单调算子和非线性半群理论

与

Banach空间中的微分方程

〔分布参数系统控制理论讨论班〕

毕大川

1978年1月

中国科学院数学研究所控制理论研究室

目　录

§1. 凸函数及取极小问题

在应用中，有大易的问题归结为在某一凸集上求一凸泛函的极小问题。

在以后的讨论中，除非特别声明，一般以 X 记某一实Banach空间（以后简记成 B.S.），其共轭空间记成 X^*。在 X 中的强收敛记成"$\longrightarrow$"，弱收敛记成"$\rightharpoonup$"。

定义1.1 所谓定义于 X 上的真凸泛函，是指这样的泛函 $\varphi: X \to]-\infty, +\infty]$，$\varphi \not\equiv +\infty$，对 $\forall \lambda \in [0,1]$，$\forall x, y \in X$ 成立

$$\varphi((1-\lambda)x+\lambda y) \leq (1-\lambda)\varphi(x)+\lambda\varphi(y) \tag{1.1}$$

子集 $D(\varphi)=\{x \mid \in X,\ \varphi(x)<+\infty\}$ 称为 φ 的有效域。

定义1.2，泛函 $\varphi: X \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ 说它在 X 上是下半连续的（或弱下半连续）；是指它对 $\forall x \in X$ 有

$$\liminf_{y \to x} \varphi(y) \geq \varphi(x) \tag{1.2}$$

$$\left(\text{或} \liminf_{y \rightharpoonup x} \varphi(y) \geq \varphi(x)\right)$$

命题1.1，在局部凸空间 X 中的真凸泛函来说，下半连续与弱下半连续等价。

证明 若 φ 在某拓扑下下半连续，则对 $\forall x \in X$，$\varepsilon>0$，$\exists x$ 的该拓扑下的某邻域 $V_\varepsilon(x)$，使对 $\forall y \in V_\varepsilon(x)$ 有 $\varphi(y)>\varphi(x)-\varepsilon$。这个性质等价于下述性质：对 $\forall \lambda \in R^1$，集 $E_\lambda(\varphi)=\{y \mid \in X,\ \varphi(y) \leq \lambda\}$ 是闭集。事实

上，若φ在某拓扑下下半连续，$\xi\in\overline{E_\lambda(\varphi)}$，则必有$\varphi(\xi)\leq\lambda$。否则$\exists\,\varepsilon\in]0,\ \varphi(\xi)-\lambda[$，$\exists\,\xi$的邻域$V(\xi)$，当$x\in V(\xi)$时，$\varphi(x)>\varphi(\xi)-\varepsilon>\lambda$，从而$\xi\notin E_\lambda(\varphi)$。反之，对$\forall\,\varepsilon>0$，$x\in X$，因$E_{\varphi(x)-\varepsilon}(\varphi)$闭，若$x\notin E_{\varphi(x)-\varepsilon}(\varphi)$，故有$x$的某拓扑下的邻域$V_\varepsilon(x)$存在，$V_\varepsilon(x)\subset X\setminus E_{\varphi(x)-\varepsilon}(\varphi)$即$\varphi$下半连续。因为$\varphi$是真凸泛函，$E_\lambda(\varphi)$凸。由于局部凸空间中的凸集如闭$\Longleftrightarrow$弱闭，故$E_\lambda(\varphi)$若闭$\Longleftrightarrow$弱闭，即$\varphi$若下半连续$\Longleftrightarrow$弱下半连续。

命题1.2，φ是局部凸空间X上的真下半连续凸泛函，则φ被一个仿射函数所下界，即有$x^*\in X^*$，$\mu\in R^1$，使

$$\varphi(x)>\langle x,x^*\rangle+\mu,\quad\forall x\in X \tag{1.3}$$

证．集φ的上图记为

$$epi\{\varphi\}=\{[x,\lambda]\mid\in X\times R^1,\ \varphi(x)\leq\lambda\} \tag{1.4}$$

显然它是闭凸集。总有$x_0\in X$，$r\in R^1$，满足$\varphi(x_0)>r$。由于φ在X上下半连续，有x_0的凸邻域$V(x_0)$存在，使当$x\in V(x_0)$时，$\varphi(x)>r$。据凸集的分离定理，$\exists$闭超平面$H\subset X\times R^1$分开$epi.\{\varphi\}$与凸集$V(x_0)\times[$，H形如

$H=\{[x,\lambda]\mid\in X\times R^1,\ \langle x,x_0^*\rangle+\lambda=\alpha\}$其中$x_0^*\in X^*$，$\alpha\in R^1$，使得有

$$\langle x, x_0^* \rangle + \lambda \geqslant \alpha, \quad \text{当} [x, \lambda] \in epi\{\varphi\}$$

$$\langle x, x_0^* \rangle + \lambda \leqslant \alpha, \quad \text{当} [x, \lambda] \in V(x_0) \times]-\infty, r[,$$

特别 $[x, \varphi(x)] \in epi\{\varphi\}$

$$\varphi(x) \geqslant \langle x, -x_0^* \rangle + \alpha$$

取 $x^* = -x_0^*$，$\mu = \alpha$，则

$$\varphi(x) \geqslant \langle x, x^* \rangle + \alpha$$

命题 1.3，若 φ 是距离空间中的真凸下半连续泛函，则 φ 在 $D(\varphi)$ 的内点区连续。

证，若 $x_0 \in \overset{\circ}{D}(\varphi)$，往证 φ 于 x_0 连续。因 φ 是下半连续的，只须对某 $\lambda > 0$ 证明 $\{x | \in X, \varphi(x_0 + x) \leqslant \varphi(x_0) + \lambda\} = C_\lambda$ 是原点的邻域即可。事实上，因要证明对 $\forall \in]0, 1[$，集 $C_\varepsilon = \{y | \in X, \varphi(x_0 + y) \leqslant \varphi(x_0) + \varepsilon\}$ 是原点的邻域，不妨设 $\lambda > \varepsilon$，取 $\theta = \dfrac{\varepsilon}{\lambda} < 1$，则 $C_\varepsilon \supseteq \theta C_\lambda$。事实上，若 $z \in \theta C_\lambda$，则 $z = \theta y$，$\varphi(x_0 + y) \leqslant \varphi(x_0) + \lambda$，而

$$\begin{aligned}
\varphi(x_0 + z) &\leqslant \varphi(\theta(x_0 + y) + (1-\theta)x_0) \\
&\leqslant \theta\varphi(x_0 + y) + (1-\theta)\varphi(x_0) \\
&\leqslant \theta(\varphi(x_0) + \lambda) + (1-\theta)\varphi(x_0) \\
&= \varphi(x_0) + \varepsilon。
\end{aligned}$$

而 θC_λ 仍是该空间原点的邻域。取 $C = C_\lambda \cap \{x | \in X, \varphi(x_0 - x) \leqslant \varphi(x_0) + \lambda\}$，则 C 是闭平衡凸子集。因为 $x_0 \in D^\circ(\varphi)$，易

见 C 是吸收的。因距离空间中闭平衡吸收凸子集是原点的邻域，故 C 是原点的邻域，C_λ 是原点的邻域。

定义 1.3，在 X^* 中的函数 φ^*

$$\varphi^*(x^*)=\sup\{\langle x,\ x^*\rangle-\varphi(x)-\varphi(x)\mid x\in X\} \qquad (1.4)$$

称为 φ 的共轭。

命题 1.4，若 φ 是 X 上下半连续真凸函数，则其共轭 φ^* 是真凸和下半连续。

证．因 $\varphi\not\equiv+\infty$，有 $x_0\in D(\varphi)$，$\varphi(x_0)<+\infty$，$\varphi^*(x^*)\geq\langle x_0,x^*\rangle-\varphi(x_0)>-\infty$。由命题 1.2，$\exists\ y^*\in X^*$，$\lambda\in R^1$，$\varphi(x)>\langle x,y^*\rangle+\lambda$，$-\lambda>\langle x,y^*\rangle-\varphi(x)$，即 $\varphi^*(y^*)<-\lambda<+\infty$，即 $\varphi^*\not\equiv+\infty$，$\varphi^*: X^*\to]-\infty+\infty]$。显然 φ^* 凸．又对 $\forall\ x_0^*\in D(\varphi^*)$，对 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ x_0\in X$，使 $\langle x_0,x_0^*\rangle-\varphi(x_0)>\varphi^*(x_0^*)-\frac{\varepsilon}{2}$，取 x_0^* 的邻域 $V(x_0^*)=\{x^*\mid \|x^*-x_0^*\|^*\leq\frac{\varepsilon}{2\|x_0\|}\}$，则当 $x^*\in V(x_0^*)$ 时，

$$\varphi^*(x^*)\geq\langle x_0,\ x_0^*\rangle-\varphi(x_0)\geq\langle x_0,x_0^*\rangle-\varphi(x_0)+\langle x_0,\ x^*-x_0^*\rangle>\varphi^*(x_0^*)-\varepsilon。$$

设 K 是 X 中闭凸子集，所谓凸泛函求极小问题是指求 $u\in K$，使对定义于 K 上的凸泛函 φ 有

$$\varphi(u)=\inf_{v\in K}\varphi(v)$$

对此有一个基本事实如下：

定理1.1，若X是自反的B.S.，K是X中的闭凸子集，φ是定义于K上的凸泛函，若

$$\varphi(v)\longrightarrow+\infty,\quad \text{当}\|v\|\to\infty,\quad v\in K \tag{1.5}$$

且φ下半连续，则$\exists\ u\in K$使

$$\varphi(u)=\inf_{v\in K}\varphi(v)$$

如φ严格凸，则u唯一。

证．设$\{v_n\}$是φ在K上的逼近极小的列，

$$\varphi(v_n)\longrightarrow\inf_{v\in K}\varphi(v)$$

由于(1.5)，$\{v_n\}\subset K$是有界集。同时K是闭凸集，从而是弱闭集，因自反的B.S.中有界集的弱紧性，故不妨设$\{v_n\}$是弱收敛列，有$w\in K$使

$$v_n\longrightarrow w$$

按命题1.1，φ弱下半连续，

$$\lim_{v_n\to w}\inf\varphi(v_n)\geqslant\varphi(w)$$

即

$$\inf_{v\in K}\varphi(v)\geqslant\varphi(w)$$

因$w\in K$，故

$$\varphi(w)=\inf\varphi(v)$$

如φ严格凸，其唯一性自明。

现在研究使φ取极小的分析性条件。例如设φ 在$\mathbb{X}$上是($\mathcal{F}$)能微的，($\mathcal{F}$)导数$\varphi'(u)\in \mathbb{X}^*$，则有

定理1.2，设凸泛函φ在$\mathbb{X}$上有($\mathcal{F}$)导数$\varphi'(u)$，凸闭集$K\subset\mathbb{X}$，则$\exists\ u\in K$能满足

$$\varphi(u)=\inf_{v\in K}\varphi(v) \tag{1.6}$$

$\Longleftrightarrow \exists\, u$ 能满足

$$\langle\varphi'(u),\ v-u\rangle\geqq 0,\qquad \forall v\in K \tag{1.7}$$

证明，若(1.6)成立，则对$\forall\ \theta\in\,]0.1[$，$\forall v\in K$ 有

$$\varphi(u)\leqslant\varphi\big((1-\theta)u+\theta v\big)$$

因此

$$\frac{1}{\theta}\big[\varphi(u+\theta(v-u))-\varphi(u)\big]\geqq 0.$$

过渡到极限变成

$$\langle\varphi'(u),\ v-u\rangle\geqq 0\qquad \forall v\in K$$

反之，若(1.7)成立。因φ凸，对$\forall\theta\in]0.1[$ $\forall v$，$w\in K$ 有

$$\varphi((1-\theta)w+\theta v)\leqslant\theta\varphi(v)+(1-\theta)\varphi(w)$$

$$\frac{1}{\theta}\big[\varphi(w+\theta(v-w))-\varphi(w)\big]\leqslant\varphi(v)-\varphi(w)$$

过渡到极限有

$$\langle\varphi'(w),\ v-w\rangle\leqslant\varphi(v)-\varphi(w) \tag{1.8}$$

取 $w=u$，对 $\forall\ v\in K$ 成立

$$0\leqslant\langle\varphi'(u),v-u\rangle\leqslant\varphi(v)-\varphi(u)$$

证完.

定理1.3，若凸泛函 φ 于 $u,v\in X$（了）能微分，则其（了）导数 $\varphi'(v)$ $\varphi'(u)$ 满足

$$\langle\varphi'(v)-\varphi'(u),v-u\rangle\geqslant 0, \qquad (1.9)$$

证. 据 φ 的凸性和在 u,v（了）能微分，按（1.8）分别成立

$$\langle\varphi'(u),v-u\rangle\leqslant\varphi(v)-\varphi(u)$$

$$\langle\varphi'(v),u-v\rangle\leqslant\varphi(u)-\varphi(v)$$

二式相加得（1.9）。

定义1.4，说非线性单值算子 $A(x):X\to X^*$ 于 $x_0\in X$ 是半连续的，如果对 $\forall y\in X$ 成立

$$w^*-\lim_{t\to 0}A(x_0+ty)=A(x_0) \qquad (1.10).$$

定理1.4，如凸泛函 φ 在凸闭集 K上（了）能积分，$\exists u\in K$，（了）导数 $\varphi'(v)$ 于 u 半连续，则于 u 满足（1.7）$\Longleftrightarrow$ 对 $\forall v\in K$ 其（了）导数 $\varphi'(v)$ 满足

$$\langle\varphi'(v),v-u\rangle\geqq 0 \qquad (1.11)$$

证. 按定理1.3，显然（1.7）$\Rightarrow$（1.11）. 反之，如（1.11）成立. 对 $\forall w\in K$，$\forall\theta\in]0.1[$，取 $v=\theta w+(1-\theta)u$，

$$\langle\varphi'(\theta w+(1-\theta)u),\ \theta(w-u)\rangle\geqq 0$$

$$\langle \varphi'(u+\theta(w-u)),\ w-u\rangle \geqq 0$$

按 $\varphi'(v)$ 在 u 的半连续性，令 $\theta\to 0$，

$$\langle \varphi'(u),\ w-u\rangle \geqq 0 .$$

注1.1，如凸闭集 $K\subset X$，φ 是真凸下半连续泛函，在 K 上有（G）导数 $\varphi'(v)$，$\varphi'(v)$ 於 u 半连续，则下述三种说法等价：

(i) $\varphi(u)=\inf\limits_{v\in K}\varphi(v)$

(ii) $\langle \varphi'(u),\ v-u\rangle \geqq 0$，　$\forall v\in K$

(iii) $\langle \varphi'(v),\ v-u\rangle \geqq 0$，　$\forall v\in K$．

定理1.5，若定义于凸闭集 $K\subset X$ 上的泛函

$$\varphi(v)=\varphi_1(v)+\varphi_2(v),$$

其中 φ_2 $(i=1.2)$ 在 K 上凸下半连续，若 $v\to\varphi_1(v)$ 在 K 上有（G）导数，则 $\exists\, u\in K$ 能使，

$$\varphi(u)=\inf_{v\in K}\varphi(v) \tag{1.12}$$

$\Longleftrightarrow$ 对 $\forall v\in K$ 成立

$$\langle \varphi_1'(u),\ v-u\rangle+\varphi_2(v)-\varphi_2(u)\geqq 0 \tag{1.13}$$

证，若 (1.12) 成立，对 $\forall v\in K$ 和 $\theta\in\,]0.1[$ 有

$$\varphi(u)\leqq\varphi((1-\theta)u+\theta v)=\varphi_1((1-\theta)u+\theta v)+\varphi_2((1-\theta)u+\theta v)$$

$$\varphi_1(u)+\varphi_2(u)\leqq\varphi_1((1-\theta)u+\theta v)+(1-\theta)\varphi_2(u)+\theta\varphi_2(v)$$

$$\frac{1}{\theta}\left[\varphi_1(u+\theta(v-u))-\varphi_1(u)\right]+\varphi_2(v)-\varphi_2(u)\geqq 0$$

令 $\theta\to 0$，得到(1.13)。

反之，若(1.13)成立，因 φ_1 凸(F)能微，按(1.8)

$$\varphi(v)-\varphi(u)=\varphi_1(v)-\varphi_1(u)+\varphi_2(v)-\varphi_2(u)$$

$$=\langle\varphi_1'(u),v-u\rangle+\varphi_2(v)-\varphi_2(u)+\varphi_1(v)-\varphi_1(u)-\langle\varphi_1'(u),v-u\rangle$$

$$\geq 0,\qquad 对\ \forall v\in K$$

推论1.1，若

$$\varphi(v)=\varphi_0(v)+\varphi_1(v)+\varphi_2(v)$$

其中 φ_i $(i=0,1,2)$ 是 $K\subset\mathscr{X}$ 上凸泛函：若 $\varphi_0(v)$ 在 $u\in K$ 有(F)导数 $\varphi_0'(v)$，$\varphi_1(v)$ 在 K 上有(F)导数 $\varphi_1'(v)$，且 $\varphi_1'(v)$ 在 u 半连续，则于 $u\in K$ 满足

$$\varphi(u)=\inf_{v\in K}\varphi(v)$$

与下述二种关系等价

$$\langle\varphi_0'(u),v-u\rangle+\langle\varphi_1'(u),v-u\rangle+\varphi_2(v)-\varphi_2(u)\geq 0,\quad \forall v\in K \tag{1.14}$$

$$\langle\varphi_0'(u),v-u\rangle+\langle\varphi_1'(v),v-u\rangle+\varphi_2(v)-\varphi_2(u)\geq 0,\quad \forall v\in K \tag{1.15}$$

在这以前考察了 K 是 $\mathscr{X}$ 中凸闭集的情形，当只假定 K 是闭的时候，仍有按变分法术语的一阶必要条件成立。

若闭集 $Q\subset\mathscr{X}$，$u\in Q$，取

$$\mathscr{C}(Q;u)=\{w\mid\in\mathscr{X},\ \exists\ u_n\in Q,\ \lambda_n>0,\ 使\ u_n\to u,\ \lambda_n(u_n-u)\to w\}$$

易见 $\mathscr{C}(Q;u)$ 是 $\mathscr{X}$ 中以 $\{0\}$ 为顶的闭锥.

定理1.6，若φ在Q上(F)能微分，其(F)导数仍记为$\varphi'(v)$，若$\exists u\in Q$，使对$\forall v\in Q$有$\varphi(u)\leq\varphi(v)$，则

$$\langle\varphi'(u), w\rangle\geq 0, \quad \forall w\in \mathscr{C}(Q;u) \qquad (1.17)$$

证. 若$u\in Q$，$\varphi(u)\leq\varphi(v)$，$\forall v\in Q$，取$w\in\mathscr{C}(Q;u)$，则$\exists\{\lambda_n\}$，$\{u_n\}\subset Q$，使$u_n\to u$，$\lambda_n>0$，$\lambda_n(u_n-u)\to w$.

$$\varphi(u)\leq\varphi(u_n)=\varphi(u+u_n-u)$$

$$\leq\varphi(u)+\langle\varphi'(u), u_n-u\rangle+\|u_n-u\|O(\tfrac{1}{n})$$

所以

$$\langle\varphi'(u), u_n-u\rangle+\|u_n-u\|O(\tfrac{1}{n})\geq 0$$

$$\langle\varphi'(u), \lambda_n(u_n-u)\rangle+\|\lambda_n(u_n-u)\|O(\tfrac{1}{n})\geq 0.$$

取极限后

$$\langle\varphi'(u), w\rangle\geq 0.$$

至此，我们考察了在自反的B.S.中求一凸泛函极小的初等内容。对这一群一个解的存在性是由该泛函在某一拓扑下的连续性和极小化列在取值集K中的紧性所保证的。在可微分性假定下，已把求一泛函的极小问题化为求解变分不等方程的问题。但通常凸泛函不一定有(F)导数，这引起减弱这一假定的想法，去转而考察较弱的次微分性质，由于定理1.3，可去考察一般的非线性单调算子的性质。用单调性方法研究非线性偏微分变分不等方程问题是很有效的。

§2. 单调称子

若 $\mathfrak{X}$ 是实 $B.S.$，$\mathfrak{X}^*$ 是 $\mathfrak{X}$ 的共轭空间，$\mathfrak{X}$ 中的模记成 $\|\cdot\|$，$\mathfrak{X}^*$ 的模记成 $\|\cdot\|_*$，$\|\cdot\|_*$ 是 $\mathfrak{X}$ 的共轭模，在不引起混淆时也记成 $\|\cdot\|$。将 $\mathfrak{X}$ 赋以弱拓扑时记成 $\mathfrak{X}_w$，$\mathfrak{X}^*$ 赋以弱*拓扑时记成 $\mathfrak{X}^*_w$。

对 $\forall x\in\mathfrak{X}$，定义集

$F(x)=\{x^*|\in\mathfrak{X}^*,\langle x,x^*\rangle=\|x\|^2=\|x^*\|^2\}$，按 Hahn—Bimach 定理知 $F(x)\neq\phi$。

定义2.1. $F(x)$: $\mathfrak{X}\longrightarrow\mathfrak{X}^*$ 称为 $\mathfrak{X}$ 的共轭映象。

赋范空间 $\mathfrak{X}$ 称为严格凸的，如果其单位 S 是严格凸的（S 的边界 ∂S 不包含直线段）。说 $\mathfrak{X}$ 一致凸，如对 $\forall\varepsilon\in]0,2[$，$\exists\delta(\varepsilon)>0$，当 $\|x\|\leq1$，$\|x-y\|\geqslant\varepsilon$ 时有 $\|x+y\|\leqslant2(1-\delta(\varepsilon))$。

定理2.1. 如 $\mathfrak{X}^*$ 严格凸，则共轭映象 F 是单值和强弱连续的（是 $\mathfrak{X}\longrightarrow\mathfrak{X}^*_w$ 连续）。

证. 单值性是显然的，即 $F(x)$ 只由一个点构成。若 $\{x_n\}\subset\mathfrak{X}$，$x_n\longrightarrow x_0$，因 $F(x_n)$ 是弱*紧的。有 x_0^* 是 $F(x_n)$ 的弱*聚点，$x_n^*=F(x_n)$，

$$\lim_n\langle x_n,x_n^*\rangle=\lim_n\|x_n\|^2=\|x_0\|^2,$$

所以

$$\lim_n\langle x_n,x_n^*\rangle=\lim_n\langle x_0,x_n^*\rangle=\langle x_0,x_0^*\rangle=\|x_0\|^2$$

又因 $\|x_0^*\|\leqslant\lim_n\|F(x_n)\|=\|x_0\|$，所以 $x_0^*=F(x_0)$. 由于极限

唯一，所以 $F(x_n) \longrightarrow F(x_0)$。

下述定理属于 E. Asplund

定理2.2，设 $\mathfrak{X}$ 是自反的 B.S.，具有模 $\|\cdot\|$，则∃在 $\mathfrak{X}$ 上的等价模 $\|\cdot\|_0$，使在此模下 $\mathfrak{X}$ 是平滑凸的，$\mathfrak{X}^*$ 在共轭模 $\|\cdot\|_0^*$ 下是平滑凸的。

定理2.3（T，Kato）如果 B.S. $\mathfrak{X}$ 的共轭空间 $\mathfrak{X}^*$ 是一致凸的，则共轭映象 $F:\ \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X}^*$ 在 $\mathfrak{X}$ 上的每一有界子集上一致连续。

证．假若不然，$\exists\{u_n\}, \{v_n\} \subset \mathfrak{X}$，使 $\|u_n\| \leqslant M$，$\|u_n - v_n\| \longrightarrow 0$，当 $n \longrightarrow \infty$，和 $\|F(u_n) - F(v_n)\| \geqslant \varepsilon > 0$，对 $\forall n$，不妨设 $\|u_n\| > \alpha$，$\|v_n\| > \alpha$，$\alpha > 0$．取 $x_n = u_n/\|u_n\|$，$y_n = v_n/\|v_n\|$，易见

$$\|x_n - y_n\| \longrightarrow 0, \quad 当 n \longrightarrow +\infty$$

同时有

$$\langle x_n, F(x_n) + F(y_n)\rangle = \|x_n\|^2 + \|y_n\|^2 + \langle x_n - y_n, F(y_n)\rangle$$

$$\geqslant 2 - \|x_n - y_n\|$$

从而

$\|F(x_n) + F(y_n)\|/2 \geqslant 1 - 2^{-1}\|x_n - y_n\|$　因为 $\mathfrak{X}^*$ 一致凸，故

$$F(x_n) - F(y_n) \longrightarrow 0, \quad 当 n \longrightarrow \infty$$

又因

$$F(u_n) - F(v_n) = \|u_n\|(F(x_n) - F(y_n)) + (\|u_n\| - \|v_n\|)F(y_n)$$

从而

$$F(u_n)-F(v_n)\longrightarrow 0; \quad 当\ X^*\ 中$$

这同假定矛盾，证完。

下面给出一般的非线性多值算子的定义。

如 X，Y 是线性空间，存在积空间 $X\times Y$。多值算子 A：$X\to Y$ 是 $X\times Y$ 中的子集，$A\subset X\times Y$，定义

$$AX=\{y|\in Y,\ (x,y)\in A\}$$

$$D(A)=\{x|\in X,\ AX\neq\phi\}$$

$$R(A)=\bigcup_{x\in D(A)} Ax$$

$$A^{-1}=\{(y,x)|\in Y\times X,\ (x,y)\in A\}$$

如 $A, B\subset X\times Y$，$\lambda\in R'$，取

$$\lambda A=\{(x,\lambda y)|\in X\times Y,(x,y)\in A\}$$

$$A+B=\{(x,y+z)|\in X\times Y,(x,y)\in A,(x,z)\in B\}$$

如 $A\subset Y\times Z$，$B\subset X\times Y$，则

$$AB=\{(x,z)|\in X\times Z,\ \exists y\in Y,(x,y)\in B,\ (y,z)\in A\}$$

定义2.2，说多值算子 $A\subset X\times X^*$ 是单调的，指对 $\forall(x_i,y_i)\in A$，$i=1,2$ 有

$$\langle x_1-x_2,\ y_1-y_2\rangle\geqslant 0 \tag{2.1}$$

说 $X\times Y$ 中的单调子集 A 是极大单调的，指它不被真含于 $X\times X^*$ 中任何其它单调子集中。

定义2.3，说子集 $A\subset X\times X^*$ 在 $x_0\in X$ 局部有界，是指 $\exists x_0$ 的邻域 V，使 $A(V)=\{Ax\mid\subset X,\ x\in D(A)\cap V\}$ 是 X^* 中的有界子集。说 $A: X\longrightarrow X^*$ 是有界的，如果它把 X 中任何有界子集映成 X^* 中的有界子集。

定义2.4，若 $A: X\longrightarrow X^*$ 是单值算子，$D(A)=X$，

(i) 说 A 在 X 上是半连续的，如果

$$w-\lim_{t\to 0} A(x+ty)=Ax$$

(ii) 说 $A: X\rightarrow X^*$ 是强弱连续的，如果对 $\forall\{x_n\}\subset X$，$x_n\longrightarrow x\in X$ 有

$$w-\lim_{n} Ax_n=Ax$$

定义2.5，说多值算子 $A: X\longrightarrow X^*$ 是强制的，如果存在 $x_0\in D(A)$，对任何 $\{(x_n, x_n^*)\}\subset A$，使 $\lim\limits_{n}\|x_n\|=+\infty$ 者成立下式

$$\lim_{n}\langle x_n-x_0,\ x_n^*\rangle/\|x_n\|=\infty, \tag{2.2}$$

称 x_0 为强制点。

引理2.1，若 E 是有限维 B.S.，$B: E\longrightarrow E^*$ 是单调算子，则 B 有界，如果它还半连续，则 B 于 E 上连续。

证、若 B 无界，$\exists\{x_n\}\subset E$，$x_n\longrightarrow x_0$，$\|Bx_n\|\longrightarrow\infty$。因 B 单调

$$\langle x_n-x,\ Bx_n-Bx\rangle\geqq 0,\quad\forall x\in E$$

所以

$$\left\langle x_n - x,\ \frac{Bx_n}{\|Bx_n\|} - \frac{Bx}{\|Bx_n\|}\right\rangle \geqslant 0,\quad \forall x \in E$$

不失一般性，可设 $\lim_n Bx_n/\|Bx_n\| = y_0$，则

$$\langle x_0 - x,\ y_0\rangle \geqslant 0,\quad \forall x$$

所以 $y_0 = 0$，这是矛盾的，故 B 是有界算子。如果 $\{x_n\} \subset E$，

$x_n \longrightarrow x_0$，若 y_0 是 $\{Bx_n\}$ 的聚点。按 B 的单调性有

$$\langle x_0 - x,\ y_0 - Bx\rangle \geqslant 0,\qquad \forall x \in E$$

取 $x = x_t = tu + (1-t)x_0,\quad t \in (0.1),\quad \forall u \in E$

$$t\langle x_0 - u,\ y_0 - B(x_0 + t(u - x_0))\rangle \geqslant 0$$

因 B 半连续

$$\langle x_0 - u,\ y_0 - B\ x_0\rangle \geqslant 0$$

按 u 的任意性，$y_0 = Bx_0$

为了证明下一个引理，需用到下述关于多值映象的不动点定理及鞍点定理，详见 Smart，D. R. 的书"Fixed point Theorems"

定义 2.6，若 S 和 T 是 B. S. 的子集，说由 S 到 T 的多值算子 U 是个 K — 映象，如果它满足：

(i) 对 $\forall x \in S$，定义了一个非空紧凸子集 $U(x) \subset T$.

(ii) U 的图

$$\mathcal{U} = \{(x, y) | \in S \times T,\quad y \in U(x)\}$$