线性代数初步

贺恒昇 编

（中南林学院）

湖南省经济林学会印

一九八三年七月

线性代数初步

实际事物中变易间的依赖关系，是多种多样的，但可以把它们分成为线性的和非线性的两大类。

“线性代数初步”主要是讨论线性方程组的求解。而行列式和矩阵是解线性方程组的一个有力工具。因此，我们先介绍行列式及其性质，然后介绍矩阵及其运算，并分别用它们解线性方程组。

第一章　行列式

我们已经知道解线性方程组的两种方法——代入消元法和加减消元法。用行列式解线性方程组比上述两种方法都简单方便。对于任何一个有唯一解的线性方程组，都可利用行列式求出它的解。

第一节　二元线性方程组及二阶行列式

对于二元线性方程组
$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \quad \cdots\cdots(1)$$

为求方程组（1）的解，先以 b_2 遍乘第一个方程，再以 b_1 遍乘第二个方程，然后再由第一个方程减去第二个方程，这样便消去了 y，得：

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1 \qquad (2)$$

用同样方法消去 x 得　$(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1$　(3)

若　$a_1b_2-a_2b_1\neq 0$　用它除（2）和（3）的两端，得

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \qquad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1} \tag{4}$$

这就是用加减消元法求解线性方程组。

为了使公式（4）便于记忆，我们引入二阶行列式的概念。

设四个数排成正方表：

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}$$

数 $a_1b_2-a_2b_1$ 称为对应于这个表的二阶行列式，用记号

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$ 表示。

因此
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1 \tag{5}$$

数 a_1,a_2,b_1,b_2 叫做行列式（5）的元素，横排称为行，竖排称为列。

按照公式（5），要算出一个二阶行列式，只需先把左上角与右下角的元素相乘，得 a_1b_2 再把左下角与右上角的元素相乘，得 a_2b_1，然后由前者减去后者，这一计算过程有时称为二阶行列式按对角线法则展开。

例如
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}=1\cdot2-(-2)\cdot3=8$$

利用二阶行列式可把方程组（1）的解（4）表示为：

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \tag{6}$$

分母中的行列式是由方程组（1）的系数所组成，称为方程组（1）的系数行列式，用 $\triangle$ 表示。用 $\triangle x$ 及 $\triangle y$ 表示（6）的分子中两个行列式，则

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta},\qquad y=\frac{\Delta y}{\Delta}.\qquad\qquad (\Delta\neq 0)$$

值得注意：将方程组（1）的常数项代换行列式 Δ 中未知数 x 的系数便得 Δx，代换行列式 Δ 中未知数 y 的系数便得 Δy 。

下面讨论方程组（1）的系数行列式 Δ 等于 0 的情形。

当 $\Delta=0$ 时，公式（4）即公式（6）不能成立，但式（2）和（3）成立，利用记号 Δ、Δx、及 Δy，则（2）和（3）可写为：

$$\Delta\cdot x=\Delta x,\qquad \Delta\cdot y=\Delta y \qquad (7)$$

如果 Δx，Δy 中至少有一个不等于 0，x 和 y 不论取什么值总不能使（7）的两个等式同时成立，因此方程组（1）无解。

如果 Δx、Δy 都等于 0，则有

$$a_1b_2-a_2b_1=0,\qquad c_1b_2-c_2b_1=0,\qquad a_1c_2-a_2c_1=0$$

故 $$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}.$$

这表明，方程组（1）中的一个方程可由另一个方程乘上一个适当的常数得到。因此方程组实际上只是一个方程，这时方程组（1）有无穷多组解。

综上述，得出：

（1）若 $\Delta\neq 0$，则方程组（1）有唯一确定的解，

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta},\qquad y=\frac{\Delta y}{\Delta}$$

（2）若 $\Delta=0$，但 Δx 及 Δy 中至少有一个不等于 0，则方程组（1）没有解。

（3）若 $\Delta=\Delta x=\Delta y=0$，则方程组（1）有无穷多组解。

如果把方程组（1）看做是两条直线的方程，则上述三种情形可用几何观点加以说明，第一种情形表示两直线相交于一确定的点，此点的坐标就是方程组（1）的解；第二种情形表示两直线平行；第三种情形表示两直线重合。

例1、　解方程组 $\begin{cases}2x-3y-8=0\\3x+y-1=0\end{cases}$

解：　先把方程组化成一般形式：$\begin{cases}2x-3y=8\\3x+y=1\end{cases}$

计算系数行列式　$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -3\\3 & 1\end{vmatrix}=2\cdot1-3\cdot(-3)=11\neq0$

故方程组有唯一解：

又　$\Delta_x=\begin{vmatrix}8 & -3\\1 & 1\end{vmatrix}=8\cdot1-1\cdot(3)=11$

$\Delta_y=\begin{vmatrix}2 & 8\\3 & 1\end{vmatrix}=2\cdot1-3\cdot8=-22$

从而得　$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{11}{11}=1$；　$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-22}{11}=-2$

例2、　解方程组 $\begin{cases}6x+8y-3=0\\3x+4y-1=0\end{cases}$

解：由于 $\Delta=\begin{vmatrix}6 & 8\\3 & 4\end{vmatrix}=6\cdot4-3\cdot8=0$

$\Delta_x=\begin{vmatrix}3 & 8\\1 & 4\end{vmatrix}=3\cdot4-1\cdot8=4\neq0$

故方程组无解，如果把第二个方程乘以2，再与第一个方程比较，便知这两个方程是不能同时成立的。

例3．解方程组 $\begin{cases}9x-15y=12\\3x-5y=4\end{cases}$

解：　$\Delta=\begin{vmatrix}9 & -15\\3 & -5\end{vmatrix}=9\cdot(-5)-3\cdot(-15)=0$

$\Delta_x=\begin{vmatrix}12 & -15\\4 & -5\end{vmatrix}=12\cdot(-5)-4(-15)=0$

$\Delta_y=\begin{vmatrix}9 & 12\\3 & 4\end{vmatrix}=9\cdot4-3\cdot12=0$

故方程组有无穷多组解。如果把第二个方程乘以3，便得第一个方程，这方程组实际上是一个方程，$3x-5y=4$，取y为任意值而$x=\frac{5}{3}y+\frac{4}{3}$便得方程组的无穷多组解。

第二节　三阶行列式

用二阶行列式解二元线性方程组的方法，可以推广。下面介绍三阶行列式的概念。

设九个数排成正方表

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}$$

数$a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_1b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2$称为对应于这个表的三阶行列式。用记号

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

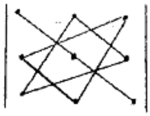
表示，因此

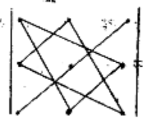
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3-a_1b_3c_2 \qquad (1)$$

其中数$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$叫做行列式（1）的元素。

由上述定义，使被三阶行列式的计算法则如下（常称为对角线法则）：

在表示式（1）中，带加号的三项中有一项是主对角线（从左上方到右下方）上三个元素的乘积，其他二项是主对角线的平行线上的元素与其对角上的元素的乘积。带减号的三项中有一项是次对角线（从左下方到右上方）上三个元素的乘积，其他两项是次对角线的平行线上的元素与其对角上的元素的乘积。下左图指示计算三阶行列式三正项的规则；右图指示计算三负项的规则。

+ 



例1、计算
$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & 4 & 6\\ 7 & 0 & 5\end{vmatrix}$$

解：利用对角线法得：$\Delta=3\cdot4\cdot5+2\cdot0\cdot1+7\cdot(-1)\cdot5-7\cdot4\cdot1-2\cdot(-1)\cdot5$
$-3\cdot0\cdot6=60+0-42-28+10-0=0$

例2．计算 $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}$

解：利用对角线法得 $\Delta=1\cdot3\cdot3+3\cdot1\cdot2+2\cdot1\cdot1-1\cdot3\cdot2-1\cdot1\cdot1-2\cdot3\cdot3$
$=9+6+1-6-1-18=-8$

第三节　三阶行列式的性质

三阶行列式的性质如下：

(1) 把行列式的行（或列）变为同号数的列（或行），行列式的值不变。即：

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

用对角线法可验证性质成立．此性质也叫"行列式与它的转置行列式相等"。这个性质说明．行具有的性质列也具有，反之列具有的性质行也有。

(2) 对调行列式的两行（或列），行列式改变符号，但绝对值不

变。例如，

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

用对角线法可以验证性质成立。

（3）行列式两行（或列）相同，其值为0。

由性质（2）可直接推得。

（4）行列式的某一行（或列）的各元素如果有公因子，这个公因子可以提到行列式记号外面去。例如

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

用对角线法可以验证性质成立。

（5）行列式的某一行（或列）的各元素都等于0，行列式的值为0。这是性质（4）的特殊情形。

（6）若行列式的某一行（或列）的所有元素都可以表成两项的和，则行列式可以写成两个行列式的和。例如

$$\begin{vmatrix} a_1+l & b_1+m & c_1+n \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l & m & n \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

用对角线法可以验证性质成立。

（7）如果行列式的两行（或列）的对应元素成比例，则此行列式的值为0。

例如 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

由性质（3）和（4）可以直接推得。

（8）把行列式的某一行（或列）的所有元素同乘以一数后加到另一行（或列）的对应元素上，行列式的值不变。例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+ka_1 & b_2+kb_1 & c_2+kc_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

这个性质可以由性质(6)、(7)证明。

为了验证行列式的另外两个性质，先介绍两个概念。

余子式：把行列式中某一元素所在的行和列划去后所成的行列式，称为原行列式对应于该元素的子行列式，简称余子式。

例如，行列式 $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 对应于元素 a_1 的子行列式是 $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$；对应于 b_2 的子行列式是 $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$；……。

代数余子式：设行列式中某一元素所在行的行数为 i，所在列的列数为 j，所对应于该元素的子行列式乘上 $(-1)^{i+j}$ 所得的式子（行列式）叫做该元素的代数余子式。

例如 行列式 $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，元素 a_1 的代数余子式是

$$A_1 = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$ 元素 b_3 的代数余子式是

$$B_3 = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

一行列式的某元素的代数余子式，用该元素的大写字母表示，下标不变。例如元素 a_2 的代数余子式用 A_2 表示等等。

下面我们再介绍行列式的性质

(9) 行列式等于它任意一行（或列）的各元素与对应于它们的代数余子式的乘积和。

即下列等式成立：

$$\Delta = a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1, \qquad \Delta = a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3$$

$$\Delta = a_2A+b_2B_2+c_2C_2, \qquad \Delta = b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3$$

$$\Delta = a_3A_3+b_3B_3+c_3C_3, \qquad \Delta = c_1C_1+c_2C_2+c_3C_3$$

证明第一个等式，其他五个的证明完全类似。

用对角线法展开行列式 Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3$$

$$-a_1b_3c_2 = a_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_1(a_3c_2-a_2c_3)$$

$$+c_1(a_2b_3-a_3b_2)$$

$$= a_1(-1)^2\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1(-1)^3\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1(-1)^4\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1 .$$

(10) 行列式某一行（列）的各元素与另一行（列）对应元素的代数余子式的乘积的和恒等于0，即下列等式成立。

$$a_1A_2+b_1B_2+c_1C_2=0 \qquad a_1A_3+b_1B_3+c_1C_3=0$$

$$a_2A_1+b_2B_1+c_2C_1=0 \qquad a_2A_3+b_2B_3+c_2C_3=0$$

$$a_3A_1+b_3B_1+c_3C_1=0 \qquad a_3A_2+b_3B_2+c_3C_2=0$$

$$a_1B_1+a_2B_2+a_3B_3=0 \qquad a_1C_1+a_2C_2+a_3C_3=0$$

$$a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1=0 \qquad b_1C_1+b_2C_2+b_3C_3=0$$

$$c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3=0 \qquad c_1B_1+c_2B_2+c_3B_3=0$$

下面只证明第一个等式，其他十一个的证法完全类似。

将行列式 Δ 中的第二行的元素 a_2、b_2 和 c_2 换成第一行的元素 a_1, b_1 和 c_1 得行列式 Δ'，由性质(3)知 $\Delta'=0$。再把行列式 Δ' 按第二行展开，而 Δ' 的第二行的各元素的代数余子式就是行列式 Δ 的第二行的各元素的代数余子式 A_2, B_2 和 C_2，于是得

$$a_1A_2+b_1B_2+c_1C_2=0$$

利用行列式的上述性质，可以使行列式的计算简化，举例如下，

例1，计算 $\Delta=\begin{vmatrix}2&-1&3\\4&2&5\\2&0&2\end{vmatrix}$

解：$\Delta=\begin{vmatrix}2&-1&3\\4&2&5\\2&0&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-1&1\\4&2&1\\2&0&0\end{vmatrix}=2\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1&1\\2&1\end{vmatrix}=2\cdot(-1\cdot1-1\cdot2)=-6$

例2，计算 $\Delta=\begin{vmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{vmatrix}$

解：$\Delta=\begin{vmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}1&4&7\\2&5&8\\1&2&3\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}0&2&4\\2&5&8\\1&2&3\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}0&2&4\\0&1&2\\1&2&3\end{vmatrix}$

$=3\cdot2\begin{vmatrix}0&1&2\\0&1&2\\1&2&3\end{vmatrix}=6(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1&2\\1&2\end{vmatrix}=6\cdot0=0$

例3，计算 $\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\x&y&z\\x^2&y^2&z^2\end{vmatrix}$

解：$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\x&y&z\\x^2&y^2&z^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\x&y-x&z-x\\x^2&y^2-x^2&z^2-x^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y-x&z-x\\y^2-x^2&z^2-x^2\end{vmatrix}1\cdot(-1)^{1+1}$

$=(y-x)(z-x)\begin{vmatrix}1&1\\y+x&z+x\end{vmatrix}=(y-x)(z-x)(z+x-y-x)$

$=(y-x)(z-x)(z-y)$

第四节　三元线性方程组的解法

现在讨论如何利用三阶行列式解三元线性方程组。

设三元线性方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\a_2x+b_2y+c_2z=d_2\\a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{cases}\qquad(1)$$

假设这个方程组的系数行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

不等于0，我们仍用A_1, A_2, A_3……表示行列式Δ对应元素a_1, a_2, a_3……的代数余子式。

以A_1, A_2, A_3分别乘方程组（1）的第一、第二和第三个方程的两边，然后相加，得，$(a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3)x+(b_1A_1+b_2B_2+b_3B_3)y+(c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3)z=d_1A_1+d_2A_2+d_3A_3$.

由行列式性质（9）和（10）得

类似可得：
$$\begin{cases} \Delta\cdot x=d_1A_1+d_2A_2+d_3A_3 \\ \Delta\cdot y=d_1B_1+d_2B_2+d_3B_3 \\ \Delta\cdot z=d_1C_1+d_2C_2+d_3C_3 \end{cases} \qquad (2)$$

若用Δx, Δy，和Δz分别表示方程组（2）中第一，第二和第三个方程的右边的式子，则方程组（2）就是：$\Delta\cdot x=\Delta x$，$\Delta\cdot y=\Delta y$，$\Delta\cdot z=\Delta z$ （3）

而 $\Delta x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\Delta y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\Delta z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$

综上述得到解三元线性方程组的行列式法则如下：

当三元线性方程组（1）的系数行列式$\Delta\neq 0$时，方程组（1）有唯一确的解。

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}, \qquad y=\frac{\Delta y}{\Delta}, \qquad z=\frac{\Delta z}{\Delta}.$$

其中Δx, Δy, Δz是把行列式Δ中对应未知数的各系数换成常数项而得到的三阶行列式。

另外，当$\Delta=0$，而Δx, Δy及Δz中至少有一个不等于0

时，则方程组（1）没有解。

当 $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$ 时，方程组（1）可能没有解，也可能有无穷多组解。

例1．解方程组：
$$\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 2x+y-z=6 \\ 3x+y-4z=8 \end{cases}$$

解：
$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}=6, \qquad \Delta_x=\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & -1 \\ 8 & 1 & -4 \end{vmatrix}=18,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 3 & 8 & -4 \end{vmatrix}=2, \qquad \Delta_z=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix}=2,$$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{18}{6}=3, \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}, \quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

例2．解方程组
$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=2 \\ x+y+z=3 \end{cases}$$

解：显然 $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$，

但容易看出，方程组中的三个方程是彼此矛盾的，因而方程组无解。

例3．解方程组
$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=2 \\ 3x+3y+3z=3 \end{cases}$$

解：显然有 $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$

由于第一个方程乘以2得第二个方程，第一个方程乘以3得第三个方程，因此，这三个方程为同解方程。要解这个方程组只要解第一个方程就行了。故方程组有无穷多组解。

第五节　齐次线性方程组的解

所有常数项都等于0的线性方程组，叫做齐次线性方程组。

例如：
$$\begin{cases} a_1x+b_1y=0 \\ a_2x+b_2y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$$

分别叫做二元和三元齐次线性方程组。现在讨论这种方程组的解。

由上节的行列式法则知，如果方程组的系数行列式 $\Delta\neq0$，则方程组的解为：
$$x=\frac{\Delta x}{\Delta},\quad y=\frac{\Delta y}{\Delta},\quad z=\frac{\Delta z}{\Delta}.$$

而 Δx，Δy，Δz 都是为等于0的，因此，方程组的解全为0，叫做方程组的零解。如果分母行列式（即系数行列式）等于0，则方程除一组零解外，还有无穷多组非零解。

例1． 解方程组：
$$\begin{cases} 2x+y=0 \\ x-2y=0 \end{cases}$$

解：
$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=2\cdot(-2)-1\cdot1=-5\neq0$$

所以齐次线性方程组只有一组零解，$x=0$，$y=0$。

例2． 解方程组：
$$\begin{cases} x-y-z=0 \\ 2x-2y-2z=0 \\ 3x-3y-3z=0 \end{cases}$$

解：
$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 3 & -3 & -3 \end{vmatrix}=0$$

因此，方程组除有一组零解外，还有无穷多组非零解。事实上要求方程组的解，只要解第一个方程就行了。于是得，$x=y+z$

其中y和z是任意的．例如取$y=2$，$z=1$，就得一组非零解：

$$x=3\ ,\quad y=2\ ,\quad z=1\ .$$

第六节　n阶行列式与n元线性方程组

本节我们将把三阶行列式的概念扩充到n阶，并把解三元线性方程组的行列式法则推广到解n元线性方程组。

一、n阶行列式

所谓n阶行列式，就是

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}\qquad(\text{按第一行展开})$$

$$=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+\cdots+a_{2n}A_{2n}\qquad(\text{〃 〃 二 〃 〃})$$

$$\cdots\cdots$$

$$=a_{n1}A_{n1}+a_{n2}A_{n2}+\cdots+a_{nn}A_{nn}\qquad(\text{按第n行展开})$$

$$=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}\qquad(\text{按第一列展开})$$

$$=a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+\cdots+a_{n2}A_{n2}\qquad(\text{〃 〃 二 〃 〃})$$

$$\cdots\cdots$$

$$=a_{1n}A_{1n}+a_{2n}A_{2n}+\cdots+a_{nn}A_{nn}\qquad(\text{〃 〃 n 〃 〃})$$

其中A_{ij} $(i,j=1,2,\cdots n)$是元素a_{ij}的代数余子式．这就是说，n阶行列式的值等于任一行（列）中各元素与它们各自的代数余子式的乘积的和．因为A_{ij}是元素a_{ij}的代数余子式，因此A_{ij}是一个$n-1$阶行列式，于是知，n阶行列式是由n个$n-1$阶行列式定义的．n阶行列式的计算，归结为n个$n-1$阶行列式的计算。而$n-1$阶行列式又可以归结为$n-1$个$n-2$阶行列式。

如此递推，总可以推到三阶行列式，这样n阶行列式的定义和计算都解决了。

三阶行列式的性质，对于n阶行列式都完全成立。但是在计算四阶以上的行列式时，对角线法则已不能适用。必须根据定义，同时利用行列式的性质进行计算。

例4． 计算 $$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$$

解： $$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -9 & -5 & -9 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -10 & -7 & -8 \end{vmatrix}=-1(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -9 & -9 \\ 1 & -3 & -6 \\ 1 & -10 & -8 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & -2 \end{vmatrix}=-(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix}=6+21=27$$

例5． $$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

解： $$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-1(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=-(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-(-4-2)=6$$

二、解n元线性方程组的行列式法则，（克莱姆规则）。

我们已经知道，二元及三元线性方程组，当其系数行列式Δ不等于0时，可以利用行列式求解。对于n元线性方程组，也有同样的结论。

设n元线性方程组:
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \quad \cdots\cdots(1)$$

的系数行列式 $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$

则方程组(1)有唯一确定的解: $x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}$, $\cdots\cdots x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}$, 其中 Δ_1, Δ_2, $\cdots$ Δ_n 是系数行列式 Δ 的第一列, 第二列 $\cdots\cdots$ 第n列分别换成方程组(1)的常数项 b_1, b_2, $\cdots$ b_n 后所得的n阶行列式。其证明将在下一章给出。

例6 解线性方程组
$$\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8 \\ x_1-3x_2 \qquad -6x_4=9 \\ \qquad 2x_2-x_3+2x_4=-5 \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0 \end{cases}$$

解: $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=27\neq 0$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 11 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 12 & 4 & -7 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=-3\begin{vmatrix} 11 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 12 & -7 & -2 \end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix} -6 & -21 \\ -5 & -22 \end{vmatrix}=+3(132-105)=81.$$

$\Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix}=-108$. $\Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & 6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}=-27$. $\Delta_4=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 2 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix}=27$.