

孙名符 郑素琴 王 晔 著
孙杰远 董小平

数学教育学原理

科学出版社

内 容 简 介

本书是作者多年从事数学教育工作的经验总结，也是作者多年从事数学教育工作的经验总结。

数学教育学原理

本书是作者多年从事数学教育工作的经验总结，也是作者多年从事数学教育工作的经验总结。

孙名符 郑素琴 王 晔 著
孙杰远 董小平

科学出版社

1996

内 容 简 介

本书的主要内容包括数学教育学研究的对象、特征和方法；数学教育学的理论基础；数学教育的价值论与目标论；数学教育的评价；数学思维、方法及数学史与数学教育学的关系等。

本书可供高等师范院校有关专业的师生选用，也可供广大的中学数学教师阅读和参考。

数学教育学原理

孙名符 郑素琴 王 晔 著
孙杰远 董小平

责任编辑 林 鹏 刘嘉善

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

新蕾印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1996年11月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1996年11月第一次印刷 印张：9 %

印数：1—15 00 字数：251 000

ISBN 7-03-005426-1/O · 867

定价：21.00 元

前言

数学教育学是一门涉及数学、教育学、思维科学等有关内容的新兴交叉学科，也是师范院校数学专业的新建重点学科之一。

近几十年来，国际上关于数学教育理论的基础研究方兴未艾。国际数学教育委员会（ICMI）组织的四年一次的国际数学教育大会（ICME）不断提出新的研究课题并进行交流，促使数学教育研究逐渐形成了一系列学术研究方向，其自身发展的规律性逐步被揭示。目前，国际数学教育委员会的三个官方组织：数学教育心理学国际研究组（PME）、教学史和数学教育方法国际研究组（HPM）和数学教育与妇女国际研究组（IOWME）专门研究的成果正不断被介绍到国内，并产生了很大影响。

当今国内的数学教育研究蓬勃发展。国内的两个学术组织：中国高教学会高师数学教育研究会和中国教育学会数学教学研究会组织的专题研究和讨论，以及数学教育界的同仁的不懈的努力，使得我国数学教育理论研究的水平日益提高，逐步形成理论体系并走向世界。

但是，数学教育学目前尚处于理论建设和教学实验阶段。该学科的体系究竟应该怎样，也尚无定论。摆在我们面前的这本《数学教育学原理》，只是我们近年来对该学科理论基础研究和教学实验的阶段性总结。希望该书能为我国数学教育研究增砖添瓦。

本书是我们继《数学教学系统方法概论》、《数学思维与数学方法论》、《数学、逻辑与教育》、《从高等数学看中学数学》之后，研究数学教育理论基础的一本新作。它的主要特点：一是用现代系统方法论的观点和方法，尽量做到数学特征、数学思维特征和教育特征三者能相互渗透、相互为用、相互促进，并构成一个有机的统一体；二是尽量体现观点新、针对性强、既有理论性又有

实践性。它的主要内容有：数学教育学研究的对象、特征和方法、数学教育学的理论基础、数学教育价值论、数学教育目标论、数学教育评价、数学思维、数学方法及数学史与数学教育学的关系等。

本书由孙名符负责整体设计和统稿工作，撰写具体分工是：绪论、第一、四、九章由孙名符撰写，第七章由郑素琴撰写，第十章由王晔撰写，第二、三、六章由孙杰远撰写，第五、八章由董小平撰写。

本书初稿由西北师范大学王仲春教授自始至终进行了全面审查，并提出宝贵的修改意见和建议。北京师范大学教授钟善基先生在百忙中为本书修改做了许多有益的工作。本书在整个编写过程中，曾得到甘肃省教委有关领导和西北师范大学、天水师专、兰州师专、甘肃省教育学院等校的支持，并得到科学出版社的大力协助，在此一并表示衷心的感谢。

本书可供数学教育工作者及研究生使用，也可作为高师院校数学教育课程选用。

本书是我们在理论研究和教学实验中的一些成果的基础上，并结合数学教学论硕士研究生及本、专科学生的“数学教育学”课程的内容编写而成的。由于作者学识水平所限，且对数学教育学原理的研究尚很肤浅，阐述不妥甚至谬误之处恳请广大读者指正。

编者

一九九五年十二月

目 录

前言	i
绪论 数学教育学的对象和方法	1
§1 数学教育学的研究对象	1
§2 数学教育学研究的方法	11
第一章 现代数学教育的特征与意义	19
§1 现代数学教育的特征	19
§2 数学教育的功能	38
第二章 数学教育学的理论基础	51
§1 数学教育学的认识论基础	51
§2 数学教育学的方法论基础	56
§3 数学教育学的教育理论基础	62
§4 数学教育学的心理学基础	65
第三章 科学的数学与学科的数学	67
§1 科学的数学概述	67
§2 作为教学科目的数学概述	68
§3 学科的数学与科学的数学的相互作用	69
第四章 现代数学教育的目标	71
§1 现代数学教育目标概述	71
§2 数学教育中德育的目标及其实现	85
§3 数学教育中智育的目标及其实现	99
§4 数学教育中美育的目标及其实现	112
第五章 数学学习的心理分析	130
§1 数学学习与数学认知结构	130
§2 数学学习的认知过程	137
§3 数学能力的发展与数学学习	148
§4 数学学习的非认知因素	155
第六章 数学思维与数学学习心理	164

§1	数学思维的心理分析	164
§2	数学思维的基本形式	169
§3	数学思维与数学学习	172
第七章	数学方法及其教育功能	176
§1	数学中的逻辑推理方法及其特征分析	176
§2	几种常用数学方法及其特征分析	183
§3	数学方法的教育功能	195
第八章	数学课程的设计与改革	205
§1	数学课程的设计	205
§2	数学课程改革的几个问题	215
第九章	数学教学的系统分析	223
§1	数学教学系统概述	223
§2	数学教学的原则与方法	244
§3	数学教学的特殊过程	259
第十章	数学教育评价原理	270
§1	数学教育评价的理论依据	270
§2	数学教育评价的指标体系	277
§3	数学教育评价的方法	287
参考文献		298

绪 论

数学教育学的对象和方法

§ 1 数学教育学的对象

一门既研究数学规律，又研究教育规律的学科——数学教育学正在兴起。以下在概括比较了国内外数学教育学学科体系研究的基础上，就该学科研究的对象究竟是什么的问题，谈几点认识。

§ 1.1 数学教育学的几种模式

关于数学教育学的对象，目前国内外学者争议很多，尚未统一认识。主要有下述几种理论模式。

1. 教学中心说

这是以教学职能为中心研究数学教学的理论模式。这种模式以教学的一般规律为主线，结合数学教材教法建立数学教育学的理论体系。其研究对象主要是数学教学中的一些基本问题，如教学目的、内容、原则、方法、组织形式及数学各科的教材教法问题。四五十年代前苏联伯拉基斯 (В. М. Врадис)、李亚平 (Ляпин) 的《数学教学法》即为这种模式的代表作。

以这种模式建立的数学教育学在培养中小学教师中起到了一定的作用。我国解放以来搬用了这一模式。在十年动乱之后也参考它，一面进行数学教材教法的教研活动，一面使之逐步改造，发展成为具有我国特色的理论学科——数学教学论。但是这种模式不仅范围比较狭窄，而且随着现代教学论的发展，如何利用教学论的前沿成果把它先改造发展为数学教学论尚在研究，更不用说数学教学论也只能做为数学教育学的基本理论之一，尚不能概全了。

2. 教学活动说

这是以学生思维活动为中心研究数学教学规律的理论模式。这种模式认为数学教育学的对象是数学教学，所谓数学教学就是数学思维活动的教学，主张按数学思维的规律进行教学，并以此为主线建立数学教育学的理论体系。70年代前苏联斯托利亚尔(A. A. Столяр)所著的《数学教育学》即为这一模式的代表作，该书从宏观上论述了数学的现代教法，突出了数学思维活动各方面的教学，另方面从微观上详述了学校教学中数学思想的形成和发展，并对一些最基本的数学概念、思想、方法进行具体分析，提出了教学参考方案。即每个课题都须按“经验材料的教学组织化”、“数学材料的逻辑组织化”和“理论的应用”三个阶段进行。这样，学生学到的、教师教的不再仅仅是数学知识（数学活动的结果），而是数学思维（数学活动的过程）。

这种理论模式比前一种模式有所改进，可以说是前苏联赞科夫(Л. В. Занков)“教学-发展”与美国布鲁纳(J. S. Bruner)“过程-结构”教学论思想的集中体现。它对于突出现代数学思想，改变数学教学与数学科学之间、数学教学与学生认知结构之间、教学理论与教学实际之间的脱节，建立数学教育学的新体系具有积极的作用。但是这种理论把数学活动的教学与数学知识的教学对立起来，只主张前一种教学观点，未免失之偏颇。同时，这一体系对数学思维活动的特点、规律及其与数学教学的关系等理论问题也未深入研究，因此这种理论尚待改进。

3. 三角形形式说

这是以数学课程、教师、学生为研究对象，以数学课程论、教学论、学习论为主线组建数学教育学体系的理论模式。近年来，欧美学者多持这种观点，其中杰出的代表是德国学者鲍尔斯菲德(H. Bauersfeld)与美国学者基尔恩(T. Kieren)。鲍尔斯菲德在第三届国际数学教育会议(ICME3-1976)上发表了“数学教育的

研究对象为课程、教学、学生”的观点。基尔恩则根据鲍尔斯菲德的见解，在一篇题为“数学教育研究——三角形”的文章中指出：数学教育有三个研究方向，即课程论、教学论与学习论。他把此三论比作三角形的三个顶点，分别对应于三种人，即课程设计者、教师、学生，从而提出了以此三论为主线建立数学教育学体系的总体设计。我国学者进一步提出了“数学教育学是以数学的课程论、教学论与学习论为主要对象的一门实践性很强的综合性理论学科”的观点。

基尔恩的数学教育三角形对于形成与发展数学教育学的理论体系具有指导意义。事实上，数学教育既要反映数学科学的规律，又要研究教育科学的规律。它主要涉及数学知识与方法——认识的客体，教师——学生认识活动的主导者与学生——认识的主体这些要素。因此把数学教育学的研究对象集中在数学课程论、教学论和学习论这三个方面是有道理的，也已广为国内外学者所接受。

但是，数学教育学毕竟是一门跨学科的学科，还应该突出数学学科的特点，研究数学方法、数学思维对人的教育作用。质言之，以此三论为主线立论，对于建立数学教学论的科学体系是比较全面的，而数学教学论则只突出反映了数学教育学的教学功能，是不能刻划出它的全貌的。因此，这种模式也有待研究改进。

除此三种主要的理论模式之外，国内外学者关于该学科对象的论著还很多。如日本学者横地清所著《数学教育学序说》，提出了数学教育研究的七个领域；国内学者也从不同侧面提出应把数学教育目标论、数学思维论、数学方法论、数学教育史、数学思想史、数学教师论等有关内容纳入该学科体系的主张，对于建立我国数学教育学理论均有借鉴之处，不再赘述。

§ 1.2 研究数学教育学理论的基本原则

人们对于数学教育学的理论虽然看法各异，但我们认为作为一门理论学科应该具有客观性、独立性、严谨性、系统性、先进

性、综合性、实用性、培养性等功能。因此,研究该学科体系应遵循以下基本原则。

1. 科学性原则

这是指研究该学科理论必须符合唯物辩证法的认识论原则,正确反映研究对象的客观规律,而不带任何主观随意性。主要体现在以下几点。

(1) 必须突出本学科的特点

数学教育学虽然属于教育学科,但它不同于一般教育学,它与教育学的关系从宏观看是局部与整体的关系。从微观看是属于不同层次。因此,我们研究该学科体系决不能照搬教育学的有关原理,加上数学例子完事,而应从它自身的对象出发,以其独特的方法将教育学的原理融汇到数学教育与教学中去,总结出自身的规律来,以指导数学教育实践。数学教育学也有别于语文教育学等其他学科教育学,这是由数学学科的特点所决定的。数学教育学应将“数学思维与数学方法论”作为重要内容进行研究,来突出学科特点。

数学思维对于数学教育的重要性是不言而喻的。数学思维的理论被公认应是数学教育的基础理论之一。关于数学思维的研究,例如,学生在学习数学的活动中思维的地位;“数学思维活动仅仅取决于数学本身,还是取决于个体自身的因素;数学教学是传授解决问题的思维经验,还是启迪学生开展思维活动,获得教育效益”;如何在数学教育过程中对学生进行有效的数学思维训练,等等,这些问题的研究对于完善学生的数学认知结构、形成与发展那些具有数学思维特点的智力活动结构、对开发学生的智能具有特殊的意义。数学方法论则是研究数学的发现、发明与创造法则和原理的学问,其中也包括对数学的发展规律与数学思维活动规律的研究。可以说,数学思维在相当程度上是数学方法论的研究课题。这样,把数学思维与数学方法论同学生学习数学的心理研

究有机地结合起来,并吸取斯托利亚尔“数学(思维)活动说”的合理因素,做为数学学习的基本理论,有利于突出本学科的特点,使之更加科学化。

(2) 必须以先进的理论与方法为指导

科学的数学教育理论,应该是现代数学思想与现代教育科学结合的产物,应该具备现代科学的特征。近年来,随着科学的进步,现代数学萌发出许多新的思想。现代教学论与思维科学进一步发展,促使各式各样崭新的教育理论相继涌现。这些都为我们以科学的数学思想、先进的教育理论分析数学教育中的问题提供了良好的条件,也给我们提出了许多新的研究课题。我们应该广泛吸取国内外优秀的理论成果与先进的实践经验,进行有效的探索与改革,来丰富该学科的理论。

因此,我们应在唯物辩证法原理的指导下,以一般科学研究方法如观察实验法、比较归纳法、分析综合法、抽象概括法等和教育科学研究方法如历史法、文献法、调查法、预测法等以及现代科学研究方法如系统科学方法、定量分析法等为中介去研究数学教育这个大系统中各子系统、各要素之间的联系,方可达到它的理论性要求,使我们寻求的规律更加客观。

2. 整体性原则

这是指该学科理论的建构必须将它的基本内容按相互间的内在联系组成一个统一的整体,其间主要的理论应该覆盖全面、突出重点、贯穿主线,各部分的组成应按内在的逻辑联系确定,整个结构应纲目清晰、成一系统。这同样是每门学科应遵守的基本原则,数学教育学也“绝不是分析一门学科如何传授,更重要的是要研究、分析如何把一门科学根据其发展的内在逻辑,结合学生的认识特点,符合教育的规律把它组织成为一门学科。”数学教育的整体性应体现在以下几点。

(1) 必须体现数学教育的整体功能

如前所述,现在关于数学教育学的研究对象、基本概念范畴与理论的争议还很多,对于它的内容如何选择、结构如何组织意见也不统一,但这又是建立本学科体系必须首先搞清的问题。我们认为,该学科应以数学教育与教学的规律为研究对象,它的理论体系应以教育为主线同时突出数学学科的特点来建构。因此,它的内容要从教育学的基本原理出发,从培养人的高度来选取,体现数学教育在培养人的整体工作中的地位与作用,应该把数学教育原理作为它的重要内容来研究。

教育是培养人的一种社会活动,数学教育也是其中的一部分。数学学科的价值,既有工具价值、文化价值,更重要的是育人价值。数学的育人,主要是通过知识教养、思想教育,特别是思维能力的培养,使人整体地、有条理地、合乎逻辑地、系统地发现和思考问题,以完善人的思维品质,增强人的思维意识和意志。这样,从“大教育”的高度研究数学教育的功能、目标、评价、测量等理论问题,是体现本学科整体性的一个重要方面。

(2) 必须注意本学科的综合性

数学教育学是一门综合性很强的学科,它不仅融合了数学与教育学的有关理论,还要综合运用逻辑学、心理学、社会学、教育测量与评价学以及计算机科学等相邻学科的理论。这与现代科学相互交叉为用的整体化趋势完全相符。值得注意的是,这里我们要做的是各学科基本理论观点的相互渗透与综合运用,而不是牵强地拿来照搬,编造出一些四不象的东西。这就需要我们仔细地研究这些相邻学科的理论及它们之间的关系,搞清边缘处的界限。由于科学的迅猛发展,数学教育学可以在一定发展阶段上建立一个逐步趋于完善的整体结构,而不可能有一个最终不变的模式。近年来,我国广大教研人员经过艰苦细致的劳动,已取得了许多研究成果,在此基础上,我们还应采取“分而治之”的方法,

逐个完善学科的理论。目前,关于数学思维与数学方法论、数学教学心理学、数学教学论的理论研究相对比较深入,还应深入研究数学教育原理、数学教育测量与评价学等理论,从整体上把握数学教育学的理论。

3. 教育性原则

这是指学科理论的建设必须理论联系实际,以正确的理论与方法指导数学教育与教学实践,并达到对各级各类数学教育人才的培养作用。

(1) 必须注重本学科的实用价值

数学教育学是一门实践性很强的理论学科。它不仅要给数学教育中的一些理论问题如数学教育的功能、目标、课程结构、学习原理、教学方法、测量与评价等给予系统、客观的回答,而且还必须能够解答数学教育实践中提出的各种具体问题,并从理论高度提出一套解决问题的方法。但是,数学教育学毕竟是一门学科交叉、结构复杂的理论学科,它的理论与方法多种多样,我们不可能给人以药方式的说教。因而从总体看,它的理论体系的组建应重视典型理论的搜集,启发人的思维,通过对典型问题的研究与解决来理解其理论与方法的真谛,而终不可包罗万象、面面俱到。

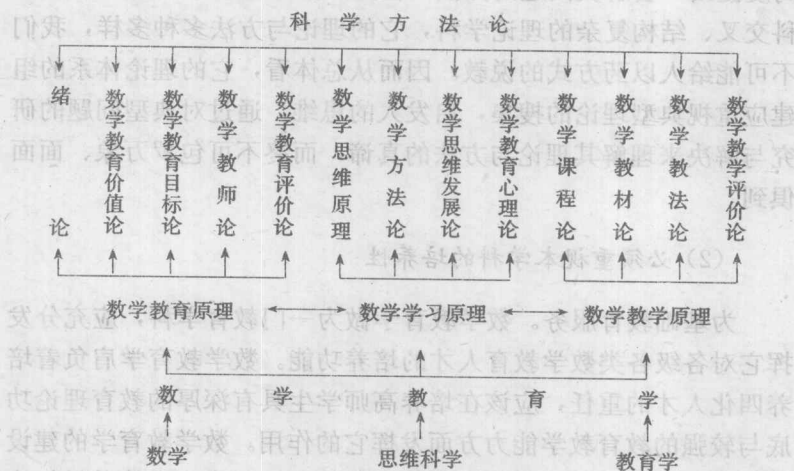
(2) 必须重视本学科的培养性

为基础教育服务。数学教育学做为一门教育学科,应充分发挥它对各级各类数学教育人才的培养功能。数学教育学肩负着培养四化人才的重任,应该在培养高师学生具有深厚的教育理论功底与较强的教育教学能力方面发挥它的作用。数学教育学的建设应结合我国国情,以普通数学教育学为主,以中小学培养目标为主要依据。我国普通教育的目标是把学生培养成德、智、体、美、劳育全面发展的“四有”新人,其中中学毕业生大多数要参加生

产建设。我国数学教育学科应立足于普教,提供大面积提高中小学数学教学质量的理论与方法,为开阔高师毕业生的视野、培养他们胜任数学教育工作、适应教育“三个面向”的要求打好必要的理论基础。切不可脱离我国国情,把目标定得过高,涉及面过宽,而起不到为普教服务的作用。

§ 1.3 数学教育学的整体框架

综上所述,数学教育学应是一门研究数学教育规律及其应用的学科。从学科性质来说,它属于教育科学。就其发展的领域而言,它属于边缘学科。它的发展,既要以一般教育学原理为指导,又要不断从数学科学领域中吸取营养。它的主要任务应是为普教服务,为培养各级数学教育人才服务。它的体系应以科学的方法论为指导,以数学为基础、教育为主线,综合邻近学科的有关理论,组建一个既有理论价值又有实践意义的完整体系。以下给出一个整体构想简图。



以上简图表示,数学教育学的理论基础为数学、教育学与思维科学,它们相互渗透、交叉。数学教育学的基本理论为数学教

育原理、数学学习原理和数学教学原理。

1. 数学教育原理

它主要指应该从本门学科的培养人的整体工作中的地位与作用出发立论,主要解决“为什么教”的问题。它的内容主要有:

(1) 绪论

主要研究数学教育学的对象、性质、任务、特点、内容、理论基础、学习意义和研究方法等问题。

(2) 数学教育价值论

主要研究数学与数学教育,数学教育与社会经济、科技、文化的发展,数学教育与儿童的成长等问题,当然要牵涉到社会学、人才学以及数学教育的纵向、横向比较等理论。

(3) 数学教育目标论

主要研究确立数学教育目标的理论依据,数学各科教育目标的确立,数学教育与德育、智育、美育等理论问题。

(4) 数学教师论

主要研究数学教师的职业道德、知识素养、能力结构,各级各类数学教育人才的要求以及教师进修等问题。

(5) 数学教育评价论

主要研究数学教育评价的概念、分类、评价的方法及意义等理论问题。

2. 数学学习原理

它主要指应该突出数学的特点,结合中小学生的思维特征研究他们学习数学的机理,解决“怎样学”与“为什么这样学”的

问题。主要包括：

(1) 数学思维原理

主要研究数学思维的一般原理，包括思维与数学思维的概念，数学思维的特征、成分与结构，数学思维过程与创造性数学思维等。

(2) 数学方法论

主要研究数学发展的规律、数学思想的形成与发展及数学创造与发现的法则。包括数学观与数学哲学思想，数学研究与发现方法，现代数学方法，数学逻辑思维方法，数学解题方法，数学方法与数学学习等问题，并涉及数学发展史与数学思想史的一些理论问题。

(3) 数学思维发展论

主要研究青少年思维发展的基本规律，包括数学思维发展与活动、表象、语言的关系，中小学生学习数学思维发展的水平与特点及思维品质的培养等问题。

(4) 数学教育心理理论，或称数学教育心理学概论

主要研究青少年学习的基本心理规律。包括学习与数学学习。数学的认知结构，数学学习过程，数学知识、技能的关系，国内外学习理论的研究与数学学习，中小学生学习能力的培养等理论问题。

3. 数学教学原理

它主要指应该以数学教学的理论与实践为基础立论，重点解决“教什么”与“如何教”的问题。主要内容有：