五篇 导数和微分初步

第一章 数列的极限..... (424)

第二章 函数的极限..... (431)

第三章 导数与微分的概念及求导方法..... (437)

第四章 导数与微分的应用..... (447)

(808).....

(808).....

练习和习题的参考答案与提示

第一篇 代数..... (462)

第二篇 平面三角..... (508)

第三篇 立体几何..... (520)

第四篇 平面解析几何..... (527)

第五篇 导数和微分初步..... (551)

(638).....

(188).....

第一篇 代 数

第一章 集合与数

一、集 合

1. 集合的概念与表示法

(1) 集合与元素：把具有某种属性的一些对象看做一个整体便形成一个集合。集合里的各个对象叫做这个集合的元素。

(2) 集合元素的构成具有确定性和互异性。

确定性：对于一个给定的集合，集合中的元素是确定的。对任一对象都能确定是否是这个集合的元素。

互异性：对于一个给定的集合，集合中的元素是互相不同的。在同一集合中，不能重复出现同一元素。

(3) 集合的表示法：

①列举法：把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内。

②描述法：把集合中的元素的公共属性描述出来，写在大括号内。

③如果 a 是集合 A 的元素，记作 $a \in A$ ；如果 a 不是集合 A 的元素，记作 $a \notin A$ 。

④常用数集的符号：正整数（自然数）集— N ；整数集— Z ；有理数集— Q ；实数集— R ；复数集— C 。

2. 集合与集合间的关系

(1) 子集：①如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，那么集合 A 叫做集合 B 的子集，记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$ 。任一集合是它本身的子集，即 $A \subseteq A$ 。

②如果 A 是 B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不属于 A ，那么集合 A 叫做集合 B 的真子集，记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$ 。

③如果 $A \subseteq B$ ，同时 $B \subseteq A$ ，那么集合 A 和集合 B 叫做相等，记作 $A = B$ 。

④不含任何元素的集合叫做空集，记作 $\emptyset$ 。空集是任何集合的子集。

(2) 交集：由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的交集，记作 $A \cap B$ ，即

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

(3) 并集：由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的并集，记作 $A \cup B$ ，即

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

(4) 全集：在研究集合与集合之间的关系时，如果所有集合都是某个给定集合的子集，那么这个给定的集合叫做全集，记作 I 。

(5) 补集：已知全集 I ， $A \subseteq I$ ，由 I 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做集合 A 的补集，记作 $\bar{A}$ ，即

$$\bar{A} = \{x | x \in I \text{ 且 } x \notin A\}.$$

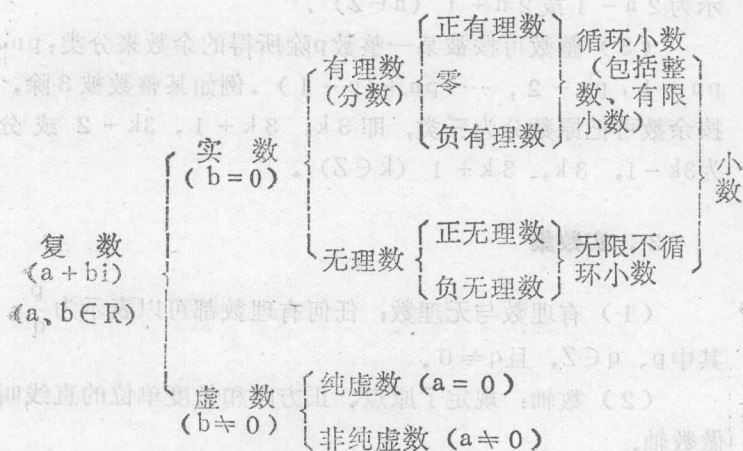
(6) 对于集合 A 与 B ，有

$$A \cap A = A, A \cap \emptyset = \emptyset, A \cap B = B \cap A;$$

$$A \cup A = A, A \cup \emptyset = A, A \cup B = B \cup A;$$

$$A \cup \bar{A} = I, A \cap \bar{A} = \emptyset, \bar{\bar{A}} = A.$$

二、数系表



三、实数集的重要概念和性质

1. 自然数集

(1) 质数与合数：在自然数集里除了单位1以外，其它只能被1和本身整除的数叫做质数（或素数）；不但能被1和本身整除，还能被其它的数整除的数叫做合数。

注意：1既不是质数，也不是合数。

(2) 互质数：当两个自然数的最大公约数是1时，这两个数叫做互质数。

2. 整数集

(1) 偶数：能被2整除的整数叫做偶数。偶数可表示为 $2n$ ($n \in \mathbb{Z}$)。

(2) 奇数：不能被2整除的整数叫做奇数。奇数可表示为 $2n-1$ 或 $2n+1$ ($n \in \mathbb{Z}$)。

(3) 整数可按被某一整数 p 除所得的余数来分类： pn , $pn+1$, $pn+2$, $\dots$, $pn+(p-1)$ 。例如某整数被3除，按余数可把原数分为三类，即 $3k$, $3k+1$, $3k+2$ 或分为 $3k-1$, $3k$, $3k+1$ ($k \in \mathbb{Z}$)。 ($0=0$)

3. 实数集

(1) 有理数与无理数：任何有理数都可以表示为 $\frac{p}{q}$ ，其中 $p, q \in \mathbb{Z}$ ，且 $q \neq 0$ 。

(2) 数轴：规定了原点、正方向和长度单位的直线叫做数轴。

实数与数轴上的点一一对应。实数具有连续性。两个实数可以比较大小。

(3) 实数的绝对值： $|a|$ 的几何意义是数轴上表示实数 a 的点到原点的距离。 $|a|$ 是非负数。

$$|a| = \begin{cases} a, & (\text{当 } a \geq 0 \text{ 时}), \\ -a, & (\text{当 } a < 0 \text{ 时}). \end{cases}$$

对于实数 a 和 b ，如果 $a^2 + b^2 = 0$ 或 $a^2 + |b| = 0$ 或 $|a| + |b| = 0$ ，那么 $a = b = 0$ 。

(4) 在实数集中，对于加、减、乘、除（除数不能为零）、乘方五种运算是封闭的。

四、充要条件

设A和B是两个有因果关系的事件,

1. 若 $A \Rightarrow B$, 则A是B成立的充分条件;
2. 若 $B \Rightarrow A$, 则A是B成立的必要条件;
3. 若A既是B成立的充分条件, 又是B成立的必要条件, 则A是B成立的充要条件.

例1. 设 $I = \{x \mid |x| < 6 \ (x \in \mathbb{Z})\}$, $A = \{\text{小于6的质数}\}$, $B = \{\text{不大于4的非负整数}\}$, $C = \{x \mid x^2 + 3x - 4 < 0 \ (x \in \mathbb{Z})\}$. 求: (1) $B \cap C$; (2) $\overline{B \cup C}$; (3) $(A \cup C) \cap B$.

解: $I = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \}$,

$A = \{2, 3, 5\}$,

$B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$,

$C = \{x \mid -4 < x < 1, x \in \mathbb{Z}\}$

$= \{-3, -2, -1, 0\}$.

(1) $B \cap C = \{0\}$.

(2) $B \cup C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$,

$\therefore \overline{B \cup C} = \{-5, -4, 5\}$.

(3) $A \cup C = \{-3, -2, -1, 0, 2, 3, 5\}$,

$\therefore (A \cup C) \cap B = \{0, 2, 3\}$.

说明: ①注意1不是质数. ②“不大于”等价于“小于

或等于”，同样，“不小于”等价于“大于或等于”。③非负整数集包含零在内。④集合 $\{0\}$ 是以数0为元素的集合，它不同于空集 $\emptyset$ ，后者不含有任何元素。

例2. 已知集合

$$A = \{2, 4, a^3 - 2a^2 - a + 7 \mid (a \in \mathbb{R})\}$$

$$B = \{-4, a+3, a^2 - 2a + 2, a^3 + a^2 + 3a + 7 \mid (a \in \mathbb{R})\}.$$

若交集 $A \cap B = \{2, 5\}$ ，试求实数 a 的值，并求此时的并集 $A \cup B$ 。

解：由 $A \cap B = \{2, 5\}$ 及集合 A 的组成知

$$a^3 - 2a^2 - a + 7 = 5,$$

$$\text{即 } (a+1)(a-1)(a-2) = 0,$$

$$\therefore a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = 2.$$

$$\text{当 } a_1 = -1 \text{ 时, } B = \{-4, 2, 5, 4\} \quad \textcircled{1}$$

$$\text{当 } a_2 = 1 \text{ 时, } B = \{-4, 4, 1, 12\} \quad \textcircled{2}$$

$$\text{当 } a_3 = 2 \text{ 时, } B = \{-4, 5, 2, 25\} \quad \textcircled{3}$$

其中①、②与 $A \cap B = \{2, 5\}$ 矛盾，应舍去。③符合题意。

$$\therefore a = 2.$$

$$\text{此时 } A = \{2, 4, 5\}, B = \{-4, 5, 2, 25\}.$$

$$\therefore A \cup B = \{-4, 2, 4, 5, 25\}.$$

***例3.** 已知集合 A 与 B ，全集为 I 。

求证：(1) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ ；(2) $\emptyset \cap A = \emptyset$ 。

证明：(1) 设 $x \in \overline{A \cup B}$ ，则 $x \notin A \cup B$ 。

$$\therefore x \notin A \text{ 且 } x \notin B,$$

$$\text{即 } x \in \overline{A} \text{ 且 } x \in \overline{B},$$

$$\therefore x \in \overline{A} \cap \overline{B},$$

$$\therefore \overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}.$$

反之, 设 $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, 则 $x \in \overline{A}$ 且 $x \in \overline{B}$.

$$\therefore x \notin A \text{ 且 } x \notin B,$$

$$\text{即 } x \notin A \cup B.$$

$$\therefore x \in \overline{A \cup B},$$

$$\therefore \overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}.$$

$$\text{故 } \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

(2) 用反证法. 假设有一元素 $a \in \emptyset \cap A$, 则必有 $a \in \emptyset$ 且 $a \in A$, 这显然与 $\emptyset$ 中不含任何元素矛盾.

$\therefore \emptyset \cap A$ 没有任何元素, 即 $\emptyset \cap A$ 为空集.

故 $\emptyset \cap A = \emptyset$.

说明: ① 当 $x \in A$ 且 $x \in B$ 时有 $x \in A \cap B$, 但当 $x \notin A$ 且 $x \notin B$ 时则有 $x \notin A \cup B$, 而不是 $x \notin A \cap B$, 这点必须注意.

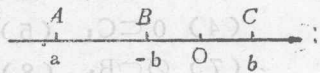
② 证两个集合相等, 一般根据定义证左边 $\subseteq$ 右边及右边 $\subseteq$ 左边.

③ 反证法是间接证法的一种, 对于一些直接证明有困难的题, 往往采用这种证明方法.

例 4. 如图 1—1, 实数 $a, -b, b$ 分别对应于数轴上 A, B, C 三点, 试化简:

$$|a-b| + |a| - |b| + |a+b|.$$

解: 由数轴上 A, B, C 三点的位置知:



$$a < 0, b > 0, |b| = |-b| < |a|. \quad \text{图 1—1}$$

$$\therefore a-b < 0, a+b < 0.$$

$$\text{故 } |a-b| + |a| - |b| + |a+b|$$

$$= (b-a) - a - b - (a+b) = -3a - b.$$

例5. 设有条件A、B、C、D, 已知A是B的充分条件, B是C的必要条件, C是D的必要条件, D是B的必要条件. 此时, (1) A是D的什么条件? (2) B是D的什么条件?

解: $\because$ A是B的充分条件,

$$\therefore A \Rightarrow B \quad ①$$

同理, 由题设得

$$C \Rightarrow B \quad ②$$

$$D \Rightarrow C \quad ③$$

$$B \Rightarrow D \quad ④$$

(1) 由①④, $A \Rightarrow D$ 成立,

$\therefore$ A是D的充分条件.

(2) 由③②, $D \Rightarrow B$ 成立,

又由④, $B \Leftrightarrow D$ 成立.

$\therefore$ B是D的充要条件.

练习一

1. 设 $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{0\}$.

指出下列式子是否正确, 不正确的加以改正.

$$(1) 0 \in A; (2) \{0\} \in A; (3) \{0\} \subset A;$$

$$(4) 0 \subset C; (5) B \subset A; (6) \emptyset \in A;$$

$$(7) \emptyset \subset B; (8) \emptyset = C; (9) \overline{A} \in \overline{B};$$

$$(10) C \subset \overline{B}; (11) A \cup B = A; (12) A \cap B = C.$$

2. 设 $I = \{\text{绝对值不大于4的整数}\}$, $A = \{0\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{\text{小于3的非负整数}\}$, 求 $A \cap C$, $B \cup C$, $\overline{A \cup B} \cap C$.

3. 已知 $I = R$, $A = \{x | x^2 - x - 12 < 0\}$, $B = \{x | x^2 - 4x - 5 > 0\}$, $C = \{x | |x| \leq 4\}$. 求:

- (1) $A \cap B$; (2) $A \cup B$; (3) $A \cap C$;
(4) $\overline{A \cap C}$; (5) $B \cap C$; (6) $(B \cap C) \cup A$.

4. 已知 $I = \{\text{任意三角形}\}$, $A = \{\text{等腰三角形}\}$, $B = \{\text{直角三角形}\}$, $C = \{\text{等边三角形}\}$. 求:

- (1) $A \cap B$; (2) $A \cap C$; (3) $B \cap C$;
(4) $A \cup C$; (5) $\overline{A}$; (6) $\overline{B \cap C}$.

5. 已知: $I = \{(x, y) | x \in R, y \in R\}$, $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 4\}$, $B = \{(x, y) | x + y > -2\}$. (用图象表示集合: (1) $A \cup B$; (2) $A \cap \overline{B}$).

6. 集合 A 有 8 个元素, 求 A 的所有子集的个数.

7. 指出下列集合间的包含关系, 并作图示:

$$A = \{(x, y) | |x| + |y| < 1\},$$

$$B = \{(x, y) | |x| \leq 1, |y| \leq 1\},$$

$$C = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}.$$

8. 证明: 如果 $A \subseteq B$, 则对任意集合 C 都有 $A \cup C \subseteq B \cup C$, $A \cap C \subseteq B \cap C$.

9. 试证: (1) $A \cup B = B \cup A$; (2) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

10. 已知 a, b, c 都是实数, 求满足下式的 a, b, c 值:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 26 = 2a + 6b + 8c.$$

11. 已知 x, y 是有理数, 且 $(x - y\sqrt{2})^2 = 9 - 4\sqrt{2}$, 试求 x 和 y 的值.

12. 证明: 若一个自然数 m 的平方能被 3 整除, 则这个自然数也一定能被 3 整除.

13. 证明实数 $\sqrt{3}$ 和 $\log_2 5$ 都是无理数.

14. 求证: 不论 x, y 是什么实数, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x+y}$ 都不能